ANÁLISIS FUNCIONAL. DOBLE GRADO I.I.M., 3/11/2022

1 punto

① Considera el espacio normado $\mathfrak{X} = (C[-1,1], \|\cdot\|_\infty)$.
Demuestra que $\overset{\circ}{\mathcal{P}} = \emptyset$, donde $\mathcal{P}$ es el subconjunto de los polinomios.

② Si $1 \leq p < +\infty$, definimos el subespacio vectorial de ℓ_p:

$$G_p = \left\{ (x_n) \in \ell_p : \sum_{n=1}^{+\infty} x_n = 0 \right\}$$

2 puntos

a) Si $p=1$, demuestra que el funcional

$$f : \ell_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

es lineal y continuo. Como consecuencia, demuestra que G_1 es cerrado en ℓ_1

3 puntos

b) Demuestra que si $1 < p < +\infty$, G_p no es cerrado en ℓ_p. Sugerencia: Considera la "sucesión de sucesiones" en ℓ_p: $(X_n) = (-1, \underbrace{\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n \text{ veces}}, 0, 0, \ldots)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

③ Sea $\mathfrak{X} = C[0,1]$ y $f : \mathfrak{X} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(1)$, $\forall x \in \mathfrak{X}$

2 puntos

a) Prueba que $f : (\mathfrak{X}, \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$ es continua y calcula su norma. Calcula también el conjunto de elementos de la bola unidad de $(\mathfrak{X}, \|\cdot\|_\infty)$ donde se alcanza tal norma.

2 puntos

b) Prueba que $f : (\mathfrak{X}, \|\cdot\|_{L^p(0,1)}) \to \mathbb{R}$ no es continua $(1 \leq p < +\infty)$