Pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \cdots$, etc. En $\mathbb{R}$, una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}$); en $\mathbb{R}^2$, una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos, y en

ggeneral, en $\mathbf{R}^n$, una base está formada por un subconjunto ortogonal de n elementos (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de $\mathbf{R}^n$ es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente $\{f_1, \cdots, f_m\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ otro subconjunto ortonormal que engendra el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente: "Un subconjunto **A** de $L^2(a,b)$ que sea ortogonal se dirá que es una base de $L^2(a,b)$ si todo elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita (al ser **A** ortogonal, **A** es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de **A**". Rápidamente vamos a ver que no existe tal subconjunto.

EJERCICIO 15.

Demostrar que no existe ningún subconjunto **A** *de* $L^2(a,b)$ que sea ortogonal y que cumpla la siguiente propiedad: "Cualquier elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita de elementos de **A**".

Solución: Obviamente podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal.
Si $\mathbf{A} \subset L^2(a,b)$ es un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior, **A** debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real $L^2(a,b)$ sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues **A** debe contener algún subconjunto numerable (veremos posteriormente que cualquier subconjunto ortogonal de $L^2(a,b)$ debe ser numerable); Sea $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, **B** numerable. Entonces $\mathbf{B} = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos la sucesión $\{f_n\}$ definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}$$

Si $n > m$,

$$\|f_n - f_m\|^2 = \left\|\frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}\right\|^2 =$$
$$=< \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n}, \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} >=$$
$$= \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{2^{2m+4}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}$$

y como la sucesión $\left\{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{2n}}, k \in \mathbb{N}\right\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^2(a,b)$. Por ser $L^2(a,b)$ completo, $\{f_n\} \to f$ donde $f \in L^2(a,b)$; además,

$$f = \frac{b_1}{2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

Por otra parte, f debería ser una combinación lineal finita de elementos de $\mathbf{A}$: es decir, existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{A}$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$$

De donde se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} = 0,$$

que no es posible utilizando el ejercicio 14. (¿por qué?)

Creo que los ejercicios 14 y 15 "justifican"la siguiente definición:

Definición.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Diremos que tal subconjunto es una base si cualquier elemento f de $L^2(a,b)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n \tag{1.8}$$