Antonio Cañada Análisis de Fourier	SERIES DE FOURIER	Curso 2013/14

TEOREMA (Lebesgue, 1.902) (pg. 99 de mi libro)

El conjunto

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es base de $L^2(-\pi, \pi)$.

ETAPA A) $f \in C[-\pi,\pi]$, ortogonal a B.

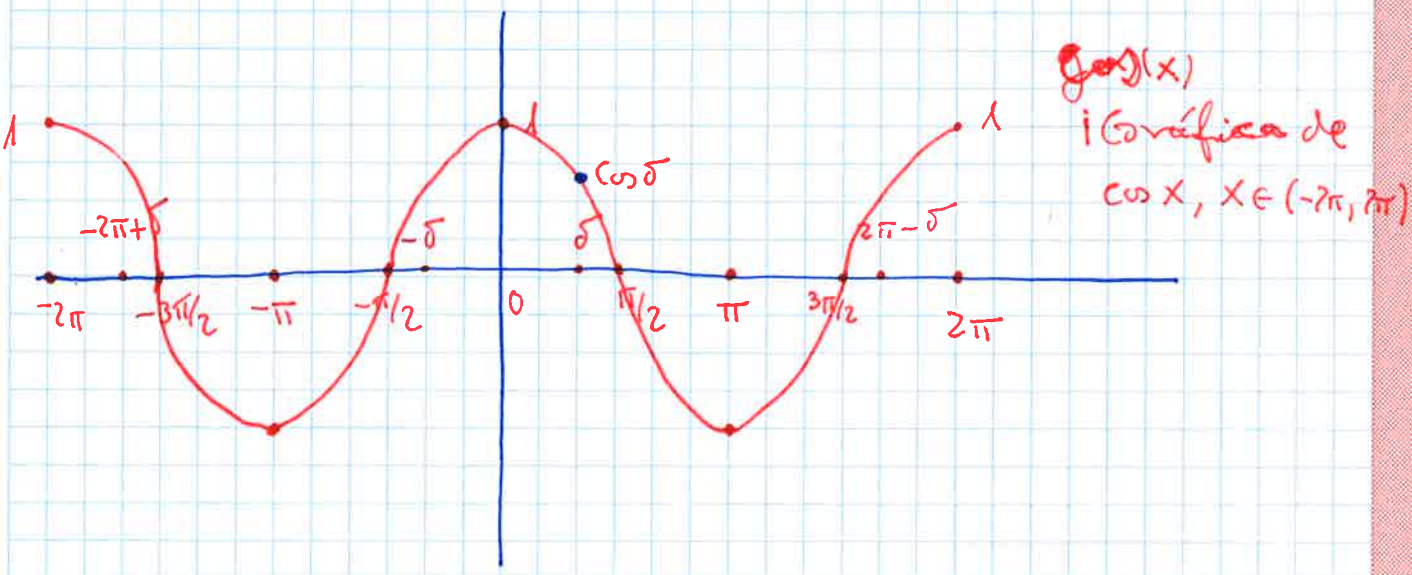
Si $f \not\equiv 0$ en $[-\pi,\pi] \Rightarrow \exists\ x_0 \in (-\pi,\pi)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, t.q.

$$|f(x)| \geq \varepsilon, \quad \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi)$$

__Lema__. Para $m \in \mathbb{N}$, suficientemente grande f no es ortogonal a

$$g_m(x) \equiv \left(1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta\right)^m$$

que es un polinomio trigonométrico (combinación lineal finita de elementos de B)



Estudiemos el comportamiento de $g_m(x)$

1º) $|x-x_0| \leq \delta$

Entonces, como $\cos(x-x_0) \geq \cos\delta \Rightarrow g_m(x) \geq 1$

2º) $|x-x_0| \leq \delta/2$

Entonces, como $\cos(x-x_0) \geq \cos\frac{\delta}{2}$

$$\Downarrow$$

$$g_m(x) \geq \left(1+\cos\frac{\delta}{2}-\cos\delta\right)^m$$

3º) $\forall x \in (-\pi,\pi) \,/\, |x-x_0| > \delta$ tenemos $|g_m(x)| \leq 1$, pues

(*) $x-x_0 \in (-2\pi, 2\pi)$ (pues $|x-x_0| < |x|+|x_0| < \pi+\pi = 2\pi$)

(**) $x-x_0 \notin (-2\pi, -2\pi+\delta) \cup (-\delta,\delta) \cup (2\pi-\delta, 2\pi)$, pues

a) $\underbrace{x<\pi, \quad x_0-\delta > -\pi}$ (pues $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi)$)

$$\Downarrow$$

$x<\pi, \quad -x_0 < \pi-\delta \Rightarrow x-x_0 < 2\pi-\delta$

b) $\underbrace{x>-\pi, \quad x_0+\delta<\pi}$ (pues $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi)$)

$$\Downarrow$$

$x>-\pi \quad -x_0 > -\pi+\delta \Rightarrow x-x_0 > -2\pi+\delta$

c) $|x-x_0|>\delta \Rightarrow x-x_0 \notin (-\delta,\delta)$

Así pues, hemos probado (**), y por tanto (véase la gráfica de $\cos x$)

$\cos(x-x_0) \leq \cos\delta \Rightarrow$

$-2 \leq \cos(x-x_0) - \cos\delta \leq 0 \Rightarrow -1 \leq 1+\cos(x-x_0)-\cos\delta \leq 1$

$\Rightarrow \ |g_m(x)| \leq 1.$

Debemos tener

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_m(x)\, dx = 0, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) g_m(x)\, dx = \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x) g_m(x)\, dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) g_m(x)\, dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x) g_m(x)\, dx$$

Además:

$$\left| \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x) g_m(x)\, dx \right| = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)||g_m(x)|\, dx \geq$$

$$\geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} |f(x)||g_m(x)|\, dx \geq \varepsilon \left(1 + \cos\frac{\delta}{2} - \cos\delta\right)^m \delta$$

$$\left| \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x) g_m(x)\, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)|\underbrace{|g_m(x)|}\, dx \leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f|$$

$$\left| \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x) g_m(x)\, dx \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Como $\lim_{m \to +\infty} \left(1 + \cos\frac{\delta}{2} - \cos\delta\right)^m = +\infty$, tenemos la contradicción.

ETAPA B) $f \in L^2(-\pi,\pi)$, ortogonal a B.

Sea $g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$

$f \in L^1(-\pi,\pi) \Rightarrow \exists g'$ c.p.d. $g' = f$ c.p.d. y

g absol. continua ($\Rightarrow g$ continua)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{\cos(nx)\,dx}_{dv} \underset{n\neq 0}{\overset{\text{I. Partes}}{=}} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\,g(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)\cdot f(x)\,dx}_{=0}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{g(x)}_{u} \underbrace{\operatorname{sen}(nx)\,dx}_{dv} \underset{n\neq 0}{=} \underbrace{-\frac{1}{n}\cos(nx)\,g(x)\Big]_{-\pi}^{\pi}}_{\shortparallel} + \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{n}\cos(nx)\,dx}_{\shortparallel\ 0}$$

$$\underbrace{-\frac{1}{n}\cos(n\pi)\,g(\pi)}_{¿0?} + \frac{1}{n}\underbrace{\cos(n(-\pi))\,g(-\pi)}_{\shortparallel\ 0}$$

Nos hace falta $g(\pi) = 0$

$$\shortparallel\quad \int_{-\pi}^{\pi} f = 0, \text{ pues } f \text{ es ortogonal a } \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

¿$n = 0$? $\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$ nos hace falta que sea 0.

Por eso tomamos

$h(x) \equiv g(x) - \alpha$ / $\int_{-\pi}^{\pi} g(x) - \int_{-\pi}^{\pi} \alpha = 0$, $\alpha = \dfrac{\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx}{2\pi}$

Ahora h es ortogonal a $\begin{cases} 1 \\ \cos(nx),\ n \in \mathbb{N} \\ \operatorname{sen}(nx),\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

Por la etapa A), $h \equiv 0 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{f}}{h'} = 0$ c.q.d