Análisis de Fourier

Resumen de los apuntes de D. Antonio Cañada Villar

Curso 2015/2016

Sergio Cruz Blázquez

Índice

El espacio $L^2(a, b)$

Definición y primeras notas

Definición

Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se define el espacio de funciones $L^2(a,b)$ como $L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ medibles t.q. } \int_a^b (f(x))^2 dx \textit{ existe y es finita}\}$

Nota: La noción de igualdad en $L^2(a,b)$ es ligeramente diferente a la usual. Tenemos $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \textit{ cpd en } [a,b] \Leftrightarrow \exists A \subset [a,b] \textit{ con } \mu(A) = 0 \textit{ t.q. } f(x) = g(x), \forall x \in [a,b] \setminus A$

Nota: $C[a,b] \subset L^2(a,b)$ aunque existen funciones continuas en $]a,b[$ que no están en $L^2(a,b)$, como $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in]0,1[$

Proposición

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ medible y tal que $\exists M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ cpd en $]a,b[\Rightarrow f \in L^2(a,b)$.

Nota: El recíproco, en general, es falso. Basta considerar la función $x \to \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$, $x \in]0,1[$

El espacio $L^1(a,b)$

Definición

Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos el espacio de funciones $L^1(a,b)$ como
$L^1(a,b) = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \textit{ t.q. } f \textit{ medible y } \int_a^b |f(x)| dx \textit{ existe y es finita} \right\}$

Nota: La noción de igualdad entre funciones de $L^1(a,b)$ es la misma que para funciones de $L^2(a,b)$

Proposición

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, se tiene que $L^2(a,b) \subsetneq L^1(a,b)$, es decir, $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ y $\exists\, g \in L^1(a,b)$ *t.q.* $g \notin L^2(a,b)$

Proposición

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f, g \in L^2(a,b) \Rightarrow f\, g \in L^1(a,b)$

$L^2(a, b)$ como espacio vectorial

Definición

- Si V es un espacio vectorial real, decimos que $H \subset V$ es una base (algebraica) de V si los vectores de H son linealmente independientes y todo elemento de V puede expresarse como combinación lineal **finita** de elementos de H
- La dimensión de V es el número de elementos de una de sus bases. Decimos que V tiene dimensión infinita cuando no tiene dimensión finita.

- $\mathbb{P} = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : \text{f es un polinomio}\}$ es un espacio vectorial con $dim(V) = \infty$. Una base es $H = \{x^n; n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$
- Cualquier espacio vectorial que contenga a $\mathbb{P}$ (o a cualquier otro de dimensión infinita) es de dimensión infinita.

Proposición: Estructura algebraica de $L^2(a, b)$

Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $L^2(a, b)$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

El producto escalar de $L^2(a,b)$

Definición

Para cada par $(f,g) \in L^2(a,b)\, x\, L^2(a,b)$ definimos su producto escalar $\langle f,g \rangle$ como

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Propiedades del producto escalar

- $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f,h \rangle + \beta \langle f,h \rangle \;\forall \alpha,\beta \in \mathbb{R} \;\forall f,g \in L^2(a,b)$
- $\langle f,g \rangle = \langle g,f \rangle \;\forall f,g \in L^2(a,b)$
- $\langle f,f \rangle \geq 0 \;\forall f \in L^2(a,b)$ y $\langle f,f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$\langle f,g \rangle^2 \leq \langle f,f \rangle \langle g,g \rangle \;\forall f,g \in L^2(a,b)$ Además
$\langle f,g \rangle^2 = \langle f,f \rangle \langle g,g \rangle \Leftrightarrow \{f,g\}$ son linealmente dependientes

La norma de $L^2(a, b)$

Definición

Podemos definir una norma en $L^2(a, b)$ asociada al producto escalar

$$\|\cdot\| : L^2(a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx}$$

Propiedades

- $\|f\| \geq 0 \, \forall f \in L^2(a, b)$ y $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\| \, \forall f \in L^2(a, b) \, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\| \, \forall f, g \in L^2(a, b)$

Recordamos que toda norma, $\|\cdot\|$, en V induce una topología, $\tau_{\|\cdot\|}$, que viene caracterizada por:
$O \subset V,\ O \in \tau_{\|\cdot\|} \Leftrightarrow \forall v \in O\ \exists\, r > 0 : B(v,r) := \{w \in V :\ \|w - v\| < r\} \subset O.$
Esto nos permite hablar de convergencia en $L^2(a,b)$, que resulta ser equivalente a la siguiente:

Definición

Sea $\{f_n\} \subset L^2(a,b)$ y $f \in L^2(a,b)$. Decimos que $\{f_n\}$ converge a f en $L^2(a,b)$ y se denota $\{f_n\} \to f$ cuando $\{\|f_n - f\|\} \to 0$

Proposición

La convergencia en $L^2(a,b)$ y la convergencia cpd **no son comparables**, es decir, $\{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b) \not\Leftarrow\not\Rightarrow \{f_n(x)\} \to f(x)$ cpd en $[a,b]$. Sin embargo, si $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $[a,b] \Rightarrow \{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b)$

- **Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue:** Sea $\{f_n\} \subset L^1(a,b) : \{f_n(x)\} \to f(x)$ cpd en $[a,b]$ y tal que $\exists\, g \in L^1(a,b) : |f_n(x)| \leq g(x)$ cpd en $[a,b]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \in L^1(a,b)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

- **Teorema de la convergencia monótona de Lebesgue:** Sea $\{f_n\} \subset L^1(a,b)$ verificando $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(f_n(x) \leq f_{n+1}(x)\ cpd)$ con $\{\int_a^b f_n(x)dx\}$ acotada superiormente. Entonces $\exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\ cpd,\ f \in L^1(a,b)$ y

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

Teorema de Riesz-Fischer

El espacio $L^2(a,b)$ es un espacio normado completo con la norma usual $\|f\|^2 = \int_a^b f(x)^2 dx \; \forall f \in L^2(a,b)$

Corolario

Si $\{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b) \Rightarrow \exists \{f_{\sigma(n)}\}$ sucesión parcial de $\{f_n\}$ que converge cpd en $[a,b]$ a f

Definición

Sea V un espacio vectorial real dotado de un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \, x \, V \to \mathbb{R}$. Sea $\| \cdot \|$ la norma asociada al producto escalar, $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} \; \forall v \in V$. Decimos que V es un espacio de Hilbert si $(V, \| \cdot \|)$ es un espacio normado completo.

Nota: $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable (existe un subconjunto numerable denso) de dimensión infinita.

Bases hilbertianas

Definición

Sea $\mathbb{B} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a, b)$. Decimos que $\mathbb{B}$ es una base hilbertiana de $L^2(a, b)$ cuando

$$\forall f \in L^2(a, b), \ f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$$

Nota: Sea $\mathcal{L}(\mathbb{B})$ el conjunto de combinaciones lineales finitas de elementos de $\mathbb{B}$. Entonces $\mathcal{L}(\mathbb{B}) \subsetneq L^2(a, b)$

Proposición

La función $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \, x \, V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua como función de dos variables. En particular, dada $g \in L^2(a, b)$, la función $\langle \cdot, g \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Proposición

Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$ y $\{\lambda_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de números reales tales que $\sum_{n\geq 1} \lambda_n f_n$ es convergente en $L^2(a,b)$. Entonces

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n \;\Rightarrow\; \lambda_n = \langle f, f_n \rangle \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Proposición

En las condiciones anteriores

$$\sum_{n\geq 1} \lambda_n f_n \textit{ converge} \;\Leftrightarrow\; \sum_{n\geq 1} \lambda_n^2 \textit{ converge}$$

Teorema: Caracterización de base hilbertiana

Sea $\mathbb{B} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a, b)$. Son equivalentes

i) $\mathbb{B}$ es base hilbertiana de $L^2(a, b)$

ii) $\forall f \in L^2(a, b)$ se cumple la identidad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle^2$$

iii) $\mathbb{B}^\perp = \{f \in L^2(a, b) : \langle f, f_n \rangle = 0 \, \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$

Proposición

$\nexists \mathcal{A} \subset L^2(a, b)$, $\mathcal{A}$ *ortogonal* $: \forall f \in L^2(a, b)$, f es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{A}$

Proposición

Si $\mathbb{B}$ es base hilbertiana de $L^2(a, b)$, vista como sucesión, no admite sucesiones parciales convergentes.

Proposición

Si $\mathbb{B} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base hilbertiana de $L^2(a, b)$, entonces

$$\forall f, g \in L^2(a, b),\ \langle f, g\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle \langle g, f_n\rangle$$

Proposición

Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es base hilbertiana de $L^2(a, b)$ y $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \{f_n : n \in \mathbb{N}\backslash\{n_0\}\}$ no es una base hilbertiana de $L^2(a, b)$

Nota: A partir de una base hilbertiana $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(a, b)$ pueden construirse otras infinitas bases hilbertianas, como por ejemplo
$\{\frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 + f_2), \frac{1}{\sqrt{2}}(f_1 - f_2), f_3, \ldots\}$

Series de Fourier

Base de Lebesgue y desarrollo de Fourier

Teorema de Lebesgue

El conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n\cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n\cdot);\ n \in \mathbb{N}\right\}$ es una b.h. de $L^2(-\pi, \pi)$

Corolario

El conjunto $\{1, cos(n\cdot), sen(n\cdot);\ n \in \mathbb{N}\}$ es una b.h. ortogonal de $L^2(-\pi, \pi)$

Desarrollo en serie de Fourier

Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$, llamamos desarrollo en serie de Fourier a la expresión de f en la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$, es decir

$$SF(f) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n\cdot) + B_n sen(n\cdot))$$

$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx\ \forall n \in \mathbb{N}$.
A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de f.

Particularización de resultados

Proposición: Identidad de Parseval para bases ortogonales

Si $\{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base **ortogonal** de $L^2(a,b)$ entonces

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, f_n\rangle^2}{\langle f_n, f_n\rangle} \; \forall f \in L^2(a,b)$$

Corolario

Si $f \in L^2(-\pi,\pi)$ entonces

$$\|f\|^2 = \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)\right)$$

donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier de f. En consecuencia la serie $\sum_{n\geq 1}(A_n^2 + B_n^2)$ es convergente.

Nota: Si $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ son dos sucesiones de números reales tales que $\sum_{n\geq 1}(A_n^2 + B_n^2)$ converge entonces ,fijada una base hilbertiana, son los coeficientes de Fourier de una función de $L^2(-\pi,\pi)$.

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n},\ cos(x) + \frac{sin(x)}{2} + \frac{cos(2x)}{3} + \frac{sen(2x)}{4} + \cdots$$

son funciones de $L^2(-\pi,\pi)$

Criterio de Abel: Sea $\{b_n\} \subset \mathbb{R}^+$ monótona decreciente con $\{b_n\} \to 0$, y sea $\{a_n\}$ de forma que $\exists\, M > 0 :\ |\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq M\, \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ converge.

Nota: La serie de Fourier tiene sentido para funciones de $L^1(-\pi,\pi)$, ya que $|f(x)cos(nx)|, |f(x)sen(nx)| \leq |f(x)|$, que es una función integrable, pero algunos resultados como la identidad de Parseval serían falsos. Además, existen funciones de $L^1(-\pi,\pi)\backslash L^2(-\pi,\pi)$ cuyas series de Fourier no convergen en ningún punto.

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Lema de Riemann-Lebesgue

Sea $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx = 0$$

Criterio de Dini para convergencia puntual

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periódica de forma que $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exists\, \delta > 0$ verificando que la función $g :]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(\tau) = \dfrac{f(x_0 + \tau) - f(x_0)}{\tau}$ cumple $g \in L^1(-\delta, \delta)$. Entonces

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k cos(kx_0) + B_k sen(kx_0)) \right)$$

donde A_k y B_k son los coeficientes de Fourier.

Nota: La existencia de δ está garantizada si g es acotada en algún intervalo de la forma $]-\varepsilon,\varepsilon[$ con $\varepsilon > 0$. Una condición suficiente para esto es que existan las derivadas laterales de f en x_0 (aunque no coincidan).

Nota: El criterio de Dini establece una condición suficiente para la convergencia puntual que no es necesaria. Basta considerar

$$f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ definida mediante}$$
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x = \pi \\ 1 & \text{si } 0 < x < \pi \end{cases}$$

Definición

Decimos que $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es absolutamente continua cuando $\exists\, g \in L^1(a, b) :\ f(x) = f(a) + \int_a^x g(s)ds,\ \forall x \in [a, b]$

Nota: Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\exists\, f'(x)$ cpd y $f' \in L^1(a, b) \not\Rightarrow f$ absolutamente continua. Como ejemplo tenemos $sgn : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$

Definición

Decimos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 a trozos, y lo denotamos $f \in C^1_{tr}[a, b]$, si f' existe y es continua salvo quizá en una cantidad finita de puntos.

Nota: Si $f \in C^1_{tr}[a, b] \Rightarrow f' \in L^2[a, b]$

Nota: En lo sucesivo, la hipótesis $f \in C^1_{tr}[-\pi, \pi]$ puede debilitarse por f absolutamente continua con $f' \in L^2(-\pi, \pi)$

Teorema: Derivación de la serie de Fourier

Sea $f \in C^1_{tr}[-\pi, \pi]$ tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces si

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (A_n cos(n\cdot) + B_n sen(n\cdot))$$

es la serie de Fourier de f, entonces la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n \geq 1} (nB_n cos(n\cdot) - nA_n sen(n\cdot))$$

Lema

Si $f \in L^2[-\pi, \pi]$, entonces la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{B_n}{n}$$

es convergente, donde (A_n) y B_n son los coeficientes de Fourier de f

Teorema: Integración de la serie de Fourier

Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n \geq 1} (A_n Cos(n\cdot) + B_n Sen(n\cdot))$$

su serie de Fourier. Entonces si $a \in [-\pi, \pi]$ es un punto dado,

$$\int_a^x f(t)dt = \frac{A_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \int_a^x Cos(nt)dt + B_n \int_a^x Sen(nt)dt)$$

siendo la convergencia de esta última serie uniforme en $[-\pi, \pi]$

Corolario

$$\int_0^x f(t)dt - \frac{A_0 x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{n} Sen(nx) - \frac{B_n}{n} Cos(nx) \right)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$

Teorema: Convergencia uniforme de la serie de Fourier

Sea $f \in C^1_{tr}[-\pi, \pi]$ con $f(-\pi) = f(\pi)$, entonces la serie de Fourier asociada a f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$

Teorema: Versión general del tª de convergencia uniforme

Sea $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k[-\pi, \pi]$, $f^{(k)} \in C^1_{tr}[-\pi, \pi]$ y $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi) = f'(\pi)$, $\cdots, f^{k)}(-\pi) = f^{k)}(\pi)$. Entonces la serie de Fourier de $f^{j)}$ converge uniformemente a $f^{j)}$ en $[-\pi, \pi]$ $\forall j \in \{1, \ldots, k\}$

Proposición: Caso inverso

Sea $f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in L^2(-\pi, \pi)$ tal que $\sum_{n \geq 1} n^p(|A_n| + |B_n|)$ es convergente para algún $p \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow \ f \in C^p[-\pi, \pi]$

Nota: Si tenemos convergencia uniforme en $[-\pi, \pi]$, entonces tenemos convergencia uniforme en $\mathbb{R}$ a una extensión 2π-periódica de f

Otras bases hilbertianas de $L^2(a,b)$

Teorema: Base de senos

El conjunto $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}Sen(n\cdot)\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ es una base hilbertiana de $L^2(0,\pi)$

Teorema: Convergencia uniforme en la base de senos

Sea $f\in C^1_{tr}[0,\pi]$ (o bien f absolutamente continua con $f'\in L^2(0,\pi)$) verificando $f(0)=f(\pi)=0$. Entonces la serie de Fourier de f respecto de la base de senos converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Teorema: Base de cosenos

El conjunto $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}Cos(n\cdot)\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$ es una base hilbertiana de $L^2(0,\pi)$

Teorema: Convergencia uniforme en la base de cosenos

Sea $f \in C^1_{tr}[0,\pi]$ (o bien f absolutamente continua con $f' \in L^2(0,\pi)$). Entonces la serie de Fourier de f respecto de la base de cosenos converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Nota: Podemos obtener una base ortogonal de cualquier espacio $L^2(a,b)$ aplicando una composición de traslación y homotecia a cualquiera de las bases conocidas de $L^2(-\pi,\pi)$ o $L^2(0,\pi)$. Ejemplo: Base de senos en $L^2(a,b)$.

$$\phi : [0,\pi] \longrightarrow [a,b] \text{ (difeomorfismo)}$$
$$\phi(x) = \frac{b-a}{\pi}x + a$$

Así $\left\{ Sen(n\dfrac{\pi(\star - a)}{b-a}) \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$ es base ortogonal de $L^2(a,b)$

Algunas aplicaciones de las series de Fourier: Resolución del problema isoperimétrico en el plano y problemas de tipo mixto para la ecuación del calor

Planteamiento: Problema isoperimétrico

De entre todas las curvas planas, cerradas y simples de longitud dada, encontrar aquella que encierra un mayor área.

Resolución (1): Desigualdad isoperimétrica

Si tenemos una curva plana, cerrada y simple de longitud dada $L > 0$ y denotamos por S al área que encierra en su dominio interior, entonces

$$S \leq \frac{L^2}{4\pi}$$

dándose la igualdad solo en el caso en que dicha curva es una circunferencia.

Planteamiento: Ecuación del calor

Sea $\mathcal{U}(x,t)$ la función que representa la temperatura en el punto $x \in [0,\pi]$ en el instante $t \in [0, T]$ con $T > 0$ dado. La formulación analítica del problema es:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{U}(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \mathcal{U}(x,t)}{\partial x^2} & t \in]0, T] \;\; x \in [0,\pi] \\ \mathcal{U}(x,0) = f(x) & x \in [0,\pi] \\ \mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(\pi,t) = 0 & t \in [0, T] \end{cases}$$

para $f : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada.

Definición de solución

Llamando $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq \pi \; 0 < t \leq T\}$, una solución de la ecuación del calor es una función $\Phi \in C(\overline{\Omega}) \cap C_t^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega)$, donde:

- $C_t^1(\Omega) \equiv$ ser de clase C^1 respecto de t
- $C_x^2(\Omega) \equiv$ ser de clase C^2 respecto de x

Nota: Para que exista una solución a la ecuación del calor, f debe ser continua en $[0, \pi]$ con $f(0) = f(\pi) = 0$

Nota: La unicidad de la solución está garantizada por el *Principio del máximo-mínimo*.

Resolución (1): Lema

Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \mathcal{X}'' - \lambda\mathcal{X} = 0 & \mathcal{X} \in C^2[0, \pi] \\ \mathcal{T}' - \lambda\mathcal{T} = 0 & \mathcal{T} \in C^1[0, T] \end{cases}$$

Entonces $\mathcal{U}(x, t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$ es solución de $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{xx}$

Resolución (2): Lema

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mathcal{X}(x)$ y $\mathcal{T}(t)$ soluciones de

$$\begin{cases} \mathcal{X}'' - \lambda\mathcal{X} = 0, \ \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}(\pi) = 0 \\ \mathcal{T}' - \lambda\mathcal{T} = 0 \end{cases}$$

entonces $\mathcal{U}(x,t) = \mathcal{X}(x)\mathcal{T}(t)$ es solución de $\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{xx}$ que verifica $\mathcal{U}(0,t) = \mathcal{U}(\pi,t) = 0 \ \ t \in [0,T]$.

Además $\mathcal{X}'' - \lambda\mathcal{X} = 0, \ \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}(\pi) = 0$ tiene solución no trivial si, y solamente si, $\lambda \in \{-n^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$. En este caso el espacio de soluciones en un espacio vectorial real de dimensión 1 generado por $x \longrightarrow Sen(nx)$

Resolución (3): Lema

Si $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k sen(kx)$ $\forall x \in [0, \pi]$ con $\mu_k \in \mathbb{R}$ $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$ entonces la única solución de la ecuación del calor es

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e^{-k^2 t} sen(kx) \qquad \forall (x,t) \in \Omega$$

Teorema: Solución de la ecuación del calor

Si $f \in C^1_{tr}[0, \pi]$ con $f(0) = f(\pi) = 0$ entonces la única solución de la ecuación del calor es

$$\mathcal{U}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e^{-k^2 t} sen(kx) \qquad \forall (x,t) \in \Omega$$

con

$$\mu_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(kx) dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$