ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 12/07/2017. Primera parte

1. Consideremos la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ -1 \leq x \leq \frac{-1}{n}, \ \ \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ \\ \sqrt{n}, \ \ x \neq 0, \ \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ \\ 0, \ \ x = 0. \end{cases}$$

   (a) (1 punto) Demuéstrese que $f_n(x) \to 0, \ \forall \ x \in [-1,1]$, y que sin embargo $\{f_n\}$ no converge a cero en $L^2(-1,1)$.

   (b) (1 punto) Enúnciese el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue. ¿Por qué no se puede aplicar dicho teorema en este caso?

2. (1 punto) Escribe el desarrollo de Fourier de una función $f \in L^2(-\pi,\pi)$ respecto de la base trigonométrica, incluyendo la fórmula de los coeficientes y la igualdad de Parseval.

3. (1,5 puntos) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es $2\pi-$periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$ y $x \in \mathrm{R}$ es dado, el criterio de Dini impone una restricción adicional, para tener convergencia puntual en el punto x, de la serie de Fourier de f a $f(x)$. Escribe tal restricción adicional, y proporciona dos ejemplos, uno que satisfaga dicha restricción y otro que no.

4. (1,5 puntos) Respecto de la base trigonométrica de $L^2(-\pi,\pi)$, enuncia un criterio de convergencia uniforme de la serie de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y proporciona un ejemplo de función que satisfaga dicho criterio y que no sea un polinomio trigonométrico.

ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 12/07/2017. Segunda parte

5. (2 puntos) Transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Defínela y enuncia sus principales propiedades algebraicas y analíticas.

6. (2 puntos) Utilizando Transformadas de Fourier, calcula la integral:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(bx)}{x^2 + a^2}\, dx \text{ , donde } a, b \in \mathbb{R},\ a > 0.$$