ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen final, 30/01/2017

PRIMERA PARTE:

1. **(1 punto)** Concepto de base hilbertiana ortonormal del espacio $L^2(a,b)$ y de base algebraica del espacio $L^2(a,b)$. Justifica brevemente la relación que hay entre ambos conceptos.

2. **(1 punto)** Usando el hecho de que el conjunto

$$\{1, \cos(n(\cdot)), \operatorname{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$$

es una base hilbertiana ortogonal de $L^2(-\pi,\pi)$, pruébese que el conjunto $B = \{\operatorname{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

3. **(1 punto)** Escríbase el desarrollo en serie de Fourier de $f \in L^2(0,\pi)$ respecto de la base B anterior y la igualdad de Parseval.

4. **(1 punto)** Concrétese el resultado anterior para la función $f(x) = 1 - \cos x$.

5. **(1 punto)** ¿Hay convergencia puntual de la serie de Fourier de f, respecto de la base B, a f, en todo el intervalo $[0,\pi]$?

ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, examen final, 30/01/2017

EXAMEN PARA OPTAR A MATRÍCULA DE HONOR:

1. **(4 puntos)** Usando el hecho de que el conjunto $\{\cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\}$ es base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$, pruébese que el conjunto $\{\cos(\frac{2n-1}{2}(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es también base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

2. **(1 punto)** Enúnciese un criterio de convergencia uniforme respecto de la base anterior.

3. Consideremos la Clase de Schwartz:

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \ : \ x \mapsto x^m f^{(n)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}),\ \forall m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

   a) **(2 puntos)** Probar que $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Dada $f \in \mathcal{S}$ y $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, probar que la función $\varphi_{m,n}(x) = x^m f^{(n)}(x)$ verifica $\varphi_{m,n} \in \mathcal{S}$.

   b) **(2 puntos)** Expresar $\widehat{\varphi_{m,n}}$ en términos de $\widehat{f}$ y de m y n.

   c) **(1 punto)** Concluir que la transformada de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}$ en sí mismo.

ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, examen final, 30/01/2017

SEGUNDA PARTE:

1. (**1 punto**) Tema a desarrollar brevemente:

   Las sumas de Fejér. Definición y sus implicaciones sobre la convergencia uniforme y sobre el fenómeno de Gibbs.

2. **(2 puntos)** Usando el método de separación de variables, encuentra una solución para el problema del calor:

$$
(P)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,+\infty[, \\[2ex] u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & \forall t \in \,]0,+\infty[, \\[2ex] u(x,0) = 1 - \cos 2x, & \forall x \in]0,\pi[. \end{cases}
$$

3. (**2 puntos**). Usando Transformadas de Fourier, calcular:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{e^{5x^2}}\, dx.$$