ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen para matrícula de honor. 5/02/2016

1. (2.5 puntos) Usando el hecho de que el conjunto $\{\text{sen}n(\cdot),\ n \in \mathbf{N}\}$ es base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$, pruébese que el conjunto $\left\{\text{sen}(\frac{2n-1}{2})(\cdot),\ n \in \mathbf{N}\right\}$ es también base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

2. (2.5 puntos) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Demuéstrese rigurosamente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ sen}\left(\frac{2n-1}{2}x\right) e^{-(\frac{2n-1}{2})^2 t} = u(x,t) \tag{1}$$

es convergente para $t > 0$ y que la función u definida en (1) es $C^\infty(\Omega)$ donde $\Omega = \{(x,t) \in \mathbf{R^2} : \mathbf{t} > \mathbf{0}\}$.

3. (2.5 puntos) Si, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|$ es convergente, demuéstrese que la función u definida en (1) es de clase C^1 respecto de t y de clase C^2 respecto de x en $\overline{\Omega}$.

4. (2.5 puntos) Bajo las hipótesis del apartado anterior, para cada $T > 0$ dado escríbase con precisión, el problema de tipo mixto que verifica la función u en $[0,\pi] \times [0,T]$, incluyendo la ecuación en derivadas parciales correspondiente, las condiciones de contorno y las condiciones en el tiempo inicial $t = 0$.