ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen final (primera parte), 5/02/2016

1. (0.5 puntos) Breve descripción de los problemas que motivaron el nacimiento de los métodos de Fourier (máximo 20 líneas).

2. (a) (0.5 puntos) Escribe la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$, así como el desarrollo de Fourier y la igualdad de Parseval para una función dada.

   (b) (1 punto) Enuncia un criterio de convergencia uniforme de la serie de Fourier respecto de la base mencionada en el apartado anterior, y da un ejemplo de alguna función que cumpla dicho criterio en toda la recta real y que no sea un polinomio trigonométrico. Justifica brevemente la respuesta.

3. (1 punto) Enúnciese el criterio de Dini, sobre convergencia puntual de series de Fourier respecto de la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$. Proporciona un ejemplo de una función, que no sea un polinomio trigonométrico y que no sea la del apartado anterior, que satisfaga dicho criterio en cualquier punto real, justificando brevemente la respuesta.

4. (1 punto) ¿Es posible el desarrollo de Fourier de la función $f(x) = \cos x$ respecto de la base de $L^2(0, \pi)$ dada por $\left\{(2/\pi)^{1/2}\mathrm{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\right\}$? Si la respuesta es negativa, justifíquese brevemente. Si es afirmativa, calcúlese razonadamente el desarrollo de Fourier correspondiente, así como la igualdad de Parseval.

5. (1 punto) Enúnciese un criterio de convergencia tipo Dini para la base del apartado anterior. Demuéstrese rigurosamente dicho criterio, usando si es necesario, el criterio de Dini para la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$.