ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 03/09/2016.

1. (0.5 puntos) Concepto de base hilbertiana del espacio $L^2(a,b)$.

2. (1.5 puntos) Escribe el desarrollo de Fourier de una función $f \in L^2(-\pi,\pi)$ respecto de la base trigonométrica. Enuncia (sin demostración) un criterio de convergencia uniforme de la serie de Fourier en el intervalo $[-\pi,\pi]$ y da un ejemplo de alguna función, que no sea un polinomio trigonométrico, que cumpla dicho criterio.

3. (2 puntos) Usando el hecho de que el conjunto $\{1, \cos(n(\cdot)), \operatorname{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(-\pi,\pi)$, pruébese que el conjunto $B = \{1, \cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

4. (2 puntos) Pruébese que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1-4n^2}, \ \forall\, x \in [0,\pi],$$

uniformemente en $[0,\pi]$.

5. (4 puntos)

   (a) (1.5 puntos) Define la Transformada de Fourier en $L^1(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Enuncia las principales propiedades algebraicas y analíticas.

   (b) (1.5 puntos) Aplicando dichas propiedades, y conocida la transformada de la función $f(x) = e^{-2\pi|x|}$, calcula la transformada de $g(x) = xe^{-|x|}$.

   (c) (1 punto) Como consecuencia, calcula el valor de:

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x} \operatorname{sen}(3x)\, dx.$$