ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen parcial, 8/11/2016

1. Razónese la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

   (a) Si $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ es continua, salvo en un número finito de puntos, entonces $f \in L^2(a, b)$.

   (b) Si $f \in L^2(a, b)$, entonces f es acotada en $[a, b]$.

   (c) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones que converge a f en $L^2(a, b)$, entonces $\{f_n(x)\}$ converge a $f(x)$, c.p.d. en (a, b).

   (d) Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones de $L^2(a, b)$ tal que $\{f_n(x)\}$ converge a una función $f(x)$, c.p.d. en (a, b), entonces $\{f_n\}$ converge a f en $L^2(a, b)$.

2. (a) Enúnciese el Criterio de Dini, sobre convergencia puntual de series de Fourier, respecto de la base trigonométrica en $L^2(-\pi, \pi)$.

   (b) Muéstrese un ejemplo de función continua, 2π-periódica, que no sea un polinomio trigonométrico y que satisfaga el criterio de Dini en todo punto de $\mathbf{R}$ (hágase un breve razonamiento para comprobar las hipótesis del criterio de Dini)

   (c) Sea $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ derivable y $\hat{f}$ la extensión par y $2\pi-$periódica a $\mathbf{R}$. Demuéstrese que $\hat{f}$ satisface el criterio de Dini (respecto de la base trigonométrica) en todo punto de $\mathbf{R}$.

   (d) Usando el hecho de que $B = \{1, \cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(0, \pi)$, pruébese que si $f : [0, \pi] \to \mathbf{R}$ es derivable entonces la serie de Fourier de f, respecto de la base B, converge puntualmente a $f(x)$ en todo punto $x \in [0, \pi]$ *(úsese el apartado anterior).*