ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen final, 05/02/2014.

1. (1 punto) Si (a,b) es un intervalo acotado, defínase con precisión $L^1(a,b)$ y $L^2(a,b)$. Demuéstrese que $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ de manera estricta.

2. (2 puntos) Consideremos la sucesión de funciones definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, \ -1 \leq x \leq \frac{-1}{n}, \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \\ \\ \sqrt{n}, \quad x \neq 0, \ \frac{-1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

   Demuéstrese que $f_n(x) \to 0, \ \forall \ x \in [-1,1]$, y que sin embargo $\{f_n\}$ no converge a cero en $L^2(-1,1)$. ¿Por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue en este caso?

3. (a) (1.5 puntos) Usando el hecho de que el conjunto $\{1, \cos(n(\cdot)), \mathrm{sen}(n(\cdot)), \ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(-\pi,\pi)$, pruébese que el conjunto $B = \{\mathrm{sen}(n(\cdot)), \ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

   (b) (1 punto) Escríbase el desarrollo en serie de Fourier de $f \in L^2(0,\pi)$ respecto de la base B anterior y la igualdad de Parseval.

   (c) (1 punto) Concrétese el resultado anterior para la función $f(x) = \cos x$. ¿Hay convergencia uniforme en este caso?

4. (2 puntos) Si $f \in L^1(\mathrm{R}, \mathbf{C})$, defínase su transformada de Fourier $\hat{f}$. Pruébese que $\hat{f} : \mathrm{R} \to \mathbf{C}$ es uniformemente continua.

5. (1.5 puntos) Si $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ se define como

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ x \geq 5, \\ \\ e^{3x}, \ x < 5, \end{cases}$$

   demuéstrese que $f \in L^1(\mathrm{R}, \mathbf{C}))$ y calcúlese su transformada de Fourier.