ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen parcial, 18/11/2014

1. Considérese el espacio de Hilbert $L^2(a,b)$ con el producto escalar

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\; dx,\ \forall\ f, g \in L^2(a,b)$$

   (a) Pruébese la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

   $$|\langle f, g\rangle| \leq \langle f, f\rangle^{1/2}\langle g, g\rangle^{1/2},\ \forall\ f, g\ \in L^2(a,b)$$

   ¿Qué condición han de cumplir f y g para que la desigualdad anterior sea una igualdad?

   (Sug.: el polinomio de segundo grado $p(\lambda) = \langle f + \lambda g, f + \lambda g\rangle \geq 0,\ \forall\ \lambda \in \mathrm{R}$)

   (b) Si $B = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$, ¿qué significa que B sea base hilbertiana de $L^2(a,b)$? (enúnciense todas las equivalencias que se recuerden).

   (c) ¿Una base hilbertiana ortonormal de $L^2(a,b)$, es base algebraica de $L^2(a,b)$?

2. (a) Usando el hecho de que $B = \{\mathrm{sen} n(\cdot),\ n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,\pi)$, pruébese que si $b \in \mathrm{R}^+$, entonces $C = \left\{\mathrm{sen}\frac{n\pi(\cdot)}{b},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ es una base hilbertiana ortogonal de $L^2(0,b)$.

   (b) Escríbase una propuesta para la única solución del problema

   $$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ 0 < x < b,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(b,t) = 0,\ 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq b \end{array} \qquad (1)$$

   (c) Dar condiciones suficientes sobre f que permitan afirmar que la fórmula anteriormente propuesta es la única solución de (1).