ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen parcial, 17/01/2014.

1. Breve descripción del problema o problemas que motivaron el nacimiento de la transformada de Fourier (máximo 20 líneas).

2. (puntos) ¿Qué significa $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$?

3. (puntos) Dar algún ejemplo no trivial (función no idénticamente cero) de función f tal que $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y otro ejemplo de función f tal que $f \notin L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ (con una breve justificación).

4. Definición de transformada de Fourier, $\hat{f}$, de una función $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Pruébese que $\hat{f}$ es siempre acotada

5. Si $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y $g \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, pruébese que $f\hat{g} \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, que $\hat{f}g \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y que
$$\int_{\mathbf{R}} f(x)\hat{g}(x)\ dx = \int_{\mathbf{R}} g(x)\hat{f}(x)\ dx.$$

6. Para funciones f tales que $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, escríbase la fórmula de inversión de la transformada de Fourier.

7. A partir de la fórmula anterior, que proporciona una igualdad c.p.d., demuéstrese que se da la igualdad en todos los puntos de continuidad de f.

8. Usando la fórmula de inversión de la transformada de Fourier, pruébese que si $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y $g \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ son funciones tales que $\hat{f} = \hat{g}$, entonces $f = g$ c.p.d.

9. Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ está definida como $f(x) = e^{-a|x|+2} + ig(x)$, donde $a > 0$ y g es la función característica del intervalo $[-a, a]$, pruébese que $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y calcúlese su transformada de Fourier $\hat{f}$. ¿Pertenece $\hat{f}$ a $L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ en este caso. Justifíquese la respuesta.