ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen parcial, 18/11/2015

1. (3 puntos) **Criterio de Dini sobre convergencia puntual de series de Fourier**

2. (a) (2.5 puntos) Usando el hecho de que el conjunto $\{1, \cos(n(\cdot)), \mathrm{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(-\pi, \pi)$, pruébese que el conjunto $B = \{1, \cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbf{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(0, \pi)$.

   (b) (2.5 puntos) Escríbase el desarrollo en serie de Fourier de $f \in L^2(0, \pi)$ respecto de la base anterior B y la igualdad de Parseval, razonando ambas respuestas.

   (c) (2 puntos) Enúnciese y pruébese un criterio de convegencia uniforme respecto de la base B anterior y usando dicho criterio pruébese que

$$\mathrm{sen}\, x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{1 - 4n^2}$$

   uniformemente en $[0, \pi]$.