ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, examen final, 04/02/2015

PRIMERA PARTE

Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C1$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

1. Demuéstrese que si se aplica el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$, entonces se obtienen los dos problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in\ [0,\pi];\ X(0) = X'(\pi) = 0 \tag{1}$$

$$T'(t) + \lambda T(t) = 0,\ t \in\ [0,T] \tag{2}$$

2. Obténganse los valores propios y funciones propias de (1).

3. Usando los apartados anteriores, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C1). ¿Qué condiciones suficientes sobre la función f garantizan que la fórmula propuesta es la única solución de $(C1)$?