ANÁLISIS DE FOURIER, GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 01/09/2014.

1. (a) Sea $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Pruébese que si $f \in L^2(a,b)$ es tal que $f = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$, para alguna sucesión $\{\lambda_n\}$ de números reales, entonces $\lambda_n =< f, f_n >,\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ y $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f, f_n >|^2$.

   (b) Si $A = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$ tal que $\forall\ f \in L^2(a,b)$, se tiene $f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$, diremos que A es base hilbertiana de $L^2(a,b)$. Pruébese que si A es base hilbertiana de $L^2(a,b)$, entonces cualquier subconjunto propio B de A (es decir $B \subset A,\ B \neq A$) no es base hilbertiana de $L^2(a,b)$.

2. (a) Consideremos el problema

$$u_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T,\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 \le t \le T \qquad (1)$$

   ¿Para qué valores de $\lambda \in \mathbf{R}$ es la función $u_\lambda(x,t) = e^{-\lambda^2 t}\text{sen}(\lambda x)$ solución de (1)?

   (b) Si ahora consideramos el problema

$$\begin{array}{c} u_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = f(x) \end{array} \qquad (2)$$

   y f es una combinación lineal finita de funciones del conjunto

$$\{\text{sen} n(\cdot),\quad n \in \mathbb{N}\}$$

   ¿cuál es la única solución de (2)?

   (c) Si

$$f(x) = \begin{cases} x,\ 0 \le x \le 1/2, \\ \dfrac{1}{2(\frac{1}{2} - \pi)}(x - \pi),\ 1/2 \le x \le \pi, \end{cases}$$

   pruébese que la función f no es una combinación lineal finita de funciones del conjunto $\{\text{sen} n(\cdot),\quad n \in \mathbb{N}\}$.

   (d) Para la función dada en el apartado anterior, calcúlese razonadamente la única solución de (2).

3. (a) Para funciones f tales que $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y su transformada de fourier $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, escríbase la fórmula de inversión. A partir de dicha fórmula, que proporciona una igualdad c.p.d., demuéstrese rigurosamente que se da la igualdad en todos los puntos de continuidad de f.

   (b) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ está definida como $f(x) = e^{-2|x|+2}$, pruébese que $f \in L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ y calcúlese su transformada de Fourier $\hat{f}$. ¿Pertenece $\hat{f}$ a $L^1(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ en este caso? Razónese la respuesta.