En este capítulo vamos a obtener la mayoría de los resultados para funciones del espacio $L^2(-\pi,\pi)$. Esto se hace simplemente por comodidad de notación y por simplicidad de las expresiones que van a aparecer. De hecho, la extensión de los resultados a funciones del espacio general $L^2(a,b)$ será obvia.

En el ejercicio 18, capítulo I, se ha demostrado que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n(\cdot)),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n(\cdot)),\ n\in\mathbb{N}\right\} \tag{0.1}$$

es una base de $L^2(-\pi,\pi)$. Esto significa que para cualquier función $f\in L^2(-\pi,\pi)$ se tiene que

$$f = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n(\cdot)) + b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n(\cdot))\right) \tag{0.2}$$

donde

$$\begin{gathered} a_0 =< f,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx \\ a_n =< f,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ cos(nx)\ dx\ ,\ \forall n\in\mathbb{N} \\ b_n =< f,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n\in\mathbb{N} \end{gathered} \tag{0.3}$$

Sustituyendo las expresiones (0.3) en (0.2), tenemos que

$$f = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx\right)cos(n(\cdot)) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx\right)sen(n(\cdot))\right]$$

Antonio Cañada Villar, 1994

La serie anterior suele escribirse en la forma:

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \tag{0.4}$$

donde

$$\begin{aligned} &\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ &\text{y} \\ &\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{0.5}$$

Definición 1.

Dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, a la serie

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

con A_n y B_n definidos por (0.5) le llamaremos serie de Fourier de f respecto del sistema ortonormal (0.1). Al conjunto

$$\left\{ \frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

se le llama conjunto de coeficientes de Fourier de f respecto de (0.1). En la expresión (0.4), la convergencia de la serie de la parte derecha de la igualdad ha de entenderse en $L^2(-\pi, \pi)$; es decir, si $\{\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de tal serie, o sea

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))$$

entonces

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{S}_n(x)|^2\ dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - \frac{A_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (A_k cos(kx) + B_k sen(kx)) \right|^2 dx = 0 \tag{0.6}$$

Se cumple también la igualdad de Parseval:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ , \ \forall f \in L^2(-\pi, \pi)$$

Como $A_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} a_0, \ A_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a_n, \ B_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} b_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$, tenemos que

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx =$$

$$= \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^2 + B_n^2 \right) \right) \ , \ \forall f \in L^2(-\pi, \pi) \tag{0.7}$$

Hagamos algún ejercicio para familiarizarnos con lo dicho.

EJERCICIO 1.

Calcúlese la serie de Fourier de la función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|, \ \forall x \in [-\pi, \pi]$. Aplicar la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

Solución:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \, dx = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \, dx = \pi$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| cos(nx) \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x cos(nx) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(x \frac{sen(nx)}{n} \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{sen(nx)}{n} \, dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\int_0^{\pi} sen(nx)\ dx\right] = \frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}[cos(n\pi) - cos(0)].$$

Así pués,

$$\mathrm{A}_n = \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

$\mathrm{B}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| sen(nx)\ dx = 0$, puesto que la función $|x| sen(nx)$ es una función impar en $[-\pi, \pi]$.

Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1, n\ impar}^{\infty} \frac{-4}{\pi n^2} cos(n(\cdot)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} cos(2n-1)(\cdot)$$

La igualdad de Parseval quedaría en este caso como

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\ dx = \pi\left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}\right)$$

Por tanto,

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \pi\left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}\right)$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^3}{16}\pi = \frac{\pi^4}{96}$$

Nota.

Antonio Cañada Villar, 1994

Obsérvese que, puesto que $\left|\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}cos(nx)\right| \leq \frac{4}{\pi(2n-1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in [-\pi, \pi]$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ es convergente, la serie de Fourier de f es ahora uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$. Sabemos por otra parte que la serie de Fourier de f converge, con la norma de $L^2(-\pi, \pi)$ a f. ¿Se podrá afirmar en este caso que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$? (*los lectores que tengan frescos los conocimientos del capítulo anterior tienen la respuesta. Los lectores que no estén en el conjunto anterior y sean impacientes pueden mirar el ejercicio 14*).

EJERCICIO 2.

Sean $c_1,\ c_2\ \in \mathbb{R}$ *con* $c_1 \neq c_2$ *y* $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in [-\pi, 0) \\ c_2, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Calcúlese la serie de Fourier de f, y obténgase la igualdad de Parseval en este caso. Muéstrese que la serie de Fourier de f no converge puntualmente en $x = 0$ a $f(0)$.

Solución:

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}c_1\pi + \frac{1}{\pi}c_2\pi = c_1 + c_2$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)cos(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} c_1cos(nx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} c_2cos(nx)\ dx =$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left. \frac{sen(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi} \left. \frac{sen(nx)}{n} \right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) sen(nx)\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} c_1 sen(nx)\ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} c_2 sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left. \frac{cos(nx)}{-n} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi} \left. \frac{cos(nx)}{-n} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-c_1}{\pi n}(1 - cos(n(-\pi))) + \frac{-c_2}{n\pi}(cos(n\pi) - 1)$$

.

Luego

$$\mathrm{B}_n = \begin{cases} 0, & \text{si n es par} \\ \dfrac{2}{n\pi}\ (c_2 - c_1), & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Así pues, la serie de Fourier de f es

$$\frac{c_1 + c_2}{2} + \sum_{n=1, n\ impar}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(c_2 - c_1) sen(n(\cdot)) =$$

$$= \frac{c_1 + c_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(c_2 - c_1)}{(2n-1)\pi} sen(2n-1)(\cdot).$$

La igualdad de Parseval quedaría en este caso como

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \pi \left(\frac{(c_1 + c_2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(c_2 - c_1)^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right)$$

Es decir,

$$c_1^2 + c_2^2 = \frac{(c_1 + c_2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(c_2 - c_1)^2}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

y realizando operaciones se obtendría que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Por último, la serie de Fourier, en $x = 0$, vale $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$, mientras que $f(0) = c_2$.

El siguiente ejercicio es trivial pero necesario.

EJERCICIO 3.

Pruébese que si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ es una función par ($f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$), entonces $\mathrm{B}_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$ y que si f es una función impar ($f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$), entonces $\mathrm{A}_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Solución: Si f es par, entonces la función $f(x)sen(nx)$ es impar, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathrm{B}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Si f es impar, entonces la función $f(x)cos(nx)$ es impar, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por lo tanto $\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En el próximo ejercicio se muestra que una función de $L^2(-\pi, \pi)$ viene determinada por sus coeficientes de Fourier.

EJERCICIO 4.

Sean $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tales que $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$. Demuéstrese que $f(x) = g(x)$ c.p.d. en $[-\pi, \pi] \Leftrightarrow$ Los coeficientes de Fourier de f y g

coinciden.

Solución: Si $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ *y* $f(x) = g(x)$ *c.p.d. en* $[-\pi,\pi]$, $f = g$ en $L^2(-\pi,\pi)$; luego sus coeficientes de Fourier coinciden.

Recíprocamente, si los coeficientes de Fourier de f *y* g coinciden, $f-g$ sería ortogonal a todos los elementos del conjunto (0.1) y por tanto $f-g=0$ *en* $L^2(-\pi,\pi)$; es decir, $(f-g)(x)=0$ c.p.d. en $[-\pi,\pi]$.

Sabemos que si $\left\{\dfrac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ son los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces la serie $\dfrac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)$ es convergente (véase (0.7)). Nos podemos plantear, a partir, de aquí la siguiente cuestión: dado un conjunto de números reales $\left\{\dfrac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, ¿será dicho conjunto el conjunto de los coeficientes de Fourier de alguna función f? En el siguiente ejercicio se da la respuesta cuando $f \in L^2(-\pi,\pi)$.

EJERCICIO 5.

Dado un conjunto de números reales $\left\{\frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, pruébese que dicho conjunto es el conjunto formado por los coeficientes de Fourier de alguna función f de $L^2(-\pi,\pi) \Leftrightarrow$ La serie $\dfrac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)$ es convergente.

Solución: Si $\left\{\dfrac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ son los coeficientes de Fourier de alguna función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces, por la igualdad de Parseval, $\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi\left(\dfrac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)\right)$, lo que prueba que la serie dada es convergente.

Recíprocamente, si la serie $\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n^2 + B_n^2\right)$ es convergente, la serie de funciones $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$ es convergente en $L^2(-\pi, \pi)$ (véase la nota 1, c) del ejercicio 16, cap. I) a una función f cuyos coeficientes de Fourier son los del conjunto $\left\{\frac{A_0}{2},\ A_n,\ B_n,\ n \in \mathrm{N}\right\}$.

El ejercicio que sigue será útil para probar el criterio de Dini sobre convergencia puntual de Series de Fourier (Ejercicio 7).

EJERCICIO 6. (Lema de Riemann-Lebesgue)

Demuéstrese que si $f \in L^1(-\pi, \pi)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx = 0 \qquad (0.8)$$

Solución: Si $f \in L^2(-\pi, \pi)$, entonces la igualdad de Parseval prueba que la serie $\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$ es convergente, lo que implica que $\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0$, que es (0.8).

Sea ahora $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Sabemos que $C_0(-\pi, \pi)$ (conjunto de funciones reales y continuas en $[-\pi, \pi]$ con soporte contenido en $(-\pi, \pi)$) es denso en $L^1(-\pi, \pi)$ (véase [3], [6]). Por tanto, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $S(x) \in C_0(-\pi, \pi)$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S(x)|\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) cos(nx) - S(x) cos(nx)|\ dx \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $\mathrm{S}(x) \in C_0(-\pi,\pi)$ *y* $C_0(-\pi,\pi) \subset L^2(-\pi,\pi), \mathrm{S}(x) \in L^2(-\pi,\pi)$.

Así pues

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{S}(x) cos(nx)\ dx = 0$$

y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q. si* $n \geq n_0$, entonces

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{S}(x) cos(nx)\ dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Así, para cualquier $n \geq n_0$,

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) cos(nx) - \mathrm{S}(x) cos(nx) + \mathrm{S}(x) cos(nx))\ dx \right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) cos(nx) - \mathrm{S}(x) cos(nx)|\ dx + \left| \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{S}(x) cos(nx)\ dx \right| \leq \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx = 0$. Análogamente se prueba que $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx = 0$.

Vamos a ocuparnos a continuación del problema de la **convergencia puntual** de la serie de Fourier de una función dada. Algo sabemos ya sobre el tema. En efecto, si $f \in L^2(-\pi,\pi)$ y $\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}$ es la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier, entonces $\{\mathrm{S}_n\} \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$ (véase la igualdad 0.6). Por lo tanto, existe una subsucesión $\{\mathrm{S}_{n_k}\}$ *de* $\{\mathrm{S}_n\}$ tal que

$$\mathrm{S}_{n_k}(x) \to f(x)\ c.p.d.\ en\ [-\pi,\pi]$$

(véase nota 3 del Ejercicio 8, Cap. I).

Es claro que este resultado no es satisfactorio desde el punto de vista práctico, entre otras razones porque la subsucesión $\{\mathrm{S}_{n_k}\}$ es difícil de conocer, en general.

Lo que sería útil es disponer de un criterio, fácil de aplicar en la práctica, para que $S_n(x) \to f(x)$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Esto es lo que hacemos a continuación.

EJERCICIO 7 (**Criterio de Dini** sobre convergencia puntual de Series de Fourier).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica tal que $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$. Entonces si $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función

$$\tau \to \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta, \delta)$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, pruébese que $S_n(x) \to f(x)$.

Sugerencias: Demuéstrese que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau.$$

Entonces, utilizando el hecho de que

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) sen \frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2} sen(n + \frac{1}{2})\tau, \ \forall \tau \in \mathbb{R},$$

pruébese que:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2})\tau} sen(n + \frac{1}{2})\tau \ d\tau$$

y utilícese el lema de Riemann-Lebesgue con la función $\dfrac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2})\tau}$.

Solución: Sea $\dfrac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k cos(k(\cdot)) + B_k sen(k(\cdot)))$ la serie de Fourier de f. Teniendo en cuenta las expresiones de los coeficientes A_k, B_k, si $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de dicha serie, entonces

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k cos(kx) + B_k sen(kx)) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(kt)\ dt \right) cos(kx) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen(kt)\ dt \right) sen(kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (cos(kt)cos(kx) + sen(kt)sen(kx)) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k(t-x)) \right) dt.$$

Realizando el cambio de variable $t - x = \tau$, tenemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau$$

y como la función

$$f(x+\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right)$$

como función de τ, es 2π -periódica y el intervalo de integración $[-\pi - x, \pi - x]$ tiene longitud 2π, se obtiene que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{0.9}$$

Por otra parte, es inmediato comprobar que

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) sen(\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{2} sen(n + \frac{1}{2})\tau,\ \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{0.10}$$

Así, si $h_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se define como

$$h_n(\tau) = \begin{cases} \dfrac{sen(n+\frac{1}{2})\tau}{2sen(\frac{1}{2}\tau)} & si\ \tau \neq 0 \\ \\ n+\dfrac{1}{2} & si\ \tau = 0 \end{cases}$$

entonces h_n es continua en $[-\pi, \pi]$ y $\dfrac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) = h_n(\tau), \forall \tau \in [-\pi, \pi]$, lo que implica que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} h_n(\tau)\ d\tau$$

De donde tenemos

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} h_n(\tau)\ d\tau$$

lo que da lugar a

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ h_n(\tau)\ d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{0.11}$$

Ahora (0.9) , (0.10) y (0.11) originan que

$$\mathrm{S}_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x+\tau) - f(x) \right) h_n(\tau)\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)} sen(n+\frac{1}{2})\ \tau\ d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Supongamos por un momento que hemos probado la siguiente afirmación:

(*) La función $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(\tau) = \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)},\ \forall \tau \in [-\pi, \pi] - \{0\}$$

pertenece a $L^1(-\pi,\pi)$ (el valor de g en $\tau = 0$ es cualquiera que quiera el lector).

Entonces, como

$$\mathrm{S}_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) sen((n+\frac{1}{2})\tau)\ d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)cos(\frac{1}{2}\tau)sen(n\tau)\ d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau)sen(\frac{1}{2}\tau)cos(n\tau)\ d\tau$$

el lema de Riemann-Lebesgue (Ejercicio 6) garantiza que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) - f(x) = 0$$

que es lo que queremos demostrar.

Probemos la afirmación (*). Para ello es suficiente con ver que $g(\tau) \in L^1(-\alpha,\alpha)$ para algún $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Sea $\alpha = \delta$ (el mismo que el de la hipótesis del ejercicio). Entonces, $\forall \tau \in (-\delta,\delta),\ \tau \neq 0$, se tiene

$$|g(\tau)| = \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)}\right| \leq \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau}\right| \left|\frac{\tau}{sen(\frac{1}{2}\tau)}\right| \leq$$

$$\leq \mathrm{M}\left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau}\right|$$

para cierta constante $\mathrm{M} > 0$ lo que prueba que $g \in L^1(-\delta,\delta)$.

Notas y comentarios.

1.- En este ejercicio se ha hablado de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Pensemos que la definición 1 tiene perfecto sentido para funciones del conjunto $L^1(-\pi,\pi)$. Por otra parte, como se cumple que $L^2(-\pi,\pi) \subset L^1(-\pi,\pi)$, el resultado es válido para aquellas funciones del conjunto $L^2(-\pi,\pi)$ (estudiado en el capítulo anterior) que satisfagan las hipótesis del ejercicio.

2.- *¡Ojo: esta nota es tan importante como el ejercicio que acabamos de hacer!*. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$ y si $x \in \mathbb{R}$ es tal que existe $f'(x)$, entonces es claro que se satisfacen las hipótesis del ejercicio previo (*el lector debe probar esta afirmación*). En particular, las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-periódicas y derivables en $\mathbb{R}$ satisfacen las hipótesis del ejercicio previo.

3.- Observemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica y $f \in L^1(-\pi,\pi)$, entonces dado $x \in$ R, el "comportamiento local de f en x" puede determinar la convergencia de la serie de Fourier de f hacia $f(x)$. Este hecho es sorprendente puesto que la serie de Fourier de f viene determinada por los coeficientes A_k *y* B_k, los cuales a su vez dependen del "comportamiento global de f *en* $[-\pi,\pi]$" (*¿se sorprende el lector de este hecho? Si la respuesta es negativa su capacidad de admiración es realmente baja. Si la respuesta es positiva, cosa que es estupenda, su capacidad crítica debe llevarle a encontrar una explicación. Para ello debe leer atentamente (una y otra vez) la demostración dada en el ejercicio anterior*).

Es más, puede probarse que la convergencia o divergencia de la serie de Fourier de f en un punto x depende sólo del comportamiento de f "cerca de x", a pesar de que en la definición de dicha serie de Fourier influya el comportamiento de f en todo el intervalo $[-\pi,\pi]$ (esto se conoce con el nombre de "Principio de localización de Riemann" (ver [4])). También ver [4] y [38] para otros criterios de convergencia, además del de Dini.

4.- La convergencia puntual de Series de Fourier sigue siendo una cuestión que genera parte de la investigación que se realiza en la Matemática actual. Restringiéndonos al subconjunto C, de $L^2(-\pi,\pi)$, formado por las funciones continuas y 2π -periódicas ($f(-\pi) = f(\pi)$), diremos que fué Du Bois-Reymond, en 1873, el primero que encontró una función $f \in C$ cuya serie de Fourier diverge en algún punto de $[-\pi,\pi]$ (ver [31]). Posteriormente fueron dados ejemplos más simples como el de Fejér, en 1911 (ver [38] para más detalles).

En 1966, *L. Carleson ("On the convergence and growth of partial* *sums of Fourier series", Acta Math. 116, 135-157, 1966*) probó que si $f \in C$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ a f. El mismo año, *Kahane y Katznelson* probaron que si E $\subset [-\pi, \pi]$ es un subconjunto de medida cero, entonces existe una función $f \in C$ tal que su serie de Fourier no converge en E(ver [29]); desde luego, estos dos últimos resultados que hemos mencionado (que no son en absoluto triviales de probar y cuyo nivel rebasa el de estas notas), dejan zanjada la cuestión de la convergencia puntual de las Series de Fourier en el conjunto C.

No obstante, el comportamiento (referente a la convergencia puntual) que pueden ofrecer las Series de Fourier es a veces "tremendamente patológico". Por ejemplo, en 1926, *Kolmogorov ("Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout". C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 183, 1327-1328 (1926))* dió un ejemplo de una función $f \in L^1(-\pi, \pi)$ y 2π-periódica tal que su serie de Fourier no converge en ningún punto.

5.- A veces, a partir de la serie de Fourier de una función dada f, puede formarse otra serie que es más adecuada desde el punto de vista de la convergencia puntual a f. Este es el caso por ejemplo, de la sumabilidad Cesáreo de las Series de Fourier (ver [4] y [38] para más detalles), donde la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, $\{S_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ se sustituye por la sucesión formada por sus medias aritméticas.

Los dos ejercicios siguientes constituyen una aplicación del ejercicio anterior.

EJERCICIO 8.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π -periódica definida en $(-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \ -\pi < x < 0 \\ 0 & si \ x = 0 \ o \ x = \pi \\ 1 & si \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

Pruébese que

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{2n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{0.12}$$

2. Probar que

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}sen(nx)}{n}, \ \forall x \in (-\pi,\pi) \tag{0.13}$$

3. Probar que

$$xcosx = -\frac{1}{2}senx + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n}nsen(nx)}{n^2-1}, \ \forall x \in (-\pi,\pi) \tag{0.14}$$

Solución:

1. La función f satisface las condiciones del ejercicio (7) $\forall x \in \mathbb{R} - \mathrm{A}$, donde

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R}/x = k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Por otra parte, como f es impar en $[-\pi,\pi]$, $\mathrm{A}_k = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\mathrm{B}_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(kx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} sen(kx)\ dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{-cos(kx)}{k}\Big]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-cos(k\pi)+cos(0)}{k}\right).$$

Luego
$\mathrm{B}_k = 0$ si k es par y $\mathrm{B}_k = \dfrac{4}{\pi k}$ si k es impar).
Por lo tanto, la serie de Fourier de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4sen(2n-1)x}{\pi(2n-1)}$$

Antonio Cañada Villar, 1994

En conclusión,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \mathrm{A}.$$

También, si $x \in \mathrm{A}$, $f(x) = 0$ y $sen(2n-1)x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, luego se cumple (0.12).

(en particular $\dfrac{\pi}{4} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)}$, $\forall x \in (0, \pi)$. *¡ Esto es curioso!*).

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & -\pi < x < \pi \\ 0 \ , & x = \pi \end{cases}$$

Entonces f satisface todas la hipótesis del ejercicio 7 en todo punto $x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi / \ k \in \mathrm{Z}\}$.

Calculemos la serie de Fourier de f. Para ello, observamos que $\mathrm{A}_k = 0$, $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y que

$$\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx) \ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x sen(kx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\left[x \frac{-cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{cos(kx)}{k} dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k} \left(-\pi cos(k\pi) \right) = \frac{-2}{k} (-1)^k = \frac{+2(-1)^{k-1}}{k}$$

Luego

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} sen(nx)}{n}, \ \forall x \in (-\pi, \pi).$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} xcosx, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

Entonces f satisface las hipótesis del ejercicio 7 en todo punto $x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

Además los coeficientes de Fourier de f vienen dados por

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx) \ dx = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y

$$\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx) \ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcosxsen(kx) \ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcosxsen(kx) \ dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x}{2} \left(sen(k+1)x + sen(k-1)x \right) \ dx$$

Así,

$$\mathrm{B}_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(2x) \ dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(2x)}{2} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{cos(2x)}{2} \ dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2} \right) = \frac{-1}{2}$$

y si $k > 1$,

$$\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(k+1)x \ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(k-1)x \ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\frac{-cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{cos(k+1)x}{k+1}\,dx\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[x\frac{-cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{cos(k-1)x}{k-1}\,dx\Bigg] =$$

$$= \frac{-\pi cos(k+1)\pi}{\pi(k+1)} + \frac{-\pi cos(k-1)\pi}{\pi(k-1)} = \frac{-cos(k+1)\pi}{(k+1)} - \frac{cos(k-1)\pi}{(k-1)} =$$

$$= \frac{cos(k\pi)}{k+1} + \frac{cos(k\pi)}{k-1} = \frac{kcos(k\pi) - cos(k\pi) + kcos(k\pi) + cos(k\pi)}{k^2-1} =$$

$= \frac{2k(-1)^k}{k^2-1}$

Por lo tanto

$$f(x) = xcos(x) = -\frac{1}{2}sen(x) + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n sen(nx)}{n^2-1}\ ,\ \forall x \in (-\pi,\pi).$$

EJERCICIO 9.

Pruébese:

1. $$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n}\ ,\ \forall x \in (0,2\pi)$$

2. $$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi sen(nx)}{n}\right)\ ,\ \forall x \in (0,2\pi)$$

Sugerencia: En ambos apartados, aplíquese el resultado del ejercicio 7 a extensiones 2π-periódicas de las funciones dadas.

Solución:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica y definida en $(0,2\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x\ , & x \in (0,2\pi) \\ 0\ , & x = 2\pi \end{cases}$$

Claramente f satisface las hipótesis del Ejercicio 7 para todo punto $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
Los coeficientes de Fourier de f son

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\ dx$$

Luego

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\ dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\ dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi)\ dx + \int_{0}^{\pi} x\ dx\right] = 2\pi$$

y si $k > 1$,

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi) cos(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x cos(kx)\ dx + 2\int_{-\pi}^{0} cos(kx)\ dx = 0\ ,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, $\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx)\ dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi) sen(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x sen(kx)\ dx + 2\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} + 2\left(\left.\frac{-cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} + 2\left(\frac{-1}{k} + \frac{cos(k\pi)}{k}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} - \frac{2}{k} + \frac{2(-1)^k}{k} = \frac{-2}{k}$$

Así pues,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx)),$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

En particular

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n} \ , \ \forall x \in (0, 2\pi)$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(0, 2\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \in (0, 2\pi) \\ 0 & , \ x = 2\pi \end{cases}$$

f satisface las hipótesis del Ejercicio 7, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. Los coeficientes de Fourier de f son

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) \ dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (x + 2\pi)^2 \ dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} x^2 \ dx = \frac{1}{\pi} \left[\left[\frac{(x + 2\pi)^3}{3} \right]_{-\pi}^{0} + \left. \frac{x^3}{3} \right]_{0}^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \frac{1}{\pi} \frac{8\pi^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3}$$

Análogamente, si $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi)^2 cos(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 cos(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} xcos(kx)\ dx +$$

$$+4\pi\int_{-\pi}^{0} cos(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} xcos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x^2 sen(kx)}{k} + \frac{2xcos(kx)}{k^2} + \frac{sen(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\ \right] +$$

$$+4\left[\left[\frac{xsen(kx)}{k} + \frac{cos(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{0}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{2\pi cos(k\pi)}{k^2} + 4\left(\frac{1}{k^2} - \frac{cos(k\pi)}{k^2}\right) = \frac{4}{k^2}$$

También,

$$\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi)^2 sen(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 sen(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} xsen(kx)\ dx +$$

$$+4\pi\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 sen(kx)\ dx =$$

$$= 4\int_{-\pi}^{0} xsen(kx)\ dx + 4\pi\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\ dx =$$

$$= 4\left[\frac{-xcos(kx)}{k} + \frac{sen(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{0} + 4\pi\left[\frac{-cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= 4\left(\frac{-\pi cos(k\pi)}{k}\right) + \frac{4\pi}{k}\left(-1 + \frac{cos(k\pi)}{k}\right) = \frac{-4\pi}{k}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(nx) + \mathrm{B}_n sen(nx)),$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

En particular

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cos(nx)}{n^2} - \pi\frac{sen(nx)}{n}\right) \ , \ \forall x \in (0, 2\pi)$$

El ejercicio siguiente muestra la relación existente entre la serie de Fourier de una función y la de su derivada.

EJERCICIO 10.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$). Demuéstrese que la serie de Fourier de f' puede obtenerse derivando, término a término, la serie de Fourier de f.

Solución: Como f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$, existe $f'(x)$ c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ y $f' \in L^1(-\pi, \pi)$. Recordemos otra vez que la definición 1 tiene perfecto sentido para funciones de $L^1(-\pi, \pi)$.
Entonces, si

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

y

$$\frac{\mathrm{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{C}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{D}_n sen(n(\cdot)))$$

son las Series de Fourier de f y f' respectivamente, tenemos que

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)cos(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(\pi)cos(n\pi) - f(-\pi)cos(n(-\pi)) + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx\right] =$$

$$= n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx = n\mathrm{B}_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\mathrm{D}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)sen(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx\right] =$$

$$= -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\ dx = -n\mathrm{A}_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

También,

$$\mathrm{C}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0$$

Luego la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

EJEMPLO:

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}/f(x) = |x|\ ,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$. Entonces f es absolutamente continua (¿por qué?) y 2π -periódica.

En los ejercicios 1 y 2 demostramos que la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} cos(2n-1)(\cdot) \tag{0.15}$$

y la de f' (pensemos que $f'(x) = -1$ *si* $x \in (-\pi, 0)$ *y* $f'(x) = 1$ *si* $x \in (0, \pi)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} sen(2n-1)(\cdot)$$

que se obtiene derivando, término a término, (0.15).

Notas.

1.- El resultado del ejercicio anterior es en particular cierto para funciones $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continuas, 2π-periódicas y tales que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

2.- *¡ Atención a esta nota, que también es importante!*. Las hipótesis del ejercicio anterior se verifican si $f \in C^1[-\pi, \pi]$ y es 2π-periódica.

El próximo resultado se refiere a la relación entre la integración, término a término, de la serie de Fourier de una función dada f, y la integral de f. Sorprendentemente, dicha integración proporciona una serie que converge uniformemente a la integral de f.

EJERCICIO 11.

Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$ *y* $\dfrac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$ la serie de Fourier de f. Demuéstrese que si $a \in [-\pi, \pi]$ es un punto dado, entonces

$$\int_a^x f(t)\, dt =$$

$$= \frac{\mathrm{A}_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n \int_a^x cos(nt)\, dt + \mathrm{B}_n \int_a^x sen(nt)\, dt \right) \tag{0.16}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Solución: Sea $\mathrm{S}_n(x) = \dfrac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))$.

Entonces, es conocido (ver (0.6)) que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{S}_n(x)|^2 \; dx = 0 \tag{0.17}$$

Por otra parte, si $x \in [-\pi, \pi]$, tenemos que

$$\left| \int_a^x f(t) \; dt - \int_a^x \mathrm{S}_n(t) \; dt \right| \leq \left| \int_a^x |f(t) - \mathrm{S}_n(t)| \; dt \right| \leq$$

(por la desigualdad de Cauchy-Schwartz)

$$\leq \left(\int_a^x |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2 \; dt \right)^{1/2} \left(\int_a^x 1^2 \; dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2 \; dt \right)^{1/2} |x - a|^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2 \; dt \right)^{1/2} (2\pi)^{1/2}$$

Luego, por (0.17),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x \mathrm{S}_n(t) \; dt = \int_a^x f(t) \; dt$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, que es (0.16).

Notas y comentarios.

1.- Tomando $a = 0$ en (0.16), como

$$\int_0^x cos(nt) \; dt = \frac{sen(nx)}{n} \; ,$$

$$\int_0^x sen(nt) \; dt = \frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in [-\pi,\pi],$$

tenemos que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \frac{\mathrm{A}_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\ \frac{sen(nx)}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{B}_n\left(\frac{-cos(nx)}{n}+\frac{1}{n}\right)$$

O sea que

$$\int_0^x f(t)\ dt - \frac{\mathrm{A}_0 x}{2} = \tag{0.18}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\mathrm{B}_n}{n}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\mathrm{B}_n}{n}cos(nx) + \frac{\mathrm{A}_n}{n}sen(nx))\right)$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$ (*¿se ha planteado el lector porqué la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{B}_n}{n}$ *es convergente? Pues plantéeselo*).

Como la función $g(x) \equiv \int_0^x f(t)\ dt - \frac{\mathrm{A}_0 x}{2}$ es una función de $L^2(-\pi,\pi)$, tiene un desarrollo en serie de Fourier. Este desarrollo es precisamente el escrito en la parte derecha de (0.18). (¿Por qué?).

2.- La observación anterior puede utilizarse para calcular el desarrollo de Fourier de algunas funciones como veremos en los ejercicios 12 y 13 que siguen.

EJERCICIO 12.

Considérese la función $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ x \in [-\pi, 0) \\ 1 & si\ x \in [0,\pi]\ . \end{cases}$$

Calcúlese la serie de Fourier de f y aplíquese el ejercicio anterior para obtener la serie de Fourier de la función $g(x) = |x|$. Compruébese que es la misma que la obtenida en el ejercicio 1.

Solución: La serie de Fourier de f se obtuvo en el ejercicio 2 ($c_1 = -1,\ c_2 = 1$); luego dicha serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} sen(2n-1)(\cdot)$$

Por otra parte $g(x) = \int_0^x f(t)\ dt\ ,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$ (¿por qué?)

Luego, por el ejercicio anterior

$$|x| = g(x) = \int_0^x f(t)\ dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \int_0^x sen(2n-1)t\ dt$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Es decir,

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left(\frac{-cos(2n-1)x}{(2n-1)} + \frac{1}{(2n-1)} \right) =$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \text{ (ver Ejercicio 2)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}.$$

Luego

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \quad \text{uniformemente en } [-\pi, \pi] \qquad (0.19)$$

La relación anterior es difícil de creer. Pensar que la función $|x|$ admite un desarrollo en serie como el dado es, cuando menos, no intuitivo. Sin embargo, como una imagen vale más que mil palabras, el lector puede obtener fácilmente las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales de la serie dada. ¿A que ahora es más creíble?

EJERCICIO 13.

Probar que:

1. $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ de manera uniforme.

2. $xsenx = 1 - \dfrac{1}{2}cosx - 2\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ de manera uniforme.

3. $\dfrac{x^2}{2} = \pi x - \dfrac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [0, 2\pi]$ de manera uniforme.

Sugerencia: Utilícense los ejercicios n^o 8, 9 y 11.

Solución:

1. En el apartado b) del ejercicio 8 demostramos que si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = -\pi \text{ ó } x = \pi \end{cases}$$

Entonces la serie de Fourier de f es

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} sen(nx)}{n}$$

Por lo tanto, utilizando el ejercicio 11 con $a = 0$, tenemos que

$$\int_0^x f(t)\ dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{n-1} sen(nt)}{n}\ dt$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

De donde se obtiene

$$\frac{1}{2}x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{-cos(nt)}{n} \Big]_0^x \right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(-cos(nx)+1)$$

Luego

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-(-1)^{n-1}cos(nx)}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \text{ uniformemente en } [-\pi,\pi]$$

y así

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}cos(nx)}{n^2}$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Ahora bien, si en el apartado b) del ejercicio 9 tomamos $x=\pi$, obtenemos que

$$\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

De donde se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12} \tag{0.20}$$

Luego

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2} \quad \text{uniformemente en } [-\pi,\pi].$$

Antonio Cañada Villar, 1994

2. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} xcosx, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = -\pi \ o \ x = \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier f hemos demostrado que es

$$-\frac{1}{2}senx + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n sen(nx)}{n^2-1}$$

Luego

$$\int_0^x f(t)\ dt = -\frac{1}{2}\int_0^x sent\ dt + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1}\int_0^x sen(nt)\ dt$$

de manera uniforme en $[-\pi, \pi]$.

Realizando las integrales tenemos que

$$tsent]_0^x - \int_0^x sent\ dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-cosx + 1\right) + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1}\left(\frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

De aquí obtenemos

$$xsenx =$$

$$= -cosx + cos0 + \frac{1}{2}cosx - \frac{1}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-cos(nx))}{n^2-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$$

y como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

(¿por qué?) tenemos que

$$xsenx = 1 - \frac{1}{2}cosx - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Antonio Cañada Villar, 1994

3. Consideramos la función del apartado a) del ejercicio 9.

En este caso $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi \ , & -\pi \leq x \leq 0 \\ x \ , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

La serie de Fourier de f es

$$\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} sen(n(\cdot))$$

y por tanto,

$$\int_0^x f(t)\ dt = \pi x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \int_0^x sen(nt)\ dt, \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

Como $\displaystyle\int_0^x sen(nt)\ dt = \left. \frac{-cos(nt)}{n} \right]_0^x = \frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}$, se tiene que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2cos(nx)}{n^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(esto es conocido, pero el lector puede intentar probarlo, utilizando la igualdad de Parseval para una función adecuada), tenemos que

$$\int_0^x f(t)\ dt = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \qquad (0.21)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$

Ahora bien,

Si $x \in (-\pi, 0)$, $\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x (t + 2\pi)\ dt = \frac{1}{2}x^2 + 2\pi x$

Si $x \in (0, \pi)$, $\int_0^x f(t)\ dt = \int_0^x t\ dt = \frac{1}{2}x^2$

Luego

$$\frac{1}{2}x^2 + 2\pi x =$$

$$= \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \quad \text{uniformemente en } [-\pi, 0], \tag{0.22}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \quad \text{uniformemente en } [0, \pi]$$

Entonces, $\forall x \in [\pi, 2\pi],\ x - 2\pi \in [-\pi, 0]$, luego por (0.22)

$$\frac{1}{2}(x - 2\pi)^2 + 2\pi(x - 2\pi) =$$

$$= \pi(x - 2\pi) - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n(x - 2\pi))}{n^2}$$

y realizando operaciones, obtenemos

$$\frac{1}{2}x^2 - 2\pi x + 2\pi^2 + 2\pi x - 4\pi^2 =$$

$$= \pi x - 2\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$$

de manera uniforme en $[-\pi, 0]$. O sea que
$\frac{1}{2}x^2 = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$ uniformemente en $[-\pi, 0]$.

Esto, junto con (0.22), proporciona lo requerido.

Cuando apliquemos la teoría de Series de Fourier a diversos problemas, veremos que hay muchas situaciones donde la convergencia puntual de tales series, no es suficiente para tener una respuesta satisfactoria; éste será el caso, por ejemplo, de las aplicaciones de las Series de Fourier a las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática en los capítulos III y IV. Aquí necesitaremos criterios que nos permitan obtener la convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función dada. De este problema nos vamos a ocupar a continuación.

EJERCICIO 14.

Sea $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que su serie de Fourier converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Demostrar que dicha serie de Fourier debe converger uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Sugerencia: Si g es la función a la que converge uniformemente la serie de Fourier de f, demostrar que f debe ser igual a g c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ y utilizar el hecho de que ambas son continuas.

Solución: Sea

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

la serie de Fourier de f y $\{\mathrm{S}_n; n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de sumas parciales de dicha serie.

Por hipótesis $\{\mathrm{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Sea $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{\mathrm{S}_n\} \rightarrow g$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Como S_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$, g debe ser continua en $[-\pi, \pi]$.

Por otra parte, es conocido que $\{\mathrm{S}_n\} \rightarrow f$ *en* $L^2(-\pi, \pi)$ (*¿había ya el lector olvidado este hecho fundamental?*) y como $\{\mathrm{S}_n\} \rightarrow g$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$, $\{\mathrm{S}_n\} \rightarrow g$ *en* $L^2(-\pi, \pi)$ (véase el ejercicio 12, cap. I); luego $f = g$ *en* $L^2(-\pi, \pi)$, lo que implica que $f(x) = g(x)$ *c.p.d. en* $[-\pi, \pi]$. Pero como f *y* g son continuas en $[-\pi, \pi]$, debe tenerse que $f(x) = g(x)$,

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ (*intente el lector probar esto; si no lo consigue, es que ha olvidado demasiado pronto el Capítulo I*).

EJEMPLO:

Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = |x|$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, entonces

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \tag{0.23}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (véase el ejercicio 1). Esto se había ya obtenido por un procedimiento distinto (véase 0.19).

EJERCICIO 15.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$) y tal que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Sugerencia: Si $\dfrac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$ es la serie de Fourier de f, pruébese que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} (|\mathrm{A}_n| + |\mathrm{B}_n|)$ es convergente.

Solución: Sea

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \tag{0.24}$$

la serie de Fourier de f.

Entonces la serie de Fourier de f' (véase el ejercicio 10) es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

La igualdad de Parseval (0.7), aplicada a f', proporciona que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \mathrm{B}_n^2 + n^2 \mathrm{A}_n^2) \right)$$

lo que implica que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 \mathrm{B}_n^2 + n^2 \mathrm{A}_n^2)$$

es convergente.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\left(n|\mathrm{A}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^2 |\mathrm{A}_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|\mathrm{A}_n| \geq 0$$
$$\left(n|\mathrm{B}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^2 |\mathrm{B}_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|\mathrm{B}_n| \geq 0$$

lo que implica que

$$|\mathrm{A}_n| \leq \frac{1}{2} \left(n^2 \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|\mathrm{B}_n| \leq \frac{1}{2} \left(n^2 \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues la serie numérica

$$\frac{|\mathrm{A}_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|\mathrm{A}_n| + |\mathrm{B}_n|)$$

es convergente y como esta serie es una mayorante de la serie (0.24), ésta es convergente uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Como además f es continua, por el ejercicio anterior dicha convergencia es a la función f.

Notas y comentarios.

1.- Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, sabemos que existe $f'(x)$ *c.p.d. en* $[-\pi, \pi]$ *y* $f' \in L^1(-\pi, \pi)$. En el ejercicio anterior se exige, además, que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

2.- En adelante denotaremos por H al subconjunto de $L^2(-\pi, \pi)$ formado por aquellas funciones que satisfacen las hipótesis del ejercicio anterior.

El ejercicio que sigue describe subconjuntos de H que pueden ser útiles en la práctica, puesto que si una función dada f pertenece a alguno de estos subconjuntos, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f.

EJERCICIO 16.

Demostrar que los conjuntos que se describen son subconjuntos de H.

1. A $= \{f \in C^1[-\pi, \pi] / f(-\pi) = f(\pi)\}$
2. B $= \{f \in C^0[-\pi, \pi] / f(-\pi) = f(\pi),\ f'(x)$ existe salvo en un número finito de puntos y f' es medible y acotada $\}$
3. C $= \{f \in C^0[-\pi, \pi] / f(-\pi) = f(\pi)\ y\ f$ es "lineal a trozos"$\}$

Solución:

1. Si $f \in$ A, entonces $f' \in C^0[-\pi, \pi]$; luego f' es acotada en $[-\pi, \pi]$ y por tanto f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$ (utilícese el teorema del valor medio). Como además $f' \in C^0[-\pi, \pi]$, $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.
2. Nuevamente, aplicando el teorema del valor medio se tendría que f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$. Además, como f' es acotada en $[-\pi, \pi]$, $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.
3. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se dirá lineal a trozos si f es continua y existe un conjunto finito de puntos

$$-\pi = a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n = \pi$$

de $[-\pi,\pi]$ tal que $f|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es de la forma $f(x)=m_ix++n_i$, para $1\leq i\leq n-1$. Es claro entonces que $C\subset B$.

EJEMPLOS.
Utilizando el ejercicio previo, se obtienen las siguientes identidades (que ya se habían obtenido por un procedimiento distinto en el ejercicio 11).

$$|x|=\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}\quad \text{uniformemente en } [-\pi,\pi].$$

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}\quad \text{uniformemente en } [-\pi,\pi].$$

$$xsenx=1-\frac{1}{2}cosx-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1}\quad \text{uniformemente en } [-\pi,\pi].$$

Nota importante.

En particular, si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es de clase C^1 y 2π-periódica se tiene que

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(nx)+B_n sen(nx))\ \text{uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Las identidades obtenidas hasta ahora permiten sumar muchas series numéricas, pero a veces hay que ser cautos para no equivocarse (véase el ejercicio que sigue).

EJERCICIO 17.

Obtener la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2}$$

Sugerencia: Utilizar alguna de las identidades del ejemplo anterior.

Solución: Sabemos que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2} \tag{0.25}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Luego

$$\frac{x^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

La primera respuesta que a uno se le ocurre es que la suma de la serie pedida es $\dfrac{20^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4}$. Pero esto es falso, puesto que (0.25) se cumple en $[-\pi, \pi]$ y $20 \notin [-\pi, \pi]$.

Ahora bien, aprovechando la 2π-periodicidad de la función dada por la parte derecha de (0.25), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20 - 6\pi)n}{n^2}$$

y como $20 - 6\pi \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2} = \frac{(20 - 6\pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4}.$$

En otros tipos de aplicaciones interesa conseguir no sólo que la serie de Fourier de una función dada f converja uniformemente a f sino también (y suponiendo que f es suficientemente regular) que las Series de Fourier de las derivadas de f converjan uniformemente a tales derivadas.

Este es el objetivo de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 18.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con f' absolutamente continua y tal que $f'' \in L^2(-\pi, \pi)$. Si además se cumple que

$$f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi+) = f'(\pi-)$$

pruébese que

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(nx) + \mathrm{B}_n sen(nx))$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(nx) - n\mathrm{A}_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, donde $\left\{\frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathrm{N}\right\}$ son los coeficientes de Fourier de f.

(**Sugerencia:** pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n|\mathrm{B}_n| + n|\mathrm{A}_n|)$ es convergente).

Solución: Como f y f' están en las condiciones del ejercicio 10, si

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \tag{0.26}$$

es la serie de Fourier de f,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot))) \tag{0.27}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) - n^2\mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \tag{0.28}$$

son las Series de Fourier de f' *y* f'' respectivamente.

Aplicando la igualdad de Parseval (0.7) a f'', se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \mathrm{A}_n^2 + n^4 \mathrm{B}_n^2) \right)$$

lo que prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 \mathrm{A}_n^2 + n^4 \mathrm{B}_n^2)$$

es convergente.

También,

$$\left(n^2 |\mathrm{A}_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = n^4 \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n|\mathrm{A}_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(n^2 |\mathrm{B}_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = n^4 \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n|\mathrm{B}_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica que

$$n|\mathrm{A}_n| + n|\mathrm{B}_n| \leq \frac{1}{2}\left(n^4 \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(n^4 \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Así pues la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n|\mathrm{A}_n| + n|\mathrm{B}_n|)$$

es convergente. De aquí deducimos que las series (0.26) y (0.27) son uniformemente convergentes en $[-\pi, \pi]$ y deben serlo a f *y* f' respectivamente por el ejercicio 14.

Notas y comentarios.

1.- Las hipótesis del ejercicio 18 se satisfacen si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y $f(-\pi) = f(\pi),\ f'(-\pi+) = f'(\pi-)$. En particular, esto es así si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y 2π-periódica.

2.- Es claro que el ejercicio 18 se puede enunciar con más generalidad, si f es una función con "más regularidad". De hecho puede probarse el resultado siguiente:

"Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k con $f^{k)}$ absolutamente continua y tal que $f^{k+1)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Si además se cumple que

$$f^{i)}(-\pi+) = f^{i)}(\pi-),\ 0 \le i \le k,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) \\ f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}'_n(x) \\ &- - - - - - - \\ f^{k)}(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}^{k)}_n(x) \end{aligned} \tag{0.29}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, donde $\{\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f".

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} y 2π-periódica, se cumple (0.29).

Creo que el lector, si no está muy cansado (en este caso déjese para otro día), debería probar el anterior resultado. La demostración sigue las mismas líneas que el ejercicio anterior:

Lo primero que hay que intentar es obtener la fórmula para la serie de Fourier de $f^{k+1)}$. Para esto es razonable (y muchas veces hasta necesario) hacer algunos casos particulares:

Si
$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot)))$$
es la serie de Fourier de f, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 A_n cos(n(\cdot)) - n^2 B_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f'',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^3 B_n cos(n(\cdot)) + n^3 A_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f''',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 A_n cos(n(\cdot)) + n^4 B_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f^{iv)},$$

y así sucesivamente. Llegados a este punto, afirmamos que la serie de Fourier de $f^{k+1)}$ es:

Si k es impar

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{\frac{k+1}{2}} n^{k+1} A_n cos(n(\cdot)) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} n^{k+1} B_n sen(n(\cdot)))$$

Si k es par

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{\frac{k}{2}} n^{k+1} B_n cos(n(\cdot)) + (-1)^{\frac{k+2}{2}} n^{k+1} A_n sen(n(\cdot)))$$

Esta afirmación puede probarse (si queda ánimo) por inducción sobre k.

En cualquier caso, y por pertenecer $f^{k+1)}$ *a* $L^2(-\pi,\pi)$ se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{k+1)}(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2) \right)$$

lo que prueba que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2)$$

es convergente.

Como

$$\left(n^{k+1} |\mathrm{A}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n^k |\mathrm{A}_n| \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(n^{k+1} |\mathrm{B}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n^k |\mathrm{B}_n| \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

se tiene que

$$n^k |\mathrm{A}_n| + n^k |\mathrm{B}_n| \leq \frac{1}{2} \left(n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ lo que implica que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^k |\mathrm{A}_n| + n^k |\mathrm{B}_n|) \tag{0.30}$$

es convergente.

Lo que queda es muy fácil pues (0.30) implica que las sucesiones $\mathrm{S}_n(x),\ \mathrm{S}'_n(x),\ \cdots,\ \mathrm{S}_n^{k)}(x)$ deben converger uniformemente a $f,\ f',\ \cdots,\ f^{k)}$ respectivamente (por el ejercicio 14).

Antonio Cañada Villar, 1994

En el ejercicio anterior se demuestra que si f es suficientemente regular entonces no sólo la serie de Fourier de f converge uniformemente a f sino que también la serie de Fourier de f' converge uniformemente a f'. En particular se ha demostrado que, con las hipótesis de dicho ejercicio, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n|\mathrm{A}_n| + n|\mathrm{B}_n|$ es convergente. Muchas veces interesa obtener un resultado recíproco, y esto es lo que hacemos a continuación.

EJERCICIO 19.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que si

$$\left\{ \frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

son sus coeficientes de Fourier, entonces la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(|\mathrm{A}_n| + |\mathrm{B}_n| \right) \tag{0.31}$$

es convergente. Pruébese que f es de clase C^1 en $[-\pi, \pi]$.

Solución: Las hipótesis del ejercicio implican que las series

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

son uniformemente convergentes en $[-\pi, \pi]$. Luego, por el ejercicio 14,

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(nx) + \mathrm{B}_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien, si

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{B}_n cos(nx) - n\mathrm{A}_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, es conocido que $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Como g es continua en $[-\pi, \pi]$, se tiene que f es de clase C^1 en $[-\pi, \pi]$.

Notas y comentarios.

1.- Los ejercicios 18 y 19 ponen de manifiesto la relación existente entre la regularidad de una función f y el hecho de que la serie (0.31) converja. Pensemos que la regularidad de una función es una propiedad local mientras que el hecho de que la serie (0.31) converja es una propiedad global (pues los coeficientes A_n *y* B_n dependen del valor de f en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$). También en el ejercicio 7 (sobre el Criterio de Dini para convergencia puntual de Series de Fourier) se vió que el "comportamiento local de f cerca de un punto x_0" puede determinar que la serie de Fourier de f (para calcular la cual se necesitan los valores de f en $[-\pi, \pi]$) converja en x_0 *a* $f(x_0)$. Esta relación entre propiedades locales y globales de f es una constante en la teoría de Series de Fourier.

2.- El ejercicio 19 se puede fácilmente generalizar de la manera siguiente:

"Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k (|\mathrm{A}_n| + |\mathrm{B}_n|)$ es convergente para algún k natural, entonces f es de clase C^k en $[-\pi, \pi]$".

Como mencionamos en la introducción hay problemas que conducen al desarrollo en serie de una función utilizando sólo funciones de tipo $sen(n(\cdot))$ ó $cos(n(\cdot))$. De este tema nos vamos a ocupar en los ejercicios que siguen.

EJERCICIO 20.

Demostrar que el conjunto $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$ es una base de $L^2(0,\pi)$.

Sugerencia: Considérense extensiones impares a $[-\pi,\pi]$ de las funciones de $L^2(0,\pi)$.

Solución: El conjunto dado es ortogonal en $L^2(0,\pi)$ (véase el ejercicio 13, apartado 3.- del Cap. I). Como, además, la norma de cada elemento es 1, el conjunto dado es ortonormal en $L^2(0,\pi)$. Veamos que es una base. Para ello utilizaremos la caracterización dada en el apartado c) del ejercicio 16, cap. I.

Sea $f \in L^2(0,\pi)$ tal que

$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)), f >= \int_0^\pi f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(nx)\ dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Considérese la función $\tilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$, definida como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) cos(nx)\ dx = 0,\ \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) sen(nx)\ dx = 2 \int_0^\pi f(x) sen(nx)\ dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $\tilde{f} = 0\ en\ L^2(-\pi,\pi)$, lo que implica que $f = 0$ en $L^2(0,\pi)$.

Notas y comentarios.

1.- Que el conjunto dado sea una base de $L^2(0,\pi)$ significa que para cualquier función $f \in L^2(0,\pi)$ se tiene

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)), f > \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))$$

donde $\mathrm{B}_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

La convergencia de la serie anterior debe entenderse en el sentido de $L^2(0,\pi)$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k sen(kx) \right|^2 dx = 0\ ,\ \forall f \in L^2(0,\pi)$$

y la igualdad de Parseval es ahora

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2\ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \mathrm{B}_n^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n^2$$

2.- Lo que hemos hecho en los ejercicios anteriores para funciones del espacio $L^2(-\pi,\pi)$ utilizando la base (0.1) puede hacerse para funciones del espacio $L^2(0,\pi)$ utilizando la base dada en el ejercicio anterior; por lo tanto se podría obtener un criterio análogo al de Dini, ver la relación entre Series de Fourier, derivación e integración, etc. A título de ejemplo, y para que se vea que no todo queda exactamente igual que para $L^2(-\pi,\pi)$ con la base (0.1), veamos el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 21.

Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, cumpliendo que $f(0) = f(\pi) = 0$ y $f' \in L^2(0,\pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f

respecto de la base del ejercicio 20 converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Solución: Sea $\tilde{f}:[-\pi,\pi]\rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x)=\left\{\begin{array}{cc} f(x)\ , & 0\leq x\leq \pi \\ -f(-x)\ , & -\pi\leq x\leq 0 \end{array}\right.$$

Es fácil comprobar que $\tilde{f}$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, $\tilde{f}$ es 2π-periódica ($\tilde{f}(-\pi)=0=\tilde{f}(\pi)$) y además $\tilde{f}'\in L^2(-\pi,\pi)$. Por lo tanto, por el ejercicio 15, se tiene que

$$\tilde{f}(x)=\frac{\mathrm{A}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(nx)+\mathrm{B}_n sen(nx)) \tag{0.32}$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$,
donde

$$\mathrm{A}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\ dx=0$$

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)cos(nx)\ dx=0\ ,\ \forall n\in \mathbb{N}\ \ y$$

$$\mathrm{B}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)sen(nx)\ dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\tilde{f}(x)sen(nx)\ dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)sen(nx)\ dx$$

Luego

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_n sen(nx)\ \ \text{uniformemente en } [0,\pi],$$

donde

$$\mathrm{C}_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n\in \mathbb{N}.$$

Nota:

Obsérvese que la condición $f(0)=f(\pi)=0$ es necesaria, si se quiere tener convergencia uniforme de la serie de Fourier de f, a f en $[0,\pi]$, con la base del ejercicio 20.

EJERCICIO 22.

Demuéstrese que

$$cosx = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n} \tag{0.33}$$

de manera uniforme en $[0,\pi]$.

Solución: Considérese la función $f:[0,\pi]\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = cosx - 1 + \frac{2x}{\pi}\ ,\ \ \forall x\in[0,\pi]$$

Es evidente que f cumple las hipótesis del ejercicio anterior y por lo tanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n sen(nx) \ \text{ uniformemente en } [0,\pi]$$

donde $\mathrm{B}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

Entonces

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx - \int_0^{\pi} sen(nx)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xsen(nx)\ dx\right]$$

Ahora bien,

$$\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(sen(nx+x)+sen(nx-x))\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(sen(n+1)x + sen(n-1)x)\ dx$$

Luego,

Si $n = 1$, $\displaystyle\int_0^\pi cosxsen(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi sen(2x)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-cos(2x)}{2}\right]_0^\pi = \frac{1}{4}\left[-cos(2\pi) + 1\right] = 0$$

Si $n > 1$, $\displaystyle\int_0^\pi cosxsen(nx)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\frac{-cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^\pi + \left[\frac{-cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^\pi\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}\left(-cos(n+1)\pi + 1\right) + \frac{1}{n-1}\left(-cos(n-1)\pi + 1\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} \text{Si n es par} & \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n+1} + \frac{2}{n-1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2n-\cancel{2}+2n+\cancel{2}}{n^2-1}\right] = \frac{2n}{n^2-1} \\ \\ \text{Si n es impar} & \frac{1}{2}\left[\frac{0}{n+1} - \frac{0}{n-1}\right] = 0 \end{cases}$$

Así pues,

$$\int_0^\pi cosxsen(nx)\ dx = \begin{cases} \frac{2n}{n^2-1} & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es impar} \end{cases} \tag{0.34}$$

Por otra parte,

$$\int_0^\pi sen(nx)\ dx = \left[\frac{-cos(nx)}{n}\right]_0^\pi = \frac{-cos(n\pi)}{n} + \frac{1}{n} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \frac{2}{n} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

y

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi xsen(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{cos(nx)}{n}\ dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-xcos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \left[\frac{sen(nx)}{n^2}\right]_0^\pi\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{-\pi cos(n\pi)}{n} = \frac{-2cos(n\pi)}{n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{n} & \text{si n es par} \\ \\ \frac{2}{n} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

En definitiva tenemos que

$$\mathrm{B}_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1} - 0 - \frac{2}{n}\right] = \frac{4}{\pi n(n^2-1)} & \text{si n es par} \\ \\ \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{2}{n} + \frac{2}{n}\right] = 0 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Luego

$$cosx - 1 + \frac{2x}{\pi} = \sum_{n=1, n\ par}^{\infty} \frac{4}{\pi n(n^2-1)} sen(nx) \quad \text{uniformemente en } [0,\pi]$$

Es decir, que

$$cosx = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n} \quad \text{uniformemente en } [0,\pi].$$

Los tres ejercicios siguientes se refieren a desarrollos en serie de cosenos. El lector no tendrá (o no deberá tener) ninguna dificultad en resolverlos:

EJERCICIO 23.

Demuéstrese que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base de $L^2(0,\pi)$. Escríbase la igualdad de Parseval en este caso.

Antonio Cañada Villar, 1994

Solución: Es trivial que el conjunto dado es ortonormal (véase el ejercicio 13, apartado 4), cap. I).

Sea $f \in L^2(0,\pi)$ tal que

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ f >=< \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),\ f >= 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces

$$\int_0^\pi f(x)cos(nx)\ dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Notemos por $\tilde{f}$ la extensión par de f a $[-\pi,\pi]$. Es decir,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Entonces $\tilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$ y

$$\int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(x)cos(nx)\ dx = 2\int_0^\pi f(x)cos(nx)\ dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

También,

$$\int_{-\pi}^\pi \tilde{f}(x)sen(nx)\ dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto, $\tilde{f} = 0$ en $L^2(-\pi,\pi)$, lo que implica que $f = 0$ en $L^2(0,\pi)$.

Escribamos ahora la igualdad de Parseval. Por lo que hemos demostrado, se cumple que

$$f =< \frac{1}{\sqrt{\pi}}, f > \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^\infty < \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)), f > \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),$$

$\forall f \in L^2(0,\pi)$

Luego

$$f = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\ dx + \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)cos(nx)\ dx\right) cos(n(\cdot)) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n(\cdot))$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

La igualdad de Parseval es

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2\ dx =$$

$$= \left(< \frac{1}{\sqrt{\pi}}, f > \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(< \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)), f > \right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 \right)\ ,\ \forall f \in L^2(0,\pi).$$

EJERCICIO 24.

Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua tal que $f' \in L^2(0,\pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f respecto de la base del ejercicio anterior converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Solución: Sea $\tilde{f} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\tilde{f}$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, $\tilde{f}$ es 2π-periódica $\left(\tilde{f}(-\pi) = f(\pi) = \tilde{f}(\pi)\right)$ y $\tilde{f}' \in L^2(-\pi,\pi)$.

Por lo tanto, por el ejercicio 15, se tiene que

$$\tilde{f}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$ donde

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) cos(nx)\ dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx,$$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) sen(nx)\ dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego
$f(x) = \dfrac{\mathrm{A}_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n cos(nx)$ uniformemente en $[0,\pi]$, donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

EJERCICIO 25.

Demuéstrese que

$$senx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{1-4n^2} \quad \text{uniformemente en } [0,\pi].$$

Solución: La función $f(x) = senx$ satisface la hipótesis del ejercicio anterior. Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n cos(nx) \quad \text{uniformemente en } [0,\pi]$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x) cos(nx)\ dx.$$

Ahora bien,

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} senx\ cos(nx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\left[sen(x+nx) + sen(x-nx)\right]\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \left(sen((n+1)x) + sen((1-n)x)\right)\ dx$$

Así pues

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} senx\ dx = \frac{2}{\pi}\left(-cosx]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-cos(\pi)+1\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$A_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(2x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-cos(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

y si $n > 1$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{-cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} + \left.\frac{-cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

Luego, si $n > 1$,

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{2}{n+1} + \dfrac{2}{1-n}\right] = \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{si n es par} \\ \\ \dfrac{1}{\pi}\left[0-0\right] = 0 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$senx = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1, n\ par}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-n^2)} cos(nx) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2nx)}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{uniformemente en } [0,\pi].$$

Una nota más antes de seguir (absolutamente necesaria)

En los ejercicios 20 y 23 se ha demostrado que los conjuntos

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

forman bases de $L^2(0,\pi)$. El lector encontrará más adelante, cuando apliquemos los resultados obtenidos para Series de Fourier al estudio de las Ecuaciones de la Física Matemática en los capítulos III y IV, que ambas bases son igual de necesarias y de útiles. Será el problema concreto que estemos estudiando el que decida qué tipo de base se ha de utilizar. Pero sobre lo que sí quiero llamar la atención, es sobre el hecho de que las hipótesis necesarias para poder obtener resultados sobre convergencia puntual, convergencia uniforme, etc, son diferentes dependiendo de la base que se utilice (véase, por ejemplo, los ejercicios 21 y 24).

Mi recomendación es que se tengan siempre de referencia los resultados obtenidos para funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ con la base (0.1) y si queremos obtener algún resultado para funciones de $L^2(0,\pi)$, deben hacerse extensiones convenientes de dichas funciones a $L^2(-\pi,\pi)$.

El ejercicio que sigue se refiere a un espacio $L^2(a,b)$ general. En él se ponen de manifiesto claramente algunas afirmaciones de la nota precedente.

EJERCICIO 26.

1. Demuéstrese que los conjuntos siguientes son bases de $L^2(a,b)$:

   1.-

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}},\ \sqrt{\frac{2}{b-a}} cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}, \right. \tag{0.35}$$
$$\left. \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

   2.-

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen\frac{n\pi(x-a)}{b-a},\ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{0.36}$$

3.-
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}},\ \sqrt{\frac{2}{b-a}} cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a},\ n \in \mathbb{N} \right\} \qquad (0.37)$$

2. Escríbase la igualdad de Parseval para cada una de las bases anteriores.

3. Descríbanse condiciones suficientes que garanticen la convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función dada $f \in L^2(a,b)$, a f, respecto de cada una de las bases del apartado a).

Solución:

1. 1.- Es el ejercicio 19, cap. I.
   2.- La aplicación que lleva el intervalo $[a,b]$ *en* $[0,\pi]$ es $r : [a,b] \to [0,\pi]/r(x) = \dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$. Luego mediante el cambio de variable $y = \dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$, y utilizando el hecho de que el conjunto del ejercicio 20 es una base de $L^2(0,\pi)$, es inmediato comprobar que (0.36) es una base de $L^2(a,b)$.

   3.- Es idéntico al apartado anterior utilizando el hecho de que el conjunto del ejercicio 23 es una base de $L^2(0,\pi)$.

2. **Para la base 0.35:**

   $\forall f \in L^2(a,b)$ se tiene que
   $$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{b-a}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sqrt{\frac{2}{b-a}} cos \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \right) +$$
   $$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \right)$$
   donde
   $$a_0 =< f,\ \frac{1}{\sqrt{b-a}} >$$

$$a_n =< f, \sqrt{\frac{2}{b-a}} cos \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n =< f, \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \ dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Luego

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n cos \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} + \right. \tag{0.38}$$
$$\left. + \, \mathrm{B}_n sen \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \right)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) cos \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \ dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) sen \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \ dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \ dx = \tag{0.39}$$
$$= \frac{b-a}{2} \left[\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2) \right], \ \forall f \in L^2(a,b)$$

(compárese con (0.7)).

Para la base 0.36:

$\forall f \in L^2(a,b)$ se tiene que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right)$$

donde

$$a_n =< f,\ \sqrt{\frac{2}{b-a}} sen \frac{n\pi(x-a)}{b-a} >,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \ dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Luego

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n sen \left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right),$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) sen \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \ dx \ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b-a}{2} \mathrm{A}_n^2 = \qquad (0.40)$$

$$= \frac{b-a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n^2,\ \forall f \in L^2(a,b)$$

(compárese con el ejercicio 20, nota 1).

Para la base 0.37

Realizando un proceso análogo a los dos casos anteriores se obtendría que

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = \frac{b-a}{2} \left(\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n^2 \right)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) cos \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \, dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(compárese con el ejercicio 23)

3. **Para la base 0.35**

   $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua,
   $f(a) = f(b)$ y $f' \in L^2(a,b)$.

   Para la base 0.36

   $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua,
   $f(a) = f(b) = 0$ y $f' \in L^2(a,b)$.

   Para la base 0.37

   $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua y
   $f' \in L^2(a,b)$.

Para terminar este capítulo vamos a ver algunas aplicaciones de las Series de Fourier. Constituyen una pequeñísima muestra de las posibilidades de aplicación de la teoría de tales series y de hecho, los dos capítulos que siguen estarán dedicados en su integridad al estudio de las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática utilizando series de Fourier.

Comenzamos con algunos resultados referentes a la aproximación uniforme de funciones continuas.

EJERCICIO 27.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y 2π-periódica. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathrm{R}^+$ puede encontrarse un polinomio trigonométrico g_ε tal que

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Demostrar que una función continua y 2π-periódica puede aproximarse de manera uniforme "tanto como se quiera" por funciones del tipo H (Nota 2, Ejercicio 15) y utilizar el resultado del ejercicio 15.

Solución: Recordemos en primer lugar que un polinomio trigonométrico es una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} (C_k cos(kx) + D_k sen(kx))$$

con $C_k, \ D_k$ números reales, $0 \leq k \leq n$.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Veamos que existe una función $h_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ que pertenece al conjunto H (ver notas del ejercicio 15) y cumpliendo además que

$$|f(x) - h_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/2, \ \forall x \in [-\pi, \pi] \tag{0.41}$$

(la idea para construir h_ε es construir una "poligonal a trozos" que aproxime a f como en (0.41) utilizando para ello la continuidad uniforme de f en $[-\pi, \pi]$)

En efecto, como f es continua en $[-\pi, \pi]$, f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$ y por tanto dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta(\varepsilon) \in \mathrm{R}^+$ tal que si $x, y \in [-\pi, \pi]$ y $|x - y| \leq \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/4$.

Tomemos una partición del intervalo $[-\pi, \pi] : x_0 = -\pi < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = \pi$ tal que $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta, \ 1 \leq i \leq n$ y definamos la función $h_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ como

$$h_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}), \ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$1 \leq i \leq n$ (es decir, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, h_ε viene definida por la ecuación de la recta que une los puntos $(x_i,\ f(x_{i-1}))$, $(x_i,\ f(x_i))$.

h_ε es una función del conjunto H (pues $h_\varepsilon \in$ C (Ejercicio 16)) y además, si $x \in [-\pi, \pi]$, entonces x debe pertenecer a algún intervalo $[x_{i-1},\ x_i]$, $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto

$$|f(x) - h_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \frac{|x - x_{i-1}|}{|x_i - x_{i-1}|} \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte como $h_\varepsilon \in$ H, la serie de Fourier de h_ε converge uniformemente a h_ε en $[-\pi, \pi]$, y por lo tanto, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que

$$\left| h_\varepsilon(x) - \frac{\mathrm{A}_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon/2 \ , \tag{0.42}$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ donde $\left\{ \frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_k,\ \mathrm{B}_k,\ k \in \mathbb{N} \right\}$ son los coeficientes de Fourier de h_ε.

Ahora (0.41) y (0.42) implican que si $n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$\left| f(x) - \frac{\mathrm{A}_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon \ , \tag{0.43}$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$. Pero como f (por hipótesis) y cualquier polinómio trigonométrico son funciones 2π-periódicas, (0.43) se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 28. (Teorema de aproximación de Weierstrass)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ puede encontrarse un polinómio p_ε tal que

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Antonio Cañada Villar, 1994

Sugerencia: Si $[a, b] \subset (-\pi, \pi)$, aplíquese el resultado del ejercicio anterior a una extensión conveniente (continua y 2π-periódica) de f. Esto proporciona un cierto polinomio trigonométrico al que se puede (y debe) aplicar ahora el desarrollo de Taylor de una función. Si $[a, b]$ es general, considérese $g : [-\pi/2,\ \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f\left(\frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}\right).$$

Solución:

1. Sea $[a, b] \subset (-\pi,\ \pi)$. Definamos $h : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(a)\dfrac{x+\pi}{a+\pi}, & x \in [-\pi, a] \\ f(x), & x \in [a, b] \\ f(b)\dfrac{x-\pi}{b-\pi}, & x \in [b, \pi] \end{cases}$$

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, por el ejercicio anterior, existe un polinomio trigonométrico $A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(kx) + B_k sen(kx))$ tal que

$$\left| h(x) - A_0 - \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(kx) + B_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon/2 \ ,$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$. Luego, $\forall x \in [a, b]$ se cumple que

$$\left| f(x) - A_0 - \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(kx) + B_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon/2 \qquad (0.44)$$

Consideremos la función $p : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(kx) + B_k sen(kx))$$

Es fácil ver que existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| p^{r)}(x) \right| \leq c|n|^r \ , \ \forall x \in [-\pi, \pi] \ y \ \forall r \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto, utilizando el desarrollo de Taylor de p en $x = 0$, existe un polinomio $p_\varepsilon(x)$ tal que

$$|p(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/2 \ , \ \forall x \in [-\pi, \pi] \tag{0.45}$$

(*intente el lector probar (0.45) ya que es un ejercicio instructivo de Análisis elemental*)
(0.44) y (0.45) proporcionan el resultado deseado.

2. Sea $[a, b]$ un intervalo cualquiera. Consideramos la función $g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\left(\dfrac{b-a}{\pi}x + \dfrac{a+b}{2}\right)$. La función g está en las condiciones del apartado a) y por lo tanto existe un polinomio $q_\varepsilon(x)$ tal que

$$|g(x) - q_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \ , \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Es decir, que

$$\left| f\left(\frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}\right) - q_\varepsilon(x) \right| \leq \varepsilon \ , \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Si $y = \dfrac{b-a}{\pi}x + \dfrac{a+b}{2}$, entonces

$$\left| f(y) - q_\varepsilon\left(\frac{(2y-a-b)\pi}{2(b-a)}\right) \right| \leq \varepsilon \ , \ \forall y \in [a, b]$$

Como $q_\varepsilon\left(\dfrac{(2y-a-b)\pi}{2(b-a)}\right) \equiv p_\varepsilon(y)$ es un polinomio en y, hemos probado el resultado.

Antonio Cañada Villar, 1994

El siguiente ejercicio se refiere a desigualdades integrales que son muy útiles en la teoría de Ecuaciones Diferenciales.

EJERCICIO 29.

1. Sea f absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Demostrar que si $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 0$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx \ \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\ dx \tag{0.46}$$

   con igualdad si y sólo si f es de la forma

$$asen(\cdot) + bcos(\cdot),\ \ a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Sea f absolutamente continua en $[0, \pi]$ tal que $f(0) = f(\pi) = 0$ y $f' \in L^2(0, \pi)$. Demostrar que

$$\int_{0}^{\pi} |f(x)|^2\ dx \ \leq \int_{0}^{\pi} |f'(x)|^2\ dx \tag{0.47}$$

   con igualdad si y sólo si f es de la forma

$$asen(\cdot),\ \ a \in \mathbb{R}.$$

Solución:

1. Si

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

   es la serie de Fourier de f, sabemos que la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

Además, $\mathrm{A}_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = 0$; luego, por la igualdad de Parseval aplicada a f y f', tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\ dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx =$$

$$= \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 \right) \right] =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} ((n^2-1)\mathrm{B}_n^2 + (n^2-1)\mathrm{A}_n^2)$$

que prueba (0.46).

Ahora bien, si en (0.4) tenemos una igualdad, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ((n^2-1)\mathrm{B}_n^2 + (n^2-1)\mathrm{A}_n^2) = 0$, lo que implica que $\mathrm{A}_n = \mathrm{B}_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$. Luego la serie de Fourier de f es

$$\mathrm{A}_1 cos(\cdot) + \mathrm{B}_1 sen(\cdot).$$

Como dicha serie de Fourier debe converger uniformemente a f, tenemos que

$$f(x) = \mathrm{A}_1 cos(x) + \mathrm{B}_1 sen(x),\ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

2. Sea $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la extensión impar a $[-\pi, \pi]$ de f; es decir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ tiene por serie de Fourier

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

entonces la serie de Fourier de $\tilde{f}'$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

Como $\tilde{f}$ es impar, $\mathrm{A}_n = 0,\ \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}'(x)\right|^2 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} \left|\tilde{f}(x)\right|^2 \, dx =$$

$$= 2\left(\int_{0}^{\pi} \left|\tilde{f}'(x)\right|^2 \, dx - \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx\right) =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)\mathrm{B}_n^2$$

Luego

$$\int_{0}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx - \int_{0}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(n^2 - 1)\mathrm{B}_n^2$$

que prueba (0.47).

Si (0.47) es una igualdad, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(n^2-1)\mathrm{B}_n^2 = 0$, lo que obliga a que $\mathrm{B}_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$.

Luego $\tilde{f}(x) = \mathrm{B}_1 sen(x)\ ,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$, de donde se obtiene que $f(x) = \mathrm{B}_1 sen(x)\ ,\ \forall x \in [0, \pi]$.

La última aplicación que vamos a ver surge de un problema muy conocido: Entre todas las curvas planas, cerradas y simples, de longitud dada L, ¿existe alguna de ellas cuyo interior tenga la máxima área?; si la respuesta es positiva, ¿qué curvas verifican tal propiedad?

Como vamos a ver mediante el uso de Series de Fourier, la anterior cuestión puede resolverse de manera elemental.

EJERCICIO 30.

Sea A el conjunto formado por todas las curvas planas, cerradas y simples, de longitud dada $L > 0$, cuyas ecuaciones paramétricas respecto del parámetro arco vienen dadas por funciones de clase C^1 *en* $[0, L]$.

1. Demostrar que si $\gamma \in$ A, entonces
$$\mathrm{S} \leq \frac{L^2}{4\pi} \tag{0.48}$$
donde S es el área del dominio interior a γ.

2. Demostrar que la igualdad se da en (0.48) si y sólo si γ es cualquier circunferencia de longitud L.

Solución:

1. Sea $\gamma \in$ A, con ecuaciones paramétricas $x = x(s), y = y(s)$, donde $x, y : [0, L] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Por ser γ cerrada, $x(0) = x(L),\ y(0) = y(L)$.

   Por el apartado a), 1) del ejercicio 26, una base de $L^2(0, L)$ es el conjunto
$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}},\ \sqrt{\frac{2}{L}} cos \frac{n\pi(2x - L)}{L},\ \sqrt{\frac{2}{L}} sen \frac{n\pi(2x - L)}{L},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$
de manera que, notando por
$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} + \mathrm{B}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$
$$\frac{\mathrm{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{C}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} + \mathrm{D}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$
las Series de Fourier respectivas de las funciones $x,\ y$, tendremos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{B}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{A}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi}{L}\mathrm{D}_n cos\frac{n\pi(2x-L)}{L}-\frac{2n\pi}{L}\mathrm{C}_n sen\frac{n\pi(2x-L)}{L}\right)$$

serán las Series de Fourier respectivas de x' e y'.

Ahora bien, si S es el área de γ_i (interior de γ), entonces

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\int_0^L (x(s)y'(s)-y(s)x'(s))\ ds=$$

$$=\frac{1}{2}<x,y'>-\frac{1}{2}<y,x'>$$

De manera que como

$$\frac{1}{2}<x,y'>=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi}{L}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n<cos\frac{n\pi(2x-L)}{L},\ cos\frac{n\pi(2x-L)}{L}>-\right.$$

$$\left.-\frac{2n\pi}{L}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n<sen\frac{n\pi(2x-L)}{L},\ sen\frac{n\pi(2x-L)}{L}>\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi}{L}\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n\frac{L}{2}-\frac{2n\pi}{L}\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\frac{L}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\pi\left(\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n-\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\right)$$

y análogamente

$$\frac{1}{2}<y,x'>=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n\pi}{L}\mathrm{C}_n\mathrm{B}_n\frac{L}{2}-\frac{2n\pi}{L}\mathrm{D}_n\mathrm{A}_n\frac{L}{2}\right)\right)$$

Se tendrá que

$$\mathrm{S}=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi\left(\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n-\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\right) \tag{0.49}$$

Por otra parte, al ser s el parámetro arco, sabemos que

$$(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 \ , \ \forall s \in [0, L]$$

y así

$$L = \int_0^L 1 \ ds = \int_0^L (x'(s))^2 \ ds + \int_0^L (y'(s))^2 \ ds =$$

= (igualdad de Parseval) =

$$= \frac{L}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2\pi^2}{L^2}\mathrm{B}_n^2 + \frac{4n^2\pi^2}{L^2}\mathrm{A}_n^2\right)\right) +$$

$$+\frac{L}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n^2\pi^2}{L^2}\mathrm{D}_n^2 + \frac{4n^2\pi^2}{L^2}\mathrm{C}_n^2\right)\right) =$$

$$= \frac{L}{2}\frac{4\pi^2}{L^2}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 + \mathrm{D}_n^2 + \mathrm{C}_n^2\right) =$$

$$= \frac{2\pi^2}{L}\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 + \mathrm{D}_n^2 + \mathrm{C}_n^2\right)$$

Así pues:

$$L^2 = 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 + \mathrm{D}_n^2 + \mathrm{C}_n^2\right) \tag{0.50}$$

y por lo tanto

$$L^2 - 4\pi\mathrm{S} =$$

$$= 2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{D}_n^2\right) -$$

$$-4\pi^2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n - \mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\right) =$$

$$= 2\pi^2\left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{D}_n^2\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\mathrm{A}_n\mathrm{D}_n - \mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\right)\right] =$$

$$= 2\pi^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left((n\mathrm{A}_n - \mathrm{D}_n)^2 + (n\mathrm{B}_n + \mathrm{C}_n)^2 \ +\right.\right.$$

$$+(n^2-1)\mathrm{C}_n^2+(n^2-1)\mathrm{D}_n^2\Big)\Big]$$

Luego

$$L^2-4\pi\mathrm{S}\geq 0,\ \ \forall\gamma\in\mathrm{A}$$

que es (0.48).

2. Si $\gamma\in\mathrm{A}$ es tal que $\mathrm{S}=\dfrac{L^2}{4\pi}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(n\mathrm{A}_n-\mathrm{D}_n)^2+(n\mathrm{B}_n+\mathrm{C}_n)^2+(n^2-1)\mathrm{C}_n^2+(n^2-1)\mathrm{D}_n^2\Big]=0$$

Luego $\mathrm{A}_1-\mathrm{D}_1=0$, $\mathrm{B}_1+\mathrm{C}_1=0$ y

$$n\mathrm{A}_n-\mathrm{D}_n=n\mathrm{B}_n+\mathrm{C}_n=\mathrm{C}_n=\mathrm{D}_n=0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$$

Por lo tanto

$$\mathrm{A}_1-\mathrm{D}_1=0\ ,\ \mathrm{B}_1+\mathrm{C}_1=0\ y\ \mathrm{A}_n=\mathrm{B}_n=\mathrm{C}_n=\mathrm{D}_n=0$$

para todo natural $n\geq 2$.

Así pues

$$\begin{aligned} x(s)&=\frac{\mathrm{A}_0}{2}+\mathrm{A}_1 cos\frac{n\pi(2x-L)}{L}+\mathrm{B}_1 sen\frac{n\pi(2x-L)}{L}\\ y(s)&=\frac{\mathrm{C}_0}{2}-\mathrm{B}_1 cos\frac{n\pi(2x-L)}{L}+\mathrm{A}_1 sen\frac{n\pi(2x-L)}{L}\end{aligned}\tag{0.51}$$

Con $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{C}_0,\mathrm{A}_1,\mathrm{B}_1\in\mathbb{R}$ arbitrarios, satisfaciendo (0.50)
$(L^2=2\pi^2\,(\mathrm{B}_1^2+\mathrm{A}_1^2+\mathrm{D}_1^2+\mathrm{C}_1^2)=4\pi^2\,(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{B}_1^2))$

Antonio Cañada Villar, 1994

Ahora bien, (0.51) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia centrada en $\left(\frac{\mathrm{A}_0}{2}, \frac{\mathrm{C}_0}{2}\right)$ y de radio $\frac{L}{2\pi}$, pues

$$\left(x(s) - \frac{\mathrm{A}_0}{2}\right)^2 + \left(y(s) - \frac{\mathrm{C}_0}{2}\right)^2 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 = \frac{L^2}{4\pi^2} \ ,$$

$\forall s \in [0, L]$.

Bibliografía

[1] Aleksandrov, A. D. y otros (1980): *La matemática: su contenido, métodos y significado,* Madrid: Alianza Universidad.

[2] Andrews, L. C. (1986): *Elementary partial differential equations,* New York: Academic Press.

[3] Aparicio, C. y Pérez, J. (1991): *Integral de Lebesgue,* Granada: Copistería la Gioconda.

[4] Apostol, T. M. (1960): *Análisis Matemático,* Barcelona: Reverté.

[5] Braun, M. (1983): *Differential equations and their applications,* New York: Springer-Verlag.

[6] Brezis, H. (1984): *Análisis Funcional,* Madrid: Alianza Universidad Textos.

[7] Burghes, D. N. y Borrie, M. S. (1981): *Modelling with differential equations,* New York: John Wiley and Sons.

[8] Cañada, A. (1994):*Series y transformada de Fourier y aplicaciones, Vol. I,* Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.

[9] Cañada, A. (2000):*Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos,* Relime, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, 3, 293-320.

[10] Cannon, J. R. (1984): *The one-dimensional heat equation,* Reading: Addison-Wesley.

[11] Carleson,L. (1968): *Convergence and summability of Fourier series,* Proc. Int. Cong. Math., Moscow, 1.966; Izdat. Mir, 83-88.

[12] Carleson, L. (1966): *On convergence and growth of partial sums of Fourier series* Acta Math., 116, 135-157.

[13] Casas, E. (1992): *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Santander: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria.

[14] Coddington, E. A. (1961): *An introduction to ordinary differential equations,* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

[15] Coddington, E. A. y Levinson, N. (1984): *Theory of ordinary differential equations,* Malabar: Robert E. Krieger Publishing Company.

[16] Courant, R. D. y Hilbert, D. (1962): *Methods of Mathematical Physics, Vol I y II,* New York: Interscience.

[17] Dieudonné,J. (1981): *History of Functional Analysis,* Amsterdam: North-Holland.

[18] Fatou, P. (1906): *Séries trigonométriques et séries de Taylor,* Acta Math., 30, 335-400.

[19] González-Velasco, E. A. (1992): *Connections in Mathematical Analysis: the case of Fourier series,* Amer. Math. Monthly, 427-441.

[20] González-Velasco, E. A. (1995): *Fourier Analysis and Boundary value problems,* San Diego: Academic Press.

[21] Grandes matemáticos, (1995): *Investigación y Ciencia. Temas 1,* Barcelona: Prensa científica, S.A.

[22] Guzmán, M. de (1996): *El rincón de la Pizarra,* Madrid: Ediciones Pirámide.

[23] Halmos, P. R. (1967): *A Hilbert space problem book.* Princeton: Van Nostrand.

[24] Hobson, E. W. (1957): *The theory of functions of a real variable,* New York: Dover(reprint).

[25] Hochstadt, H. (1973): *Integral equations,* New York: John Wiley and Sons.

[26] Hutson, V. y Pym, J. S. (1980): *Applications of functional analysis and operator theory,* London: Academic Press Inc.

[27] John, F. (1980): *Partial Differential Equations,* Berlin: Springer-Verlag.

[28] Kahane, J. P. y Katznelson, Y. (1966): *Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques,* Studia Math., 26, 305-306.

[29] Katznelson, Y. (1968): *An introduction to Harmonic Analysis,* New York: Wiley.

[30] Kline, M. (1972): *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford University Press. Versión española en Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1.992.

[31] Körner, T. W. (1988): *Fourier Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press.

[32] Mijailov, V. P. (1978): *Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Moscú: Mir.

[33] Mikhlin, S. G. (1970): *Mathematical Physics, an advanced course,* Amsterdam: North-Holland.

[34] Orden y caos, (1990): *Libros de Investigación y Ciencia,* Barcelona: Prensa Científica, S.A.

[35] Peral, I. (1995):*Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales,* Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A.

[36] Protter, M. H. y Weinberger, H. F. (1984): *Maximum principles in differential equations,* New York: Springer-Verlag.

[37] Smoller, J. (1994): *Shock waves and reaction-diffusion equations,* New York: Springer-Verlag.

Antonio Cañada Villar, 1994

[38] Stromberg, K. R. (1981): *An Introduction to classical real analysis,.* Belmot: Wadsworth.

[39] Tijonov, A. N. y Samarski, A. A. (1980): *Ecuaciones de la Física Matemática,* Perú: Mir.

[40] Walker, J. S. (1997): *Fourier Analysis and Wavelet analysis,* Notices of the AMS, 44, 658-670.

[41] Weinberger, H. (1970): *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,* Barcelona: Reverté.

[42] Widder, D. V. (1975): *The heat equation,* New York: Academic Press.

[43] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis: main principles and their applications,* New York: Springer-Verlag.

[44] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics,* New York: Springer-Verlag.

[45] Zygmund, A. (1968): *Trigonometric series,* Cambridge: Cambridge University Press.