Convergencia de Series de Fourier I

(Criterio de Dini. Fenómeno de Gibss)

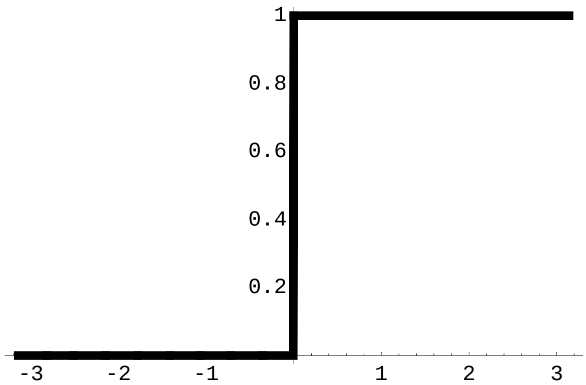
Objetivo de esta práctica: en primer lugar, tendremos oportunidad de visualizar el criterio de Dini sobre convergencia puntual de series de Fourier. Además se pretende que el alumno, a la vista de las gráficas producidas, obtenga conclusiones sobre aspectos en los que quizás no había caído previamente, e incluso que intuya alguna propiedad no expuesta en clase (fenómeno de Gibss). En resumen: el objetivo es doble. Por una parte comprobar (¿comprobar ?) resultados teóricos. Por otra, usar el programa *Mathematica* como "laboratorio" donde podamos experimentar nuevas propiedades (¿nuevas propiedades?). Para los resultados teóricos que se mencionan puedes consultar *A. Cañada: Series de Fourier y Aplicaciones, Pirámide, Madrid, 2002 (capítulo II).*

Comenzamos con una función muy sencilla, que sólo toma dos valores. A pesar de lo elemental de la situación, nos permitirá ilustrar algunos hechos de interés.

```
In[4]:= Clear["Global`**"]
        f[x_] := 0 /; -Pi ≤ x < 0
        f[x_] := 1 /; 0 ≤ x < Pi
```

A continuación podemos decirle a *Mathematica* que nos proporcione la gráfica de la función, dintinguiéndola de los ejes de coordenadas.

```
In[7]:= Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}, PlotStyle → {{Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[7]= - Graphics -
```

(Bueno, en realidad sobra el segmento vertical, pero no sé como suprimirlo).
Seguidamente definimos los coeficientes de Fourier de la función dada.

```
In[8]:= a0 = (1 / Pi) (Integrate[0, {x, -Pi, 0}] + Integrate[1, {x, 0, Pi}])
        a[n_] =
         (1 / Pi) (Integrate[0 * Cos[n * x], {x, -Pi, 0}] + Integrate[1 * Cos[n * x], {x, 0, Pi}])
        b[n_] = (1 / Pi)
          (Integrate[0 * Sin[n * x], {x, -Pi, 0}] + Integrate[1 * Sin[n * x], {x, 0, Pi}])
```

Out[8]= 1

Out[9]= $\frac{\mathrm{Sin}[n\,\pi]}{n\,\pi}$

Out[10]= $\frac{1-\mathrm{Cos}[n\,\pi]}{n\,\pi}$

Ahora definimos las sumas parciales de la correspondiente serie de Fourier.

```
In[11]:= foursum[x_, 0 _] = (a0 / 2)
         foursum[x_, n_] = (a0 / 2) + Sum[a[k] Cos[k * x] + b[k] Sin[k * x], {k, 1, n}]
```

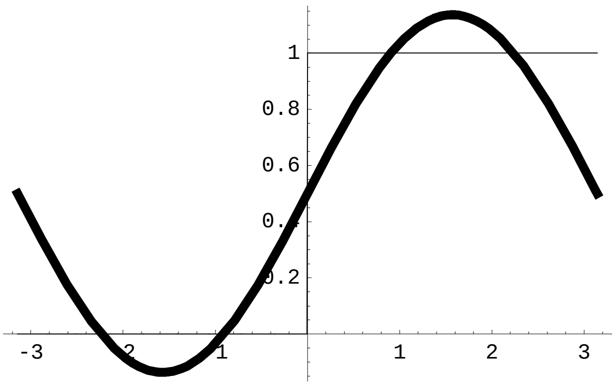
Out[11]= $\frac{1}{2}$

Out[12]= $\frac{1}{2}+\frac{1}{2\,(1+n)\,\pi}\Big(i\,e^{-i\,x}\,\big(-(-e^{-i\,x})^{n}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[1+n,1,2+n,-e^{-i\,x}]-(e^{-i\,x})^{n}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[1+n,1,2+n,e^{-i\,x}]+e^{2\,i\,x}\,(-e^{i\,x})^{n}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[1+n,1,2+n,-e^{i\,x}]+e^{2\,i\,x}\,(e^{i\,x})^{n}\,\mathrm{Hypergeometric2F1}[1+n,1,2+n,e^{i\,x}]-e^{i\,x}\,\mathrm{Log}[1-e^{-i\,(\pi-x)}]-e^{i\,x}\,n\,\mathrm{Log}[1-e^{-i\,(\pi-x)}]+e^{i\,x}\,\mathrm{Log}[1-e^{i\,(\pi-x)}]+e^{i\,x}\,n\,\mathrm{Log}[1-e^{i\,(\pi-x)}]-e^{i\,x}\,\mathrm{Log}[1-e^{-i\,x}]-e^{i\,x}\,n\,\mathrm{Log}[1-e^{-i\,x}]+e^{i\,x}\,\mathrm{Log}[1-e^{i\,x}]+e^{i\,x}\,n\,\mathrm{Log}[1-e^{i\,x}]\big)\Big)$

Salen cosas raras (bueno al menos a mí me parecen raras). No te preocupes y sigue adelante (muchas veces no hay que hacer caso del programa Mathematica).

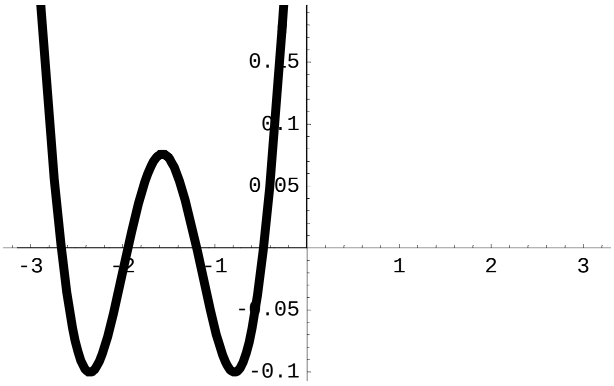
Llegados a este punto, podemos visualizar y comparar las gráficas de la función y algunas sumas parciales de su serie de Fourier.

```
In[13]:= Plot[{f[x], foursum[x, 1]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```



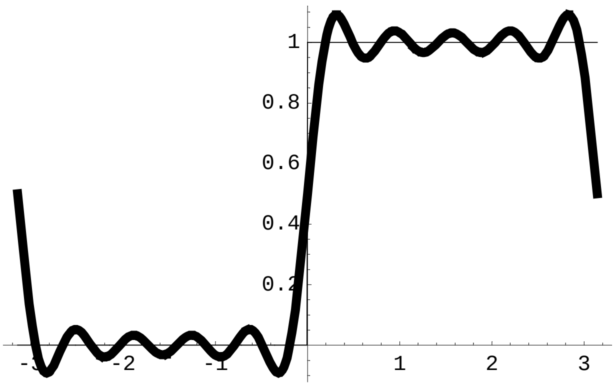
Out[13]= - Graphics -

```
In[14]:= Plot[{f[x], foursum[x, 3]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[14]= - Graphics -
```

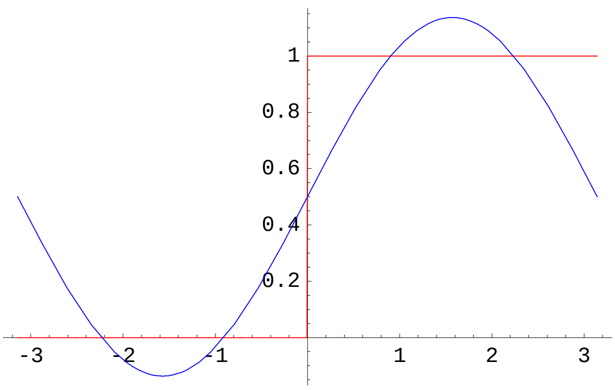
```
In[15]:= Plot[{f[x], foursum[x, 10]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[15]= - Graphics -
```

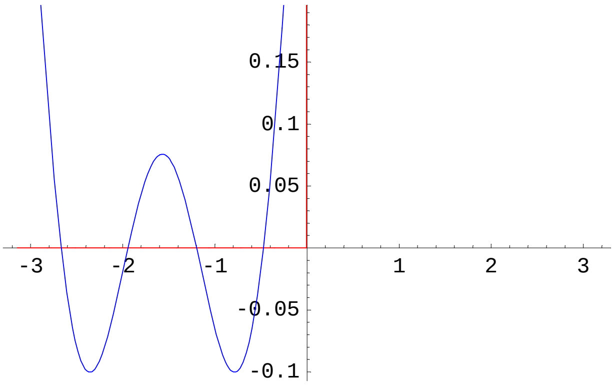
Si lo quieres visualizar más claro, quizás un poco de color venga bien.

```
In[16]:= Plot[{f[x], foursum[x, 1]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



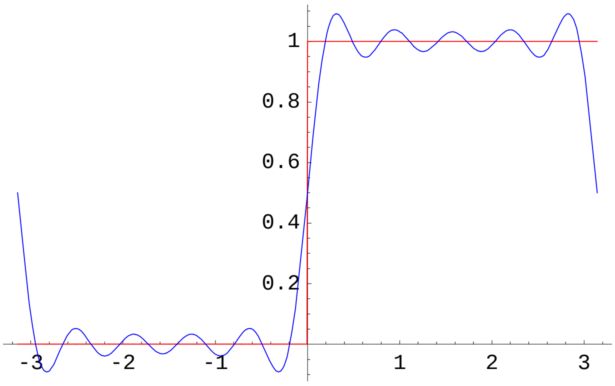

```
Out[16]= - Graphics -
```

```
In[17]:= Plot[{f[x], foursum[x, 3]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```




```
Out[17]= - Graphics -
```

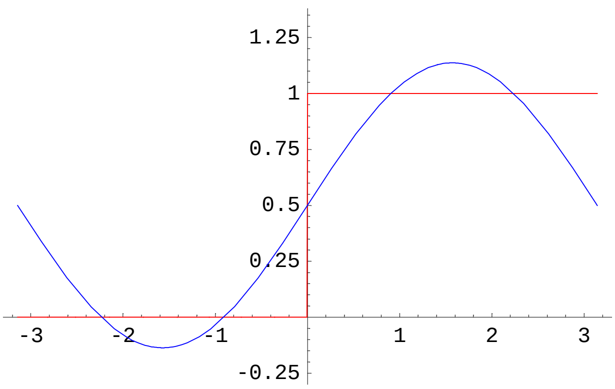
```
In[18]:= Plot[{f[x], foursum[x, 10]}, {x, -Pi, Pi},
          PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

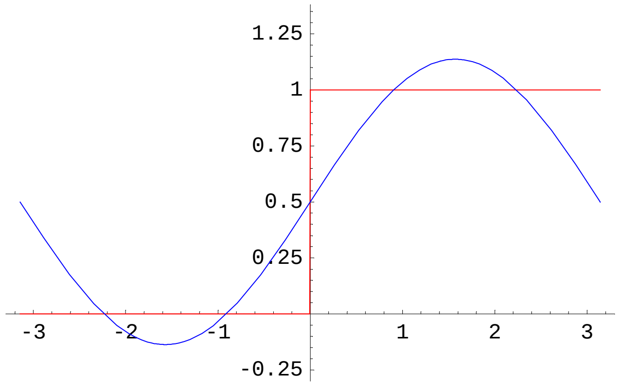


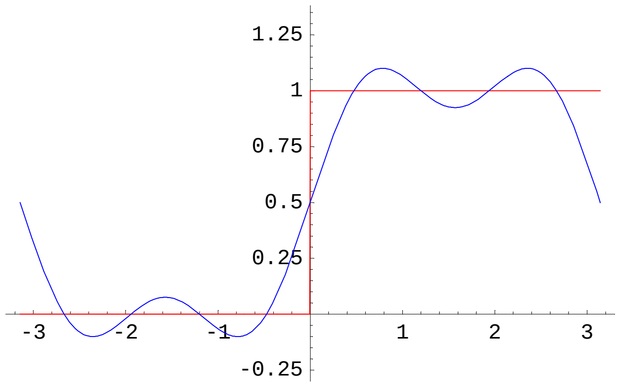

```
Out[18]= - Graphics -
```

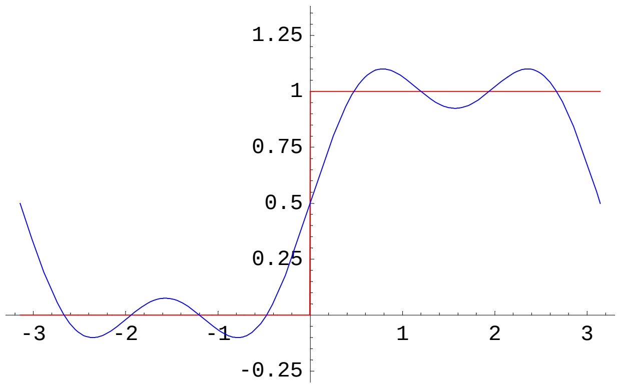
Incluso podemos conseguir fácilmente una animación (una vez que pulses la tecla "Intro", espera un poco mientras se elaboran todas las gráficas. Después haz doble click en la última y verás lo que sucede).

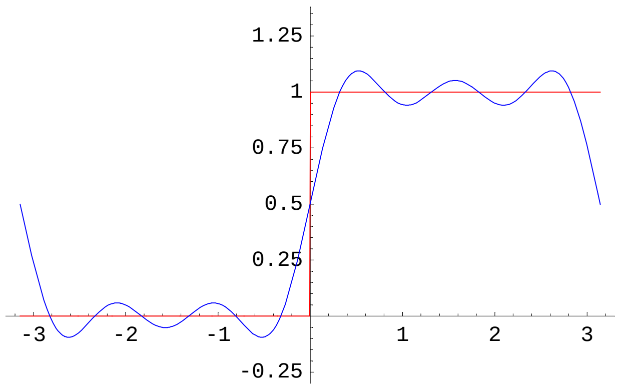
```
In[19]:= For[n = 1, n ≤ 10, n = n + 1, Plot[{f[x], foursum[x, n]}, {x, -Pi, Pi},
           PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, PlotRange → {-0.3, 1.38}]]
```

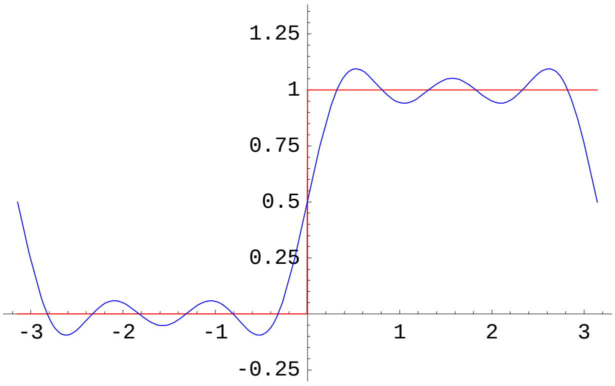


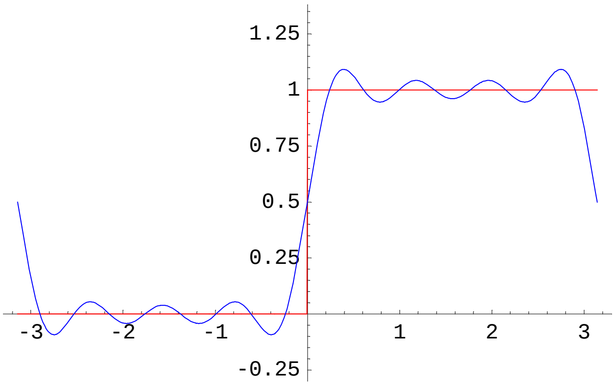

1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3

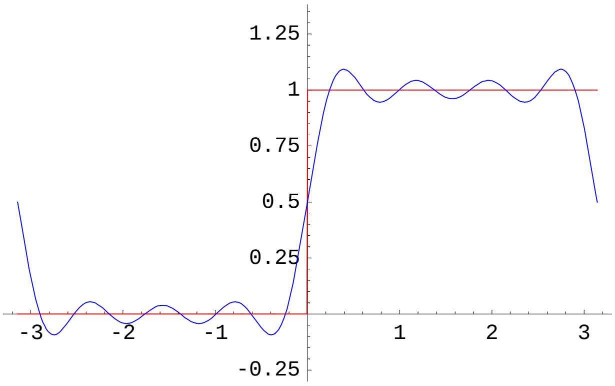

1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3

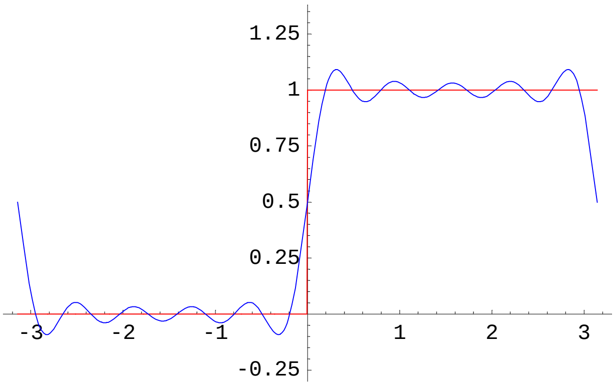

1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3

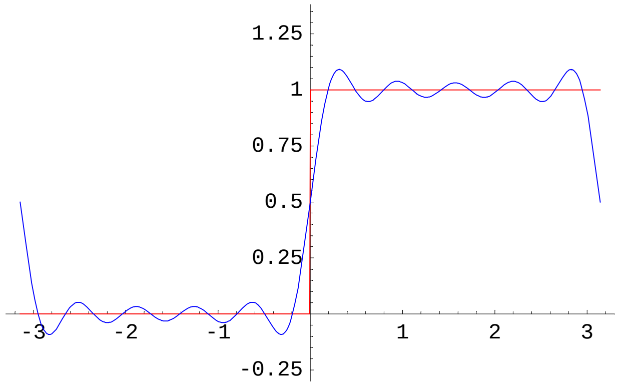

1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3


1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3


1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3


1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3


1.25
1
0.75
0.5
0.25
-0.25
-3
-2
-1
1
2
3



Ahora viene la hora de hacer algunas reflexiones:
1) Esto parece haber sido suficiente para comprobar (con esta función) el criterio de Dini. ¿En qué puntos del intervalo [-π,π] puedes aplicar dicho criterio?. Efectivamente, en los intervalos (-π,0) y (0,π).
Lo anterior es sencillo, pero observa las gráficas algo más detenidamente. La función f tiene una discontinuidad de salto en x= 0. Sin embargo, cualquier suma parcial de su serie de Fourier es continua en toda la recta real, en particular en el intervalo [-π,π]. ¿Cómo hacer compatible todo esto?. Observa, observa y observa...
2) ¿Convergen las sumas parciales de la serie de Fourier en x=0? ¿Será esto un fenómeno general en discontinuidades de salto? *Puede consultarse el libro: T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.*
3) ¿Has observado que los valores de las gráficas de las sumas parciales de la serie de Fourier exceden a los de la función dada cerca del origen ?.En realidad, parece que dichas sumas parciales "convergen a un segmento vertical" cuya longitud es estrictamente mayor que el valor del salto de la función. ¿Esto será así siempre?. Lo único que podemos hacer por ahora es probar con otras funciones similares. Si has llegado a la conclusión de que siempre ocurre, procura documentarte bibliográficamente y, quizás, obtener algún resultado teórico. En realidad, lo que estás observando se conoce con el nombre de "fenómeno de Gibss", en honor del físico e ingeniero americano Josiah Gibbs (1839-1903). Sus primeras investigaciones en Yale estuvieron relacionadas con el diseño de engranajes. Si quieres conocer algo más de este científico e ingeniero, puedes consultar las páginas web:

http://scienceworld.wolfram.com/biography/Gibbs.html

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Gibbs.html

Si lo que quieres es tener una información más precisa del "fenómeno de Gibss", prueba a visitar la página web

http://mathworld.wolfram.com/GibbsPhenomenon.html

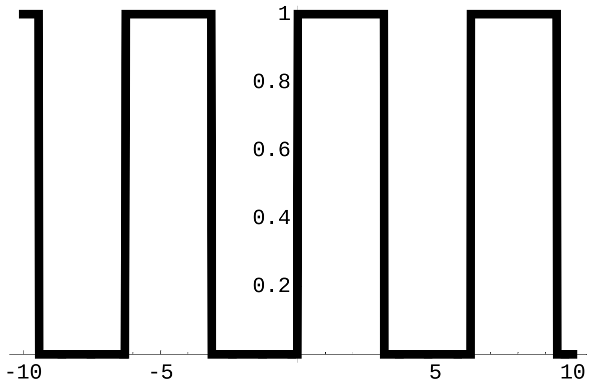
Veamos a continuación qué ocurre si trabajamos con extensiones 2π-periódicas de las funciones dadas. En primer lugar, extendamos la función f de manera 2π-periódica. Esto podemos hacerlo de la forma siguiente:

```
In[20]:= L = Pi
         g[x_] := f[Mod[x + L, 2 * L] - L]

Out[20]= π
```

Ahora podemos pedirle al programa *Mathematica* la gráfica de la función 2π-periódica que hemos definido. Por ejemplo, en el intervalo (-10,10).

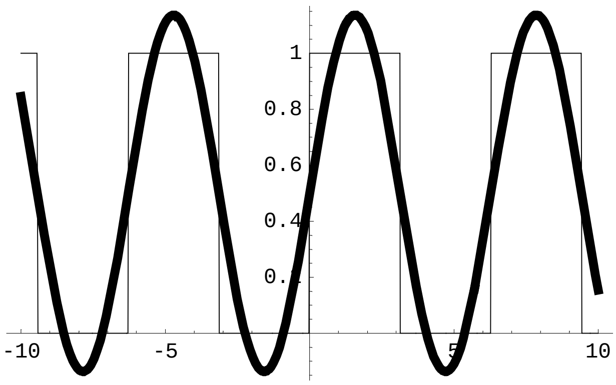
```
In[22]:= Plot[g[x], {x, -10, 10}, PlotStyle → {{Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[22]= - Graphics -
```

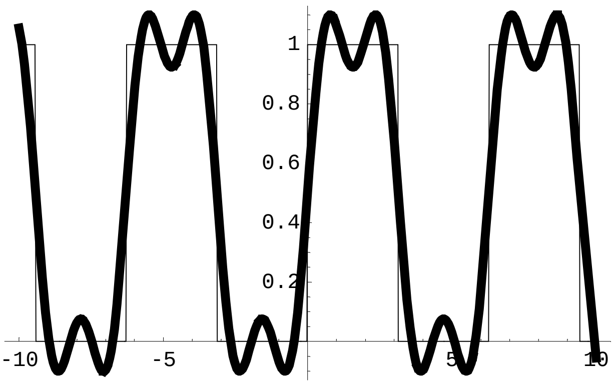
Y compararla con algunas sumas parciales de su serie de Fourier.

```
In[23]:= Plot[{g[x], foursum[x, 1]}, {x, -10, 10},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```



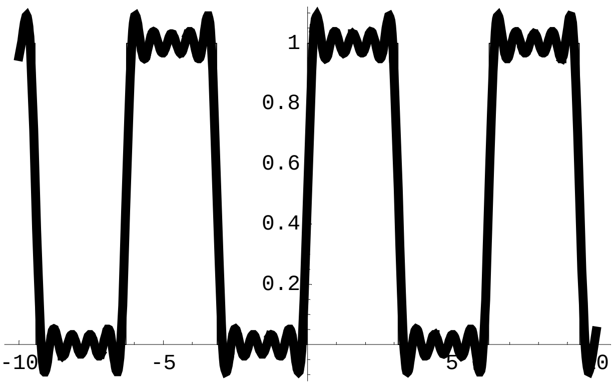

```
Out[23]= - Graphics -
```

```
In[24]:= Plot[{g[x], foursum[x, 3]}, {x, -10, 10},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[24]= - Graphics -
```

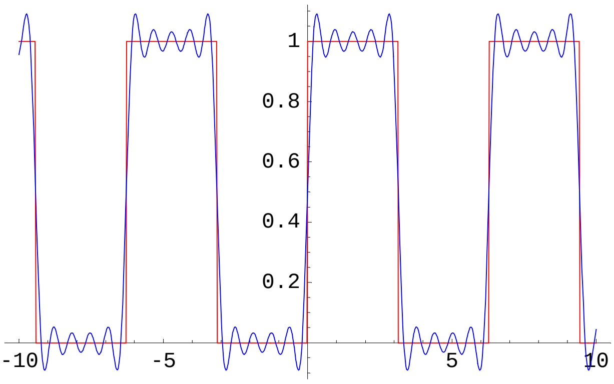
```
In[25]:= Plot[{g[x], foursum[x, 10]}, {x, -10, 10},
          PlotStyle → {{Thickness[0.002]}, {Thickness[0.015]}}]
```




```
Out[25]= - Graphics -
```

Como antes, podemos poner un poco de color a las mismas.

```
In[26]:= Plot[{g[x], foursum[x, 10]}, {x, -10, 10},
          PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```




```
Out[26]= - Graphics -
```

Has de observar que, si se quiere trabajar de manera adecuada y comparar fuera del intervalo [-π,π] la función que nos dan con la serie de Fourier correspondiente, ha de hacerse una extensión 2π-periódica de f.

Tarea para entregar al profesor (antes del 5 de Noviembre): debes probar los diferentes aspectos tratados en esta práctica con otras funciones. Un buen ejemplo puede ser la función valor absoluto de x en [- π, π]; después se extiende de manera 2π-periódica a toda la recta real. Observarás que en este caso no hay fenómeno de Gibss. Sin embargo sí que se aprecia un aspecto nuevo: parece ser que la convergencia de las sumas parciales de la serie de Fourier es más rápida en los puntos donde la función es derivable. ¿Será esto así en general? ¿Hay relación entre la regularidad de una función y la velocidad de convergencia de su serie de Fourier? Prueba con otras funciones.