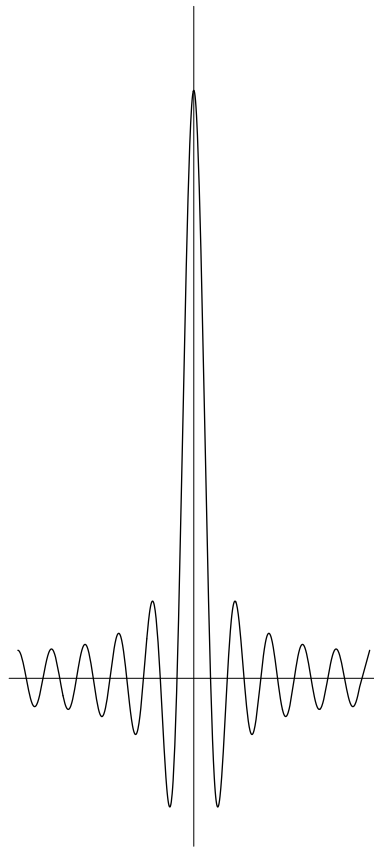


LECCIONES SOBRE LAS SERIES Y TRANSFORMADAS DE FOURIER

Javier Duoandikoetxea



UNAN-Managua, 2003

Presentación

Las series e integrales de Fourier constituyen un tema clásico del análisis matemático. Desde su aparición en el siglo XVIII en el estudio de las vibraciones de una cuerda, las series de Fourier han sido una piedra de toque para el desarrollo de los conceptos básicos del análisis –función, integral, serie, convergencia...–, y la evolución de estos conceptos ha ido abriendo a su vez nuevos rumbos en el análisis de Fourier. Así lo expresa Zygmund en el prólogo de su famoso libro sobre series trigonométricas (1958):

Esta teoría ha sido una fuente de nuevas ideas para los analistas durante los dos últimos siglos y probablemente lo será en los próximos años. Muchas nociones y resultados básicos de la teoría de funciones han sido obtenidos por los matemáticos trabajando sobre series trigonométricas. Es concebible pensar que estos descubrimientos podían haber sido realizados en contextos diferentes, pero de hecho nacieron en conexión con la teoría de las series trigonométricas. No fue accidental que la noción de función aceptada ahora generalmente fuera formulada en la celebrada memoria de Dirichlet (1837) que trata de la convergencia de la serie de Fourier, o que la definición de integral de Riemann en su forma general apareciera en el *Habilitationsschrift* de Riemann sobre series trigonométricas, o que la teoría de conjuntos, uno de los desarrollos más importantes de las matemáticas del siglo XIX, fuera creada por Cantor en su intento de resolver el problema de los conjuntos de unicidad para series trigonométricas. En épocas más recientes, la integral de Lebesgue se desarrolló en estrecha conexión con la teoría de series de Fourier y la teoría de funciones generalizadas (distribuciones) con la de las integrales de Fourier.

Las notas se dividen en dos grandes bloques: el primero trata de series de Fourier y el segundo, de integrales de Fourier; en medio, un tema sobre espacios de Hilbert y sistemas ortogonales de funciones que da la estructura funcional abstracta en la que se pueden colocar las series de Fourier.

Para la lectura de los temas relativos a series no se exige más integral que la de Riemann, de modo que se pueden estudiar tras haber seguido un curso de análisis de una variable, salvo en algunas de las aplicaciones. Sirven además para fijar los conceptos básicos del análisis, tan ligados al desarrollo histórico de la teoría. Las series aparecen en senos y cosenos, a la manera clásica, con sólo algunas indicaciones sobre su versión compleja.

En la teoría de la transformada de Fourier he creído conveniente trabajar desde el principio con la integral de Lebesgue y, por supuesto, usar la forma compleja. En esto no parece haber duda entre los matemáticos de hoy, si nos atenemos a los libros. La integral de Lebesgue ahorra argumentos en las pruebas porque tiene acceso a resultados más potentes y, con todo, más sencillos de aplicar (teorema de convergencia dominada y teorema de Fubini, por ejemplo). Las dificultades de definición de la transformada de Fourier para funciones no integrables también exigen recursos de análisis no elemental, mejor adaptados a la integral de Lebesgue.

En un último capítulo se muestra la manera en que la transformada de Fourier se suele usar en el mundo real. La adaptación al cálculo numérico exige el uso de una versión discreta y las técnicas involucradas son de tipo algebraico. Además se ve cómo el algoritmo de la transformada rápida de Fourier permite ahorrar cálculos numéricos en determinados casos.

Termino el texto con tres apéndices. El primero repasa las series numéricas y funcionales y conviene leerlo antes de estudiar las series de Fourier, para recordar conceptos que después se usarán. El segundo expone las integrales de Riemann y Lebesgue; los resultados de la primera se utilizan en la parte de series, los de la segunda en la de transformadas. Finalmente, el tercer apéndice hace un recorrido histórico a través de la teoría de series de Fourier, en el que se muestra su implicación en la evolución del análisis matemático.

Leioa, diciembre de 2002

Escribí la primera versión de estas notas para el curso sobre *Análisis de Fourier* que impartí en la Maestría de Matemática de la UNAN-Managua en febrero de 2003. La versión actual incorpora correcciones y cambios introducidos al finalizar el curso. Agradezco a Manuel Aguirre y a Luis Gámez la organización y coordinación de la maestría; a los trece estudiantes que siguieron el curso (Damaris, Wilfredo, Yesenia, Jorge, Marlon, Benito, Eugenio, Pilar, Elmer, Hellen, Xiomara, Matilde y Ramón) su interés y la excursión a Selva Negra; y a Tim Bratten, de la Universidad Nacional del Centro de la provincia de Buenos Aires en Tandil (Argentina), su compañía en los largos ratos que pasamos en la Casa de Protocolo 169 de la UNAN.

Leioa, abril de 2003

Índice

Presentación	i
Capítulo 1. La serie de Fourier	1
§1.1. Series trigonométricas y polinomios trigonométricos	1
§1.2. Series de Fourier	2
§1.3. Propiedades elementales de los coeficientes	3
§1.4. Desigualdad de Bessel	4
§1.5. Amplitud y fase	5
§1.6. Variantes de la serie de Fourier	6
§1.7. ¿Qué funciones integrables?	7
§1.8. Problemas	7
Capítulo 2. Convergencia puntual de la serie de Fourier	11
§2.1. Núcleo de Dirichlet	11
§2.2. Lema de Riemann-Lebesgue	13
§2.3. Propiedad de localización	14
§2.4. Primeros teoremas de convergencia	14
§2.5. El teorema de Dirichlet	16
§2.6. Otros teoremas de convergencia	18
§2.7. Algunos ejemplos	20

§2.8. Problemas	21
Capítulo 3. Convergencia uniforme de la serie de Fourier	23
§3.1. La convergencia uniforme más sencilla	23
§3.2. Localización uniforme	25
§3.3. Otros criterios de convergencia uniforme	26
§3.4. Problemas	27
Capítulo 4. Series de Fourier de funciones continuas	29
§4.1. Un resultado negativo	29
§4.2. Una prueba de existencia	31
§4.3. Funciones continuas sin derivada	32
Capítulo 5. Integración y derivación de series de Fourier	35
§5.1. Integración término a término de series de Fourier	35
§5.2. Derivación término a término de series de Fourier	38
§5.3. Problemas	39
Capítulo 6. Fenómeno de Gibbs	41
§6.1. El fenómeno de Gibbs para funciones con saltos	41
§6.2. Problemas	44
Capítulo 7. Sumabilidad de series de Fourier	45
§7.1. Sumabilidad Cesàro	45
§7.2. Sumabilidad Abel-Poisson	49
§7.3. Sumabilidad uniforme	50
§7.4. Aproximación en media	51
§7.5. Convergencia en media cuadrática e igualdad de Plancherel	53
§7.6. Problemas	55
Capítulo 8. Resolución de algunas ecuaciones en derivadas parciales	57
§8.1. La cuerda vibrante	57
§8.2. La difusión del calor	59
§8.3. Problemas	60

Capítulo 9. Otras aplicaciones de las series de Fourier	63
§9.1. Desigualdad de Wirtinger	63
§9.2. Problema isoperimétrico	63
§9.3. Equidistribución de sucesiones aritméticas	65
§9.4. Problemas	66
Capítulo 10. Sistemas ortogonales de funciones	67
§10.1. Producto escalar	67
§10.2. Sistemas ortogonales y ortonormales	69
§10.3. Espacios de Hilbert	70
§10.4. Base de Haar	72
§10.5. Problemas	73
Capítulo 11. Transformada de Fourier en L^1	77
§11.1. Transformada de Fourier	78
§11.2. Un teorema de inversión	82
§11.3. Resultados de convergencia puntual	83
§11.4. Convolución y transformada de Fourier	85
§11.5. Resultados de sumabilidad	86
§11.6. Transformada de Fourier en senos y en cosenos	89
§11.7. Transformada de Fourier en \mathbf{R}^n	89
§11.8. Problemas	89
Capítulo 12. Transformada de Fourier en L^2	93
§12.1. Igualdad de Plancherel en $L^1 \cap L^2$	93
§12.2. Definición de la transformada de Fourier en L^2	95
§12.3. Teorema de inversión y otras propiedades	96
§12.4. La transformada de Fourier en L^p , $1 < p < 2$	98
§12.5. Otra definición de la transformada de Fourier en L^2	99
§12.6. Problemas	100
Capítulo 13. Aplicaciones de la transformada de Fourier	103
§13.1. Principio de incertidumbre	103

§13.2.	Fórmula de sumación de Poisson	104
§13.3.	Ecuación del calor	105
§13.4.	Ecuación de Schrödinger	105
§13.5.	Probabilidad: función característica y teorema central del límite	106
§13.6.	Funciones de banda limitada y teorema de muestreo	108
§13.7.	Funciones continuas sin derivada	111
§13.8.	Problemas	112
Capítulo 14.	Transformadas de Fourier discreta y rápida	115
§14.1.	Transformada de Fourier discreta	116
§14.2.	Transformada de Fourier rápida	119
§14.3.	Nota histórica	121
§14.4.	Problemas	122
Apéndice A.	Sucesiones y series numéricas y de funciones	125
§A.1.	Sucesiones numéricas	125
§A.2.	Series numéricas	127
§A.3.	Sucesiones de funciones	131
§A.4.	Series de funciones	134
§A.5.	Problemas	137
Apéndice B.	Integral de Riemann e integral de Lebesgue	141
§B.1.	Integral de Riemann	141
§B.2.	Integral de Lebesgue	146
§B.3.	Problemas	152
Apéndice C.	Algunas notas históricas y galería de personajes	155
§C.1.	Fourier	155
§C.2.	Los precursores	157
§C.3.	Dirichlet	161
§C.4.	Riemann	162
§C.5.	Convergencia y divergencia	165

§C.6. La sumabilidad	166
§C.7. Los primeros años del siglo XX	167
§C.8. La convergencia en L^p	168
Bibliografía	169
Índice de términos	171

La serie de Fourier

1.1. Series trigonométricas y polinomios trigonométricos

Se llama *serie trigonométrica* de periodo 2π a toda serie de funciones de la forma

$$(1.1) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Se llama *polinomio trigonométrico* de grado N y periodo 2π a toda expresión de la forma

$$(1.2) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Si al menos uno de los coeficientes a_N y b_N es distinto de cero se dice que el grado del polinomio es N . Obsérvese que las sumas parciales de las series trigonométricas (1.1) son polinomios trigonométricos.

Utilizando fórmulas trigonométricas elementales para sumas de ángulos, $\cos kx$ y $\sin kx$ se pueden expresar en función de $\cos x$ y $\sin x$ y sus potencias y productos¹. El grado máximo de los monomios que aparecen al desarrollar $\cos kx$ y $\sin kx$ de esta manera es precisamente k y si lo hacemos con un polinomio trigonométrico de grado N , el grado máximo será N .

¹Una manera rápida de conseguir estas fórmulas es utilizando la fórmula de A. de Moivre $(\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx$. Se desarrolla el término de la izquierda por el binomio de Newton y se igualan las partes real e imaginaria.

Utilizando otra vez fórmulas elementales se ve que al multiplicar dos polinomios trigonométricos de grados N y M , se obtiene un polinomio trigonométrico de grado $N + M$. Está claro que el grado no puede ser mayor que éste, pero hay que probar (y se deja como ejercicio) que al menos uno de los coeficientes de los términos de mayor grado no es cero. (Conviene observar que esta propiedad puede no ser cierta si los coeficientes son números complejos como se puede comprobar multiplicando $\cos x + i \sin x$ y $\cos x - i \sin x$.)

1.2. Series de Fourier

Dada una función periódica de periodo 2π buscamos una serie trigonométrica que la represente, es decir, que coincida con ella en algún sentido.

1.2.1. Ortogonalidad del sistema trigonométrico.

La familia de funciones $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ que interviene en la serie (1.1) satisface la siguiente *propiedad de ortogonalidad*²:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx = 0,$$

para cualquier par φ_1 y φ_2 de funciones distintas de la familia. Si $\varphi_1 = \varphi_2$ la integral es π , salvo para la función 1 en cuyo caso es 2π .

1.2.2. Los coeficientes de Fourier.

Si suponemos que la serie (1.1) converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ a la función f , escribimos la igualdad

$$(1.3) \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

y la integramos en $[-\pi, \pi]$ (la convergencia uniforme permite integrar término a término la serie según el teorema A.16), obtenemos

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi a_0,$$

de donde sale el valor de a_0 . Del mismo modo, si multiplicamos la igualdad (1.3) por $\cos kx$ e integramos en $[-\pi, \pi]$, la propiedad de ortogonalidad da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \pi a_k.$$

Haciendo lo mismo con $\sin kx$ llegamos a

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \pi b_k.$$

²En el capítulo 10 se verá la razón de este nombre.

Los valores de a_k, b_k que se obtienen son los siguientes:

$$(1.4) \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

Definición. Dada una función integrable f , los números $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ y $\{b_k, k = 1, 2, \dots\}$ dados por las fórmulas (1.4) se llaman *coeficientes de Fourier* de f . La serie trigonométrica (1.1) construida con estos coeficientes se llama *serie de Fourier* de f .

Los coeficientes dependen de la función y cuando intervienen simultáneamente coeficientes de varias funciones distintas, conviene hacer explícita esta dependencia; en esos casos escribiremos $a_k(f)$ y $b_k(f)$.

Observemos que si f es un polinomio trigonométrico, el intercambio de sumas e integrales está perfectamente justificado por la linealidad de la integral y deducimos que los coeficientes del polinomio trigonométrico (1.2) vienen dados por las fórmulas (1.4).

Una vez que asociamos a una función integrable su serie de Fourier de la manera indicada, el problema básico con el que nos vamos a enfrentar se puede formular del modo siguiente:

Encontrar condiciones (suficientes) sobre la función que aseguren la convergencia de la serie de Fourier y estudiar la suma de la serie.

La descomposición de una función en las componentes que constituyen los términos de su serie de Fourier es un proceso de *análisis* de la función; la recuperación de la función a partir de sus componentes es la *síntesis*.

1.3. Propiedades elementales de los coeficientes

1. Las sucesiones $\{a_k, k = 0, 1, 2, \dots\}$ y $\{b_k, k = 1, 2, \dots\}$ están acotadas; en efecto,

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| \, dx.$$

2. *Linealidad:*

$$a_k(f + g) = a_k(f) + a_k(g), \quad b_k(f + g) = b_k(f) + b_k(g).$$

3. Si f' existe y es continua,

$$(1.5) \quad a_k(f) = -\frac{b_k(f')}{k}, \quad b_k(f) = \frac{a_k(f')}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Aquí la continuidad y la existencia de derivada se entienden referidas a la función extendida periódicamente. Esta propiedad se demuestra integrando por partes; en realidad, si f es continua, es suficiente con que sea derivable a trozos y f' continua a trozos (incluso valen situaciones más generales que comentamos en la sección 5.1). Hay otras

versiones para cuando f tiene discontinuidades (véase el problema 1.7).

4. Si f es *par* (es decir, $f(-x) = f(x)$), se tiene $b_k(f) = 0$ para todo k y la fórmula para a_k se puede escribir

$$(1.6) \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx.$$

Cuando f es *impar* (es decir, $f(-x) = -f(x)$), tenemos $a_k(f) = 0$ para todo k y

$$(1.7) \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin kx \, dx.$$

1.4. Desigualdad de Bessel

Sea p_N el polinomio trigonométrico de grado N

$$p_N(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k \cos kx + d_k \sin kx).$$

De la propiedad de ortogonalidad se deduce que

$$(1.8) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |p_N(x)|^2 \, dx = \pi \left[\frac{c_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (c_k^2 + d_k^2) \right].$$

Esta fórmula es la *igualdad de Plancherel* para polinomios trigonométricos; más adelante (corolario 7.10) aparecerá en el caso general.

Dada una función f de cuadrado integrable (f^2 es una función integrable) buscamos el polinomio trigonométrico de grado N que mejor aproxima a f en el sentido de los mínimos cuadrados, o sea, el que hace mínimo el valor de la integral de $|f - p_N|^2$ en un periodo. Puesto que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - p_N|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} (f^2 - 2fp_N + p_N^2),$$

usando la definición de los coeficientes de Fourier y (1.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f - p_N|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - 2\pi \sum_{k=1}^N (c_k a_k + d_k b_k) \\ &\quad - \pi a_0 c_0 + \pi \frac{c_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^N (c_k^2 + d_k^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right] \\ &\quad + \pi \left[\frac{(a_0 - c_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k - c_k)^2 + (b_k - d_k)^2 \right], \end{aligned}$$

donde se ve que el valor mínimo se consigue eligiendo $c_k = a_k$ y $d_k = b_k$.

Teorema 1.1. *El polinomio trigonométrico de grado N que mejor aproxima a una función f de cuadrado integrable en el sentido de los mínimos cuadrados es el que tiene como coeficientes los coeficientes de Fourier de f .*

Es equivalente a decir que ese polinomio trigonométrico es la N -ésima suma parcial de la serie de Fourier de f .

Si en el cálculo anterior hacemos $c_k = a_k$ y $d_k = b_k$ y tenemos en cuenta que el primer miembro siempre es positivo, tenemos como consecuencia

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2$$

para cualquier N . Esta desigualdad ofrece una cota superior para las sumas parciales de una serie de términos positivos por lo que podemos deducir el siguiente resultado.

Teorema 1.2 (Desigualdad de Bessel). *Si f^2 es integrable,*

$$(1.9) \quad \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2.$$

En particular, para las funciones de cuadrado integrable deducimos que las sucesiones de sus coeficientes de Fourier $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ convergen a cero (condición necesaria de convergencia de la serie). Obsérvese que aunque no toda función integrable es de cuadrado integrable, sí lo es si está acotada.

1.5. Amplitud y fase

Dado el par (a_n, b_n) podemos definir $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ y un ángulo φ_n de modo que

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \sin \varphi_n = -\frac{b_n}{A_n}.$$

Entonces se tiene

$$a_k \cos kx + b_k \sin kx = A_k \cos(kx + \varphi_k),$$

y la serie trigonométrica (1.1) se escribe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx + \varphi_k).$$

El coeficiente A_k es la *amplitud* y φ_k es la *fase* del k -ésimo término.

1.6. Variantes de la serie de Fourier

1.6.1. Cambio de periodo.

Hemos considerado funciones periódicas de periodo 2π . Si el periodo es 2ℓ , la serie trigonométrica debe modificarse y tomarse de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right).$$

Las fórmulas de los coeficientes también deben adaptarse convenientemente y quedan

$$a_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi k x}{\ell} dx, \quad b_k = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi k x}{\ell} dx.$$

1.6.2. Series de Fourier de senos y cosenos.

Dada una función en el intervalo $(0, \pi)$, se pueden definir muchas funciones en $(-\pi, \pi)$ que coincidan con ella en $(0, \pi)$; cada una de las extensiones tendrá una serie de Fourier propia. Pero algunas extensiones tienen especial interés.

Teniendo en cuenta la propiedad 4 de la sección 1.3, se puede elegir la extensión de manera que tengamos una función par y, en ese caso, la serie de Fourier sólo tiene cosenos. Se llama *serie de Fourier de cosenos* de la función original y sus coeficientes se calculan por la fórmula (1.6) (en la que sólo interviene la función dada en el intervalo original).

Del mismo modo, si elegimos una extensión impar, la serie que resulta es la *serie de Fourier de senos* de la función dada y sus coeficientes vienen determinados por (1.7).

Se pueden hacer construcciones semejantes a partir de cualquier intervalo.

1.6.3. Forma compleja de la serie de Fourier.

La función real con valores complejos e^{it} se define como

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

y cambiando t por $-t$ se tiene también

$$e^{-it} = \cos t - i \sin t.$$

Sumando y restando estas expresiones se deduce

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Entonces, la serie de Fourier de una función se puede escribir en forma compleja como

$$(1.10) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}.$$

Las propiedades de los coeficientes de Fourier reales que hemos visto en este capítulo tienen sus equivalentes para los coeficientes complejos; quedan como ejercicio (problema 1.10).

1.7. ¿Qué funciones integrables?

Deliberadamente he dejado el término *integrable* sin calificar de modo que podemos dudar si hablamos de la integral de Riemann o de la de Lebesgue. Desde la aparición de ésta a principios del siglo XX, es el marco natural para las series de Fourier. Pero toda la teoría clásica se desarrolló en el siglo XIX en términos de la integral de Riemann, así que quien no conozca la teoría de la integral de Lebesgue puede considerar que en todos los enunciados referidos a series de Fourier hablamos de funciones integrables Riemann. Sólo hay que hacer una observación: para la integral de Riemann de funciones no acotadas se consideran integrales impropias y en ese caso los resultados se limitan a las que son absolutamente convergentes.

El apéndice B recoge las propiedades principales de las integrales de Riemann y de Lebesgue. En las demostraciones del texto supondremos que las funciones son acotadas y no haremos los detalles de la extensión a funciones no acotadas. Normalmente será suficiente con pasar por una aproximación a través de funciones acotadas.

1.8. Problemas

- 1.1 Calcular los coeficientes de Fourier de las funciones periódicas de periodo 2π que siguen. Indicar en qué casos el criterio de Weierstrass (teorema A.18 del apéndice A) permite asegurar la convergencia uniforme de las series que resultan:

- (i) $f(x) = x^2$ en $(-\pi, \pi)$;
- (ii) $f(x) = x^2$ en $(0, 2\pi)$;
- (iii) $f(x) = |\sin x|$ en $(-\pi, \pi)$;
- (iv) $f(x) = e^{ax}$ en $(-\pi, \pi)$ con $a \neq 0$;
- (v) $f(x) = \cos ax$ en $(-\pi, \pi)$ con a no entero;
- (vi) $f(x) = \sin ax$ en $(-\pi, \pi)$ con a no entero;
- (vii) $f(x) = (\pi - x) \sin x$ en $(-\pi, \pi)$;
- (viii) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\pi, 0), \\ x & \text{si } x \in (0, \pi); \end{cases}$

$$(ix) f(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x \in (-\pi, 0), \\ e^x & \text{si } x \in (0, \pi). \end{cases}$$

1.2 Escribir la serie de Fourier de la función periódica $f(x) = \left| \cos \frac{\pi x}{\ell} \right|$.

1.3 Obtener los coeficientes de Fourier de la función

$$f_\delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\pi, \delta), \\ 1/\delta & \text{si } x \in (-\delta, \delta), \\ 0 & \text{si } x \in (\delta, \pi), \end{cases}$$

y calcular $\lim_{\delta \rightarrow 0} a_n(f_\delta)$ y $\lim_{\delta \rightarrow 0} b_n(f_\delta)$.

1.4 Escribir la serie de Fourier de senos de la función $f(x) = \cos x$ en $(0, \pi)$.

1.5 Escribir la serie de Fourier de cosenos de la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, h), \\ 0 & \text{si } x \in (h, \pi). \end{cases}$$

1.6 Escribir la serie de Fourier de senos y la de cosenos de la función

$$f(x) = \begin{cases} \pi/3 & \text{si } x \in (0, \pi/3), \\ 0 & \text{si } x \in (\pi/3, 2\pi/3), \\ -\pi/3 & \text{si } x \in (2\pi/3, \pi). \end{cases}$$

1.7 (a) Probar (1.5) cuando f' existe y es continua. Comprobar que si f es continua, basta con que f' exista a trozos y sea continua a trozos.

(b) Supongamos que f es continua excepto en el punto x_0 (y sus trasladados en múltiplos de 2π) en el que tiene una discontinuidad de salto. Supongamos además que f es derivable a trozos y que f' es continua a trozos, ¿cuál es la relación entre los coeficientes de Fourier de f y f' ?

1.8 Sea f una función definida en $(-\pi, \pi)$, impar con respecto a $x = 0$ y par con respecto a $x = \pi/2$, es decir,

$$f(-x) = -f(x), f(\pi/2 + x) = f(\pi/2 - x).$$

Demostrar que los coeficientes de Fourier b_{2k} son nulos y dar una fórmula para los no nulos en función de los valores de f en $(0, \pi/2)$.

¿Cómo debería ser f para que los coeficientes a_{2k} y los b_k fuesen nulos y sólo quedasen los a_{2k+1} ?

1.9 Probar que los coeficientes de Fourier se pueden calcular como

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \frac{\pi}{k})] \cos kx \, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x - \frac{\pi}{k})] \sin kx \, dx.$$

(Sugerencia: escribir cada coeficiente en dos formas equivalentes y hacer el promedio.)

Deducir que si la función satisface una *condición de Hölder de orden α* ($0 < \alpha \leq 1$), es decir, $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha$, los coeficientes satisfacen

$$|a_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}, \quad |b_k| \leq L \frac{\pi^\alpha}{k^\alpha}.$$

1.10 Series de Fourier en forma compleja.

1. Se considera el polinomio trigonométrico (1.2). Sustituyendo $\cos kt$ y $\sin kt$ por exponenciales complejas, se puede escribir

$$(1.11) \quad p_N(t) = \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt}.$$

Expresar los coeficientes $\{c_k, k = 0, \pm 1, \dots, \pm N\}$ en función de $\{a_k, k = 0, 1, \dots, N\}$ y $\{b_k, k = 1, \dots, N\}$, y recíprocamente.

2. Si los coeficientes a_k y b_k son todos reales, el polinomio (1.2) toma sólo valores reales para t real. ¿Cuál es la condición sobre c_k para que el polinomio (1.11) sólo tome valores reales para t real?
3. Calcular las integrales en $(-\pi, \pi)$ de los productos de funciones e^{int} y e^{imt} . Deducir de ellas las relaciones de ortogonalidad de la familia $\{e^{ikt}, k \in \mathbf{Z}\}$.
4. Supongamos que la función f de periodo 2π se representa por la serie trigonométrica (1.10) y que ésta es uniformemente convergente. A partir de las relaciones de ortogonalidad del apartado anterior, encontrar la expresión de los coeficientes c_k (*coeficientes de Fourier*) en función de f :

$$(1.12) \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

5. Deducir las siguientes propiedades análogas a las de la sección 1.3:
 - (i) $|c_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt$, donde $|c_k|$ es el módulo del número complejo c_k ;
 - (ii) $c_k(f') = ikc_k(f)$.
6. Obtener la desigualdad de Bessel

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

siguiendo los mismos pasos que en la sección 1.4, ahora con p_N polinomio trigonométrico complejo.

Convergencia puntual de la serie de Fourier

Escribiremos $S_N f$ para representar la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f , es decir,

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Nuestro objetivo es estudiar la convergencia puntual de esta sucesión de funciones.

2.1. Núcleo de Dirichlet

Conviene representar la suma parcial de una forma más manejable. Para ello sustituimos los coeficientes a_k y b_k por sus expresiones integrales y tenemos

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \cos k(x-t) \right] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt. \end{aligned}$$

Hemos utilizado la notación

$$(2.1) \quad D_N(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos Nt$$

y llamamos a esta función *núcleo de Dirichlet*. Multiplicando por $\sin t/2$ y utilizando la relación trigonométrica

$$2 \cos kt \sin t/2 = [\sin(k + 1/2)t - \sin(k - 1/2)t]$$

llegamos a

$$(2.2) \quad D_N(t) = \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin t/2}.$$

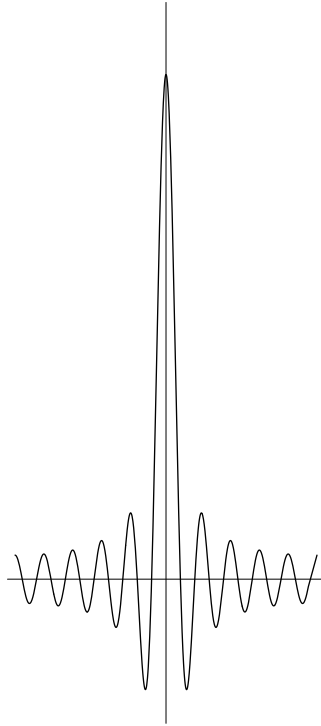


Figura 2.1. Gráfica de D_{10} en un periodo.

El núcleo de Dirichlet tiene las siguientes propiedades elementales:

Propiedades. 1. D_N es una función periódica de periodo 2π ;

2. D_N es par: $D_N(-t) = D_N(t)$;

3. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$.

Las dos primeras se ven inmediatamente con cualquiera de las expresiones (2.1) y (2.2); la tercera se ve más fácilmente con (2.1).

La primera propiedad permite cambiar el intervalo de integración a cualquier otro de longitud 2π . Como también f es de periodo 2π , se puede poner

$$(2.3) \quad S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

Cambiando la variable t por $-t$ en el intervalo $(-\pi, 0)$ y usando la segunda propiedad se obtiene la expresión

$$(2.4) \quad S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt.$$

2.2. Lema de Riemann-Lebesgue

El resultado que sigue se conoce habitualmente como lema de Riemann-Lebesgue. Cada uno de estos autores probó el resultado relacionado con el tipo de integrabilidad que lleva su nombre.

Lema 2.1. *Si f es integrable y λ real (no necesariamente entero),*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \lambda t dt = 0.$$

En particular se deduce que los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero, lo que ya habíamos visto para las funciones de cuadrado integrable a partir de la desigualdad de Bessel (1.9).

Demostración. Si f es la función característica de un intervalo (a, b) se tiene

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t dt \right| = \left| \int_a^b \sin \lambda t dt \right| = \left| \frac{\cos \lambda b - \cos \lambda a}{\lambda} \right|,$$

que claramente tiende a cero cuando λ tiende a infinito. Lo mismo ocurre con la otra integral.

De aquí se deduce que el resultado es cierto para cualquier función escalonada. Si f es integrable¹, dado $\epsilon > 0$, existe g_ϵ escalonada tal que

$$\int |f - g_\epsilon| < \epsilon/2.$$

Haciendo

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin \lambda t dt \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - g_\epsilon(t)| dt + \left| \int_{-\pi}^{\pi} g_\epsilon(t) \sin \lambda t dt \right|$$

resulta que si λ es suficientemente grande, el término de la izquierda se hace menor que ϵ . \square

¹Recuérdese que si f no es acotada pedimos a la integral impropia que converja absolutamente por lo que la aproximación por funciones escalonadas vale igualmente (apéndice B).

2.3. Propiedad de localización

Solemos decir que una propiedad de una función es local cuando sólo de los valores que toma en el entorno de cada punto depende que se cumpla o no en el punto (por ejemplo, la continuidad o la diferenciabilidad). Los coeficientes de Fourier se obtienen por medio de integrales en un periodo, de modo que dos funciones que coincidan en el entorno de un punto, si difieren en el resto del periodo, tendrán coeficientes de Fourier distintos y, por tanto, series distintas. Esto parece sugerir que el comportamiento de ambas series en dicho punto podría también ser distinto. El siguiente resultado muestra que no es así y que la convergencia de la serie de Fourier es una propiedad local.

Teorema 2.2 (Principio de localización de Riemann).

- (i) Sea f integrable y periódica de periodo 2π tal que $f(x) = 0$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y algún $\delta > 0$; entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = 0.$$

- (ii) Si f y g son integrables y periódicas de periodo 2π y $f(x) = g(x)$ para $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, o bien existen $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0)$ y $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N g(x_0)$ y son iguales, o bien no existe ninguno de los dos.

Demostración. (i) A partir de (2.3) y la hipótesis en (i) se tiene

$$S_N f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{\delta \leq |t| < \pi} \frac{f(x_0 - t)}{2 \sin t/2} \sin(N + \frac{1}{2})t dt.$$

La función $\sin t/2$ es continua y no se anula en $\delta \leq |t| \leq \pi$. Como $f(x_0 - t)$ es integrable,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0 - t)}{\sin t/2}, & \text{si } \delta \leq |t| \leq \pi, \\ 0, & \text{si } |t| \leq \delta, \end{cases}$$

es integrable y el lema de Riemann-Lebesgue implica que el límite de $S_N f(x_0)$ es 0.

- (ii) Basta observar que $S_N f(x_0) - S_N g(x_0) = S_N(f - g)(x_0)$ y aplicar (i) a $f - g$. \square

2.4. Primeros teoremas de convergencia

El lema de Riemann-Lebesgue permite dar fácilmente algunos resultados de convergencia.

Teorema 2.3. Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$ que tiene derivada en el punto x_0 . Entonces, la serie de Fourier de f converge a $f(x_0)$ en x_0 .

Demostración. Teniendo en cuenta la propiedad 3 del núcleo de Dirichlet (sección 2.1), podemos escribir

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0)] \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin t/2} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \frac{t}{2 \sin t/2} \sin(N + 1/2)t dt. \end{aligned}$$

El primer factor del último integrando es una función integrable en el conjunto $(-\pi, -\delta) \cup (\delta, \pi)$ y además está acotada en un entorno de 0 (por la existencia de derivada), luego es integrable en $(-\pi, \pi)$ (véase problema B.2 en el apéndice B). El segundo factor es una función continua en ese intervalo ya que la aparente discontinuidad en el origen es evitable. El producto de ambas funciones será una función integrable y se puede aplicar el lema de Riemann-Lebesgue para deducir que el límite de $S_N f(x_0) - f(x_0)$ es 0. \square

La existencia de derivada en x_0 exige la continuidad en ese punto. Con una pequeña variante se puede cubrir el caso en que la función tiene una discontinuidad de salto en x_0 . Para ello y suponiendo que existen los límites laterales $f(x_0+)$ y $f(x_0-)$ en x_0 , definimos las derivadas laterales en x_0 como

$$\begin{aligned} f'(x_0+) &= \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0+)}{t} & \text{y} \\ f'(x_0-) &= \lim_{t \rightarrow 0-} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0-)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{f(x_0-) - f(x_0 - t)}{t} \end{aligned}$$

cuando estos límites existen².

Teorema 2.4. *Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$ que tiene derivadas laterales en el punto x_0 en el sentido mencionado. Entonces, la serie de Fourier de f converge en x_0 a $(f(x_0+) + f(x_0-))/2$.*

Para probar este teorema basta utilizar (2.4) para escribir

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - (f(x_0+) + f(x_0-))/2 \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0+) + f(x_0 - t) - f(x_0-)] \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin t/2} dt \end{aligned}$$

y razonar como en el teorema anterior.

Muchas de las funciones que manejamos cumplen las hipótesis de este teorema.

²Obsérvese que habitualmente en los libros de Cálculo se habla de derivadas laterales cuando la función es continua en el punto, cosa que no exigimos aquí.

2.5. El teorema de Dirichlet

El primer teorema de convergencia de series de Fourier, debido a Dirichlet, apareció en 1829 y se refiere a funciones monótonas a trozos. Por ello comenzamos primero con unos comentarios sobre estas funciones.

Una función monótona y acotada en un intervalo $[a, b]$ es integrable (problema B.3 en el apéndice B) y tiene límites laterales finitos en cada punto. Si estos límites no coinciden la función tendrá una discontinuidad con un salto finito. La suma de los saltos no puede ser mayor que la diferencia de los valores de la función en los extremos del intervalo, de modo que el conjunto de discontinuidades con salto mayor que $1/n$ es finito y, por tanto, el conjunto de discontinuidades es a lo más numerable. Las mismas propiedades serán ciertas para una función monótona a trozos, es decir, aquella que es monótona en una cantidad finita de intervalos que unidos dan el intervalo original.

Teorema 2.5. *Sea f una función monótona a trozos y acotada en $[-\pi, \pi]$. Entonces, $S_N f(x)$ converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$. En particular, converge a $f(x)$ si la función es continua en x .*

Hay que entender que la función se ha extendido por periodicidad cuando el punto x es uno de los extremos del intervalo. Así, $f(\pi+) = f((-\pi)+)$ y $f((-\pi)-) = f(\pi-)$. Utilizaremos en la prueba los dos lemas siguientes.

Lema 2.6. *Sea g no decreciente y no negativa en $[a, b]$ y h continua con un número finito de cambios de signo en $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = g(b) \int_c^b h(t) dt.$$

Este teorema es debido a Bonnet (1850), quien lo propuso buscando una simplificación de la prueba de Dirichlet; damos una prueba para presentar completa la demostración del teorema 2.5. Quizá es más conocido en la forma de Weierstrass que viene en el apéndice B, apartado B.1.3 (segundo teorema del valor medio).

Demostración. Descomponemos (a, b) en los intervalos (a_0, a_1) , (a_1, a_2) , \dots , (a_{k-1}, a_k) en los que h tiene signo constante ($a_0 = a$, $a_k = b$). Entonces,

$$\int_{a_{j-1}}^{a_j} g(t)h(t) dt = \mu_j \int_{a_{j-1}}^{a_j} h(t) dt$$

donde $g(a_{j-1}+) \leq \mu_j \leq g(a_j-)$. Escribiremos $H(x) = \int_x^b h(t) dt$, de modo que

$$\int_a^b g(t)h(t) dt = \sum_{j=1}^k \mu_j [H(a_{j-1}) - H(a_j)]$$

$$= \mu_1 H(a) + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_{j+1} - \mu_j) H(a_j) + (g(b) - \mu_k) H(b).$$

(Hemos añadido $g(b)H(b)$ que es cero.) Los coeficientes que multiplican a valores de la función H en la anterior expresión son todos no negativos por ser g no decreciente, de modo que se puede escribir como el producto de la suma de los coeficientes (que es $g(b)$) por un valor comprendido entre el máximo y el mínimo de H . Por la continuidad de H , este valor será $H(c)$ para algún $c \in (a, b)$. \square

Lema 2.7. *Existe una constante M (independiente de N) tal que*

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} D_N(t) dt \right| \leq M$$

para todo $0 \leq \eta < \delta \leq \pi$.

Demostración. Sumando y restando $t^{-1} \sin(N + 1/2)t$ en el integrando tenemos

$$\left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin(N + 1/2)t}{2 \sin t/2} dt \right| \leq \int_{\eta}^{\delta} \left| \frac{1}{2 \sin t/2} - \frac{1}{t} \right| dt + \left| \int_{\eta}^{\delta} \frac{\sin(N + 1/2)t}{t} dt \right|.$$

La primera integral del segundo miembro se acota por la integral en $(0, \pi)$ y como el integrando es una función continua, la integral es finita. Un cambio de variable en la última integral muestra que basta probar que

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right|$$

está acotada independientemente de A y B con $0 \leq A < B < \infty$.

Si $B \leq 1$, basta observar que $\sin t \leq t$ y la integral se acota por 1. Si $A \geq 1$, integrando por partes,

$$\left| \int_A^B \frac{\sin t}{t} dt \right| = \left| \frac{\cos A}{A} - \frac{\cos B}{B} - \int_A^B \frac{\cos t}{t^2} dt \right| \leq \frac{3}{A} \leq 3.$$

Finalmente, si $A < 1 < B$, se acotan las integrales en $(A, 1)$ y en $(1, B)$ como las anteriores. \square

Prueba del teorema 2.5. Tenemos que probar que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)],$$

lo que teniendo en cuenta las propiedades del núcleo de Dirichlet se puede escribir

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t) - f(x+) - f(x-)] D_N(t) dt = 0.$$

Es suficiente probar que

$$(2.5) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) D_N(t) dt = 0$$

para g monótona a trozos en $(0, \pi)$ y tal que $g(0+) = 0$. Aplicando (2.5) a $f(x+t) - f(x+)$ y $f(x-t) - f(x-)$ queda probado el teorema.

Podemos suponer que g es creciente en un intervalo a la derecha de 0 (si es decreciente, cambiamos de signo a g). Dado $\epsilon > 0$, escogemos $\delta > 0$ tal que g es creciente en $(0, \delta)$ y $g(\delta) < \epsilon/2M$ (donde M es la constante del lema 2.7), lo que es posible porque $g(0+) = 0$. Aplicando sucesivamente los lemas 2.6 y 2.7 tenemos

$$\left| \int_0^\delta g(t) D_N(t) dt \right| = \left| g(\delta) \int_\eta^\delta D_N(t) dt \right| \leq \epsilon/2.$$

Razonando ahora como en el principio de localización, basta escoger N suficientemente grande para que la integral entre δ y π sea menor que $\epsilon/2$. \square

El enunciado original de Dirichlet de 1829 pedía a la función que fuese continua a trozos, aunque sólo por razones de integrabilidad de la función, ya que en su prueba no era necesario. La monotonía a trozos la expresaba diciendo que la función debía tener un número finito de máximos y mínimos. Posteriormente, en 1837, extendió el resultado permitiendo que la función tuviese un número finito de discontinuidades infinitas siempre que fuera absolutamente integrable. El resultado de convergencia se obtiene en aquellos puntos en los que los límites laterales existen y son finitos. La prueba que hemos dado sigue valiendo ya que los puntos de discontinuidad sólo intervienen cuando usamos el lema de Riemann-Lebesgue, que también permite esas discontinuidades.

2.6. Otros teoremas de convergencia

El teorema de Dini (1880) utiliza de forma sencilla y muy efectiva el lema de Riemann-Lebesgue. La demostración es como la de los teoremas 2.3 y 2.4, que son casos particulares de éste.

Teorema 2.8 (Teorema de Dini). *Sea f integrable en $[-\pi, \pi]$, x_0 un punto del intervalo y ℓ un número real tal que la función*

$$\Phi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2\ell$$

satisface $\int_0^\delta \frac{|\Phi(t)|}{t} dt < \infty$ para algún $\delta > 0$. Entonces,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = \ell.$$

Demostración. Se tiene

$$S_N f(x_0) - \ell = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(t) D_N(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\Phi(t)}{2 \sin t/2} \sin(N + 1/2)t dt.$$

La función

$$\frac{\Phi(t)}{2 \sin t/2} = \frac{\Phi(t)}{t} \frac{t}{2 \sin t/2}$$

es integrable en $(0, \delta)$ porque el primer factor lo es por hipótesis y el segundo es una función continua. Como claramente es también integrable en (δ, π) , el lema de Riemann-Lebesgue termina la prueba. \square

Obsérvese que si f es continua en x_0 , ℓ no puede ser más que $f(x_0)$, pero la continuidad no es suficiente por sí sola para garantizar la condición de Dini.

El resultado de Dini incluye como caso particular un teorema previo de Lipschitz (1864).

Teorema 2.9 (Teorema de Lipschitz). *Si f es integrable en $[-\pi, \pi]$ y en un punto x_0 de ese intervalo se cumple*

$$(2.6) \quad |f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq L|t|$$

para alguna constante L y $|t| < \delta$, entonces $S_N f(x_0)$ converge a $f(x_0)$.

Es habitual decir que una función f cumple la *condición de Lipschitz* si

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

para todo par de puntos x, y de su dominio. Esta es una condición de Lipschitz uniforme, mientras que (2.6) es una condición puntual. También se suele hablar de *condición de Lipschitz (o de Hölder) de orden α* (con $0 < \alpha \leq 1$) cuando

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^\alpha.$$

La condición puntual asociada también es suficiente para la convergencia: basta tener $|t|^\alpha$ en el segundo miembro de (2.6) para aplicar el teorema de Dini. Por otra parte, también se podrían poner condiciones del tipo

$$(2.7) \quad |f(x_0 + t) - f(x_0 +)| \leq Lt^\alpha, \quad |f(x_0 - t) - f(x_0 -)| \leq Lt^\alpha,$$

para $0 < t < \delta$ y, en este caso, el límite sería $[f(x_0 +) + f(x_0 -)]/2$. Estas condiciones con $\alpha = 1$ se satisfacen para las funciones del teorema 2.4 y en el caso del teorema 2.3 se cumple (2.6).

El teorema de Dirichlet fue optimizado por Jordan, quien introdujo en 1881 las *funciones de variación acotada*. En un intervalo $[a, b]$ se definen

como aquellas funciones f para las que existe $C > 0$ tal que

$$(2.8) \quad \sum_{j=1}^k |f(t_j) - f(t_{j-1})| \leq C,$$

para cualquier partición $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ del intervalo. La menor de las constantes C que se puede poner en (2.8) es la *variación total* de f en $[a, b]$. Es fácil ver que toda función monótona (o monótona a trozos) y acotada en $[a, b]$ es de variación acotada, pero también se cumple un resultado más interesante, que casi es un recíproco: *toda función de variación acotada en un intervalo es diferencia de dos funciones no decrecientes acotadas*. En efecto, para cada x de $[a, b]$ llamemos $Vf(x)$ a la variación total de f en el intervalo $[a, x]$; de la definición de la variación total se deduce que Vf es no decreciente y que si $x_1 < x_2$,

$$Vf(x_2) \geq Vf(x_1) + f(x_2) - f(x_1),$$

por lo que también $Vf(x) - f(x)$ es no decreciente.

Como consecuencia una función de variación acotada tiene límites laterales en cada punto y el teorema 2.5 sirve para esta clase de funciones.

Teorema 2.10. [*Teorema de Dirichlet-Jordan*] Sea f una función de variación acotada en $[-\pi, \pi]$. Entonces, $S_N f(x)$ converge a $[f(x+) + f(x-)]/2$.

Un par de ejemplos sirven para mostrar que los criterios de Dini-Lipschitz y Dirichlet-Jordan son independientes.

La función

$$f(x) = -\frac{1}{\log |x/2\pi|}, \quad -\pi < x < \pi,$$

cumple las condiciones de Dirichlet pero no las de Dini en el punto 0 porque $1/x \log x$ no es integrable en $(0, \delta)$.

La función

$$g(x) = |x|^\alpha \sin \frac{1}{|x|}, \quad -\pi < x < \pi, \quad 0 < \alpha < 1,$$

satisface una condición de Lipschitz de orden α en 0 (y, por tanto, la del teorema de Dini) pero no la de Dirichlet en un entorno de 0. Ni siquiera en la forma de Jordan, es decir, g no es de variación acotada en $[-\delta, \delta]$ ($\delta > 0$).

2.7. Algunos ejemplos

Los criterios de convergencia de las secciones anteriores se aplican inmediatamente a todas las funciones que siguen. Las igualdades son ciertas en

el intervalo $(-\pi, \pi)$. Fuera de él habría que considerar las extensiones periódicas de la funciones de la izquierda, que vendrán dadas por una expresión analítica distinta.

$$(2.9) \quad \operatorname{sgn} x = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \dots \right)$$

$$(2.10) \quad x = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots \right)$$

$$(2.11) \quad x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\cos x - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

$$(2.12) \quad |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$(2.13) \quad |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{1 \cdot 3} + \frac{\cos 4x}{3 \cdot 5} + \frac{\cos 6x}{5 \cdot 7} + \dots \right)$$

$$(2.14) \quad \cos ax = \frac{2a \sin a\pi}{\pi} \left(\frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \cos kx \right) \quad (a \text{ no entero}).$$

Dando valores particulares a las variables se obtienen sumas de series numéricas como las siguientes:

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots & \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots & \frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35} - \dots \\ \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots & \frac{a\pi}{\sin a\pi} = 1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 - k^2} \\ \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots & a\pi \cot a\pi = 1 + 2a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - k^2} \end{array}$$

que salen respectivamente (de arriba abajo y de izquierda a derecha) haciendo $x = \pi/2$ en (2.9) ó (2.10), $x = \pi/4$ en (2.9), $x = 0$ en (2.11), $x = 0$ en (2.12), $x = 0$ y $x = \pi/2$ en (2.13), $x = 0$ y $x = \pi$ en (2.14).

2.8. Problemas

- 2.1** Estudiar si las funciones del problema 1.1 del capítulo anterior satisfacen los criterios de convergencia que hemos visto en éste.

- 2.2** Probar que si f es una función monótona a trozos y acotada en $[-\pi, \pi]$, sus coeficientes de Fourier satisfacen

$$|a_k|, |b_k| \leq \frac{C}{k}$$

para alguna constante C . (Se puede utilizar el segundo teorema del valor medio para integrales.)

- 2.3** Comprobar que la función $|x|^\alpha \sin 1/|x|$ no es de variación acotada en ningún entorno de cero.
- 2.4** Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = Ax^2 + Bx$ definida para $x \in (0, 2\pi)$ y utilizarla (junto con los teoremas de convergencia convenientes) para calcular las sumas de las series siguientes:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (\cos kx - k\pi \sin kx).$$

- 2.5** Se define la función

$$f(x) = -\log \left| 2 \sin \frac{x}{2} \right|$$

para $-\pi < x < \pi$, que es una función par y no acotada.

1. Probar que f es integrable.
2. Calcular los coeficientes de Fourier de f . *Sugerencia:* puede ser útil comprobar que la integral

$$I_k = \int_0^\pi \cot \frac{x}{2} \sin kx \, dx$$

no depende de k (para $k \geq 1$) calculando $I_k - I_{k-1}$.

3. Explicar razonadamente si la serie obtenida converge y cuál es su suma en cada punto.

- 2.6** En (2.1) y (2.2) hemos escrito el núcleo de Dirichlet de dos maneras. Multiplicar cada una de ellas por t , integrar en $(0, \pi)$ y pasar al límite cuando N tiende a infinito para conseguir la suma de $\sum_{j=0}^{\infty} (2j+1)^{-2}$ (que ya hemos obtenido en la sección 2.7 como suma de una determinada serie de Fourier). Obtener a partir de ésta la suma de $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2}$.

- 2.7** Integrando (2.1) y (2.2) en $(0, \pi)$ y pasando al límite cuando N tiende a infinito, probar que

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}.$$

Sugerencia: Sumar y restar $t^{-1} \sin(N + 1/2)t$ a (2.2).

Convergencia uniforme de la serie de Fourier

3.1. La convergencia uniforme más sencilla

El criterio de Weierstrass para la convergencia uniforme (teorema A.18) asegura que si para una serie de funciones encontramos una serie numérica mayorante convergente, la serie de funciones converge uniformemente. Si queremos aplicar este criterio a la serie trigonométrica (1.1) necesitaremos que sea convergente la serie

$$(3.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|).$$

Por otra parte, como una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente tiene como límite una función continua (teorema A.15), sólo podemos esperar convergencia uniforme de series de Fourier hacia funciones continuas. Un primer resultado sencillo, pero que podemos aplicar en muchos de nuestros ejemplos, es el que sigue.

Teorema 3.1. *Sea f una función continua en $[-\pi, \pi]$ cuya derivada existe excepto en un número finito de puntos y es continua a trozos y acotada. Entonces, la serie de Fourier de f converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$.*

En los extremos del intervalo la continuidad se entiende referida a la extensión periódica y, por tanto, $f(\pi) = f(-\pi)$.

Demostración. La relación entre los coeficientes de Fourier de f y f' viene dada por la propiedad 3 de la sección 1.3 como

$$a_k(f) = -\frac{b_k(f')}{k}, \quad b_k(f) = \frac{a_k(f')}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Utilizando la conocida desigualdad $2AB \leq A^2 + B^2$ podemos escribir

$$\begin{aligned} |a_k(f)| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 |a_k(f)|^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |b_k(f')|^2 \right), \\ |b_k(f)| &\leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 |b_k(f)|^2 \right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + |a_k(f')|^2 \right). \end{aligned}$$

De aquí se deduce inmediatamente que la condición (3.1) se cumple siempre que la serie $\sum (|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2)$ sea convergente, lo que será cierto por la desigualdad de Bessel (1.9) (sección 1.4) ya que las hipótesis aseguran que f' es de cuadrado integrable. \square

En las hipótesis anteriores se puede además dar una estimación de la velocidad de convergencia. Concretamente,

$$(3.2) \quad \sup_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - S_N f(x)| \leq \frac{\epsilon_N}{N^{1/2}},$$

donde ϵ_N es una sucesión que tiende a cero.

En efecto, escribimos

$$|f(x) - S_N f(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k(f)| + |b_k(f)|,$$

y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz¹ para escribir

$$|f(x) - S_N f(x)| \leq \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2 \right)^{1/2}$$

de donde se deduce (3.2) porque el último término tiende a cero (es el resto de una serie convergente por la desigualdad de Bessel) y

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{N}.$$

Si suponemos que la función f tiene $r - 1$ derivadas continuas y que $f^{(r-1)}$ cumple las hipótesis del teorema 3.1, se tiene

$$|a_k(f^{(r)})| + |b_k(f^{(r)})| = k^r (|a_k(f)| + |b_k(f)|).$$

¹Para las series esta desigualdad es

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2;$$

véase la sección 10.1.

En este caso, se puede mejorar la estimación (3.2) y conseguir

$$(3.3) \quad \sup_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - S_N f(x)| \leq \frac{\epsilon_N}{N^{r-1/2}},$$

siempre con ϵ_N tendiendo a cero. Los detalles se dejan como ejercicio.

3.2. Localización uniforme

El principio de localización (teorema 2.2 de la sección 2.3) asegura que el comportamiento de la serie de Fourier en un punto depende sólo de cómo sea la función en un entorno del punto. Se podría esperar algo semejante para el caso de la convergencia uniforme, considerando subintervalos de $[-\pi, \pi]$. Para probar un resultado de este tipo comenzamos adaptando el lema de Riemann-Lebesgue.

Lema 3.2. *Sea f una función periódica de periodo 2π , integrable y acotada, y g una función monótona a trozos y acotada. Entonces,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin \lambda t \, dt = 0$$

uniformemente en x .

Demostración. Podemos suponer que f y g son no negativas (si no lo fueran, bastaría con separar partes positivas y negativas). Sean M_1 y M_2 cotas superiores de f y g , respectivamente. Dado $\epsilon > 0$ elegimos una función escalonada $h = \sum_{j=1}^J m_j \chi_{I_j}$ (I_j es un intervalo y χ_{I_j} su función característica) que satisfaga $0 \leq h \leq f$ y

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-h) \leq \frac{\epsilon}{2M_2}.$$

Escribimos

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)g(t) \sin \lambda t \, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - h(x+t))g(t) \sin \lambda t \, dt + \int_{-\pi}^{\pi} h(x+t)g(t) \sin \lambda t \, dt \\ &= I + II. \end{aligned}$$

Para la primera parte se tiene

$$|I| \leq M_2 \int_{-\pi}^{\pi} (f-h) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Para la segunda,

$$II = \sum_{j=1}^J m_j \int_{I_j-x} g(t) \sin \lambda t \, dt,$$

y podemos aplicar a cada una de las integrales que quedan el segundo teorema del valor medio para integrales. (Como g es monótona a trozos quizá haya que dividir alguna integral en trozos más pequeños. El número de trozos está acotado por una constante absoluta.) Se obtiene una cota CM_2/λ y como $|m_j| \leq M_1$ queda

$$|II| \leq \frac{CM_1M_2J}{\lambda}.$$

Tomando λ suficientemente grande $|II|$ se hace menor que $\epsilon/2$ independientemente de x . \square

Teorema 3.3. *Si f es una función nula en un intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$, la serie de Fourier de f converge a cero uniformemente en $[a + \delta, b - \delta]$ para $\delta > 0$.*

Demostración. La representación

$$S_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{|t| \geq \delta} f(x-t) \frac{\sin(N+1/2)t}{2 \sin t/2} dt$$

es válida si $x \in [a + \delta, b - \delta]$. Si definimos $g(t) = \chi_{|t| \geq \delta}(t)(\sin t/2)^{-1}$, el lema anterior se aplica y se deduce que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = 0$ uniformemente en $[a + \delta, b - \delta]$. \square

Teorema 3.4. *Sea f continua, con derivada continua a trozos y acotada en un intervalo $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$. Entonces la serie de Fourier de f converge a f uniformemente en $[a + \delta, b - \delta]$ para $\delta > 0$.*

En efecto, basta definir una función g que coincida con f en $[a, b]$ y que cumpla las condiciones del teorema 3.1 en $[-\pi, \pi]$. Esto siempre es posible, por ejemplo, utilizando funciones afines fuera del intervalo $[a, b]$. Se aplica el teorema 3.3 a $f - g$.

3.3. Otros criterios de convergencia uniforme

Se pueden dar criterios de convergencia uniforme semejantes a los de Dirichlet-Jordan y Dini-Lipschitz. Los enunciaremos sin demostración.

Teorema 3.5. *Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$, de variación acotada y continua en un intervalo $[a, b]$. Entonces, la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[a + \delta, b - \delta]$, para $\delta > 0$.*

Para el siguiente resultado definimos primero el *módulo de continuidad* de una función f en un intervalo I como

$$\omega(\delta) = \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in I, |t - s| < \delta\}.$$

Con esta definición, decir que f cumple una condición de Lipschitz de orden α en I equivale a que $\omega(\delta) \leq L\delta^\alpha$ con L independiente de δ .

Teorema 3.6. *Sea f integrable en $(-\pi, \pi)$, continua en $I = [a, b]$ y tal que $\omega(\delta)/\delta$ es integrable en $(0, \eta)$ para algún $\eta > 0$, donde $\omega(\delta)$ es el módulo de continuidad de f en I . Entonces, la serie de Fourier converge uniformemente a f en $[a + \epsilon, b - \epsilon]$, para $\epsilon > 0$.*

3.4. Problemas

3.1 Completar los detalles de la estimación (3.3) haciendo las hipótesis que allí se indican sobre la función.

3.2 *Series de Fourier absolutamente convergentes.*

Consideraremos funciones con valores complejos y series de Fourier en forma compleja como en el problema 1.10. La serie de Fourier de f se escribe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

y los coeficientes vienen dados por (1.12).

Sea \mathcal{A} el conjunto de funciones continuas en $[-\pi, \pi]$ cuya serie de Fourier converge absolutamente, es decir,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty.$$

Llamaremos a esta cantidad $\|f\|_{\mathcal{A}}$.

1. La hipótesis de convergencia absoluta implica la convergencia uniforme de la serie de Fourier; asegurarse de que la suma tiene que coincidir con f .
2. Probar como en el teorema 3.1 que si f es continua y derivable a trozos con f' en L^2 , se tiene $f \in \mathcal{A}$ y dar una cota para $\|f\|_{\mathcal{A}}$.
3. Probar que si f y g están en \mathcal{A} , también su producto fg está en \mathcal{A} y se cumple

$$\|fg\|_{\mathcal{A}} \leq \|f\|_{\mathcal{A}} \|g\|_{\mathcal{A}}.$$

Series de Fourier de funciones continuas

4.1. Un resultado negativo

Los resultados que hemos probado dan la convergencia de la serie de Fourier al valor $f(x)$ en los puntos de continuidad de la función f , pero siempre haciendo hipótesis suplementarias más fuertes que la mera continuidad.

Una cuestión a la que durante mucho tiempo se trató de responder fue la de si la continuidad de la función era condición suficiente para la convergencia de la serie de Fourier hacia la función. Los indicios parecían sugerir una respuesta positiva, de modo que se puede considerar que fue una sorpresa entre los matemáticos el resultado que P. du Bois-Reymond demostró en 1873.

Teorema 4.1. *Existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto.*

Las funciones con series de Fourier divergentes que construyó du Bois-Reymond son complicadas. Ejemplos posteriores más sencillos son debidos a Schwarz y Féjer. Lebesgue modificó el ejemplo de Schwarz y propuso el que presentamos a continuación.

Demostración. Sea $\{c_n\}$ una sucesión que tiende a cero y $\{\nu_n\}$ una sucesión creciente de enteros impares. Definimos

$$a_n = \nu_0 \nu_1 \nu_2 \dots \nu_n,$$

y sea $I_n = [2\pi/a_n, 2\pi/a_{n-1}]$, $n = 1, 2, \dots$. Definimos una función f de modo que sea par,

$$f(t) = c_n \sin\left(\frac{a_n t}{2}\right) \frac{\sin t/2}{t}$$

cuando $t \in I_n$ y $f(0) = 0$. Con esto se determina f cuando $|t| \leq 2\pi/a_0$ y es continua porque vale 0 en los extremos de cada intervalo I_n . Hacemos $f(t) = 0$ si $2\pi/a_0 < |t| \leq \pi$ y así f es continua en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$.

Utilizando (2.4) del capítulo 2 tenemos

$$\pi S_N f(0) = \int_0^\pi f(t) \frac{\sin(N+1/2)t}{\sin t/2} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{I_n} \sin\left(\frac{a_n t}{2}\right) \frac{\sin(N+1/2)t}{t} dt.$$

Particularizamos para los valores $N_k = (a_k - 1)/2$ y tenemos

(4.1)

$$\pi S_{N_k} f(0) = \int_0^{2\pi/a_k} f(t) \frac{\sin a_k t/2}{\sin t/2} dt + \sum_{j=1}^k c_j \int_{I_j} \frac{\sin a_k t/2 \sin a_j t/2}{t} dt.$$

Utilizando que $|\sin at / \sin t| \leq \pi a/2$ resulta

$$\left| \int_0^{2\pi/a_k} f(t) \frac{\sin a_k t/2}{\sin t/2} dt \right| \leq \frac{\pi a_k}{2} \int_0^{2\pi/a_k} |f(t)| dt,$$

que tiende a $f(0) = 0$ cuando k tiende a infinito por el teorema fundamental del cálculo. Por otra parte, si $j < k$,

$$\left| c_j \int_{I_j} \frac{\sin a_k t/2 \sin a_j t/2}{t} dt \right| \leq c_j \int_{I_j} \frac{1}{t} dt = c_j \log \nu_j;$$

y si $j = k$,

$$c_k \int_{I_k} \frac{\sin^2 a_k t/2}{t} dt = \frac{1}{2} c_k \log \nu_k - \frac{1}{2} c_k \int_{I_k} \frac{\cos a_k t}{t} dt.$$

Como la última integral está acotada (integrar por partes), deducimos de (4.1) que

$$\pi S_{N_k} f(0) \geq \frac{1}{2} c_k \log \nu_k - \left(\sum_{j=1}^{k-1} c_j \log \nu_j + r_k \right),$$

donde r_k está acotada. Si escogemos las sucesiones $\{c_k\}$ y $\{\nu_k\}$ adecuadamente podemos hacer tender $S_{N_k} f(0)$ a infinito; por ejemplo, si $c_k = 4^{-k}$ y $\nu_k = 3^{16^k}$, se tiene $c_k \log \nu_k = 4^k \log 3$. \square

4.2. Una prueba de existencia

Los potentes métodos que el Análisis Funcional desarrolló a partir de principios del siglo XX permiten dar una prueba del teorema de du Bois-Reymond que no es constructiva y está basada en la teoría de operadores, más concretamente en el principio de acotación uniforme.

Teorema 4.2 (Principio de acotación uniforme). *Si E es un espacio de Banach, F es un espacio normado y L_n es una sucesión de operadores lineales acotados de E en F , o bien los operadores están uniformemente acotados (existe A tal que $\|L_n x\|_F \leq A\|x\|_E$ para todo $x \in E$), o bien para algún $x \in E$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|L_n x\|_F = \infty$.*

Se puede encontrar la prueba del teorema en (casi) cualquier libro de Análisis Funcional. Su aplicación al caso que nos ocupa se hace tomando como E el espacio de funciones continuas en $[-\pi, \pi]$ con la norma del supremo ($\|f\| = \sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |f(t)|$), que es completo, y $F = \mathbf{R}$. La sucesión de operadores es $L_n f = S_n f(0)$ y para concluir sólo necesitamos ver que la primera de las posibilidades del teorema no se cumple, es decir, que no existe A tal que $|S_n f(0)| \leq A\|f\|$, o lo que es lo mismo, que existe una sucesión f_k con $\|f_k\| \leq 1$ tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k} f_k(0) = \infty$.

Si D_n es el núcleo de Dirichlet (2.2), la función $f_n = \text{sgn } D_n$ (signo de D_n) no es continua, pero tiene sólo un número finito de saltos. Modificándola en un pequeño entorno alrededor de cada uno de ellos tenemos una función continua para la que

$$S_n f_n(0) \geq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt - \epsilon.$$

Si probamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \infty$, ya hemos terminado. Y así es, porque se tiene

$$(4.2) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt = \frac{4}{\pi^2} \log n + R_n$$

donde R_n es una sucesión acotada. En primer lugar,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt &= 2 \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt \\ &\quad + \int_0^{\pi} |\sin(n+1/2)t| \left| \frac{1}{t/2} - \frac{1}{\sin t/2} \right| dt, \end{aligned}$$

y la última integral está acotada (en n) porque el integrando lo está. En la primera integral hacemos un cambio de variable y queda

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+1/2)t|}{t} dt &= \int_0^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{j\pi}^{(j+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds + \int_{n\pi}^{(n+1/2)\pi} \frac{|\sin s|}{s} ds \\ &= \int_0^{\pi} |\sin t| \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{s+j\pi} ds + r_n, \end{aligned}$$

donde r_n , que corresponde a la integral entre $n\pi$ y $(n + 1/2)\pi$, es una sucesión acotada (en realidad, tiende a cero). Por otra parte,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(j+1)\pi} \leq \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{s+j\pi} \leq \frac{1}{s} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j\pi},$$

y como se tiene

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j} = \log n + r'_n$$

con r'_n acotada (ver problema A.5 en el apéndice A), se obtiene (4.2).

4.3. Funciones continuas sin derivada

Casi en las mismas fechas en que du Bois-Reymond construía su contraejemplo, aparecía otro resultado sorprendente debido a K. Weierstrass:

Teorema 4.3. *Existen funciones continuas que no tienen derivada en ningún punto.*

No es propiamente un resultado de series de Fourier, pero la relación está en que la función propuesta por Weierstrass es una serie trigonométrica de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{b^n},$$

en la que $b > 1$ y $a/b > 1 + 3\pi/2$. Si $b > 1$, el teorema A.18 asegura que la suma de la serie es una función continua. La derivada término a término da una serie divergente si $a \geq b$, pero eso no es suficiente como prueba de que la función no sea derivable. De hecho, observamos en la condición escrita un poco más arriba que Weierstrass exigía $a/b > 1 + 3\pi/2$. Es cierto que basta con $a \geq b$, lo que fue probado por Hardy años más tarde (daremos una demostración en la sección 13.7).

La idea de construir funciones continuas sin derivada ya parece estar presente en matemáticos anteriores a Weierstrass. Por varias fuentes se atribuye a Riemann la propuesta de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2 x}{n^2},$$

como función candidata. Como se observa la derivada término a término también diverge en este caso. La función es continua, pero no es fácil decidir sobre su derivabilidad. Hardy demostró que no es derivable en los valores de x que no sean de la forma $\pi(2p+1)/(2q+1)$ con p y q enteros. Hubo que esperar hasta 1970 para que J. Gerver demostrase que sí es derivable en los puntos que Hardy había dejado sin decidir.

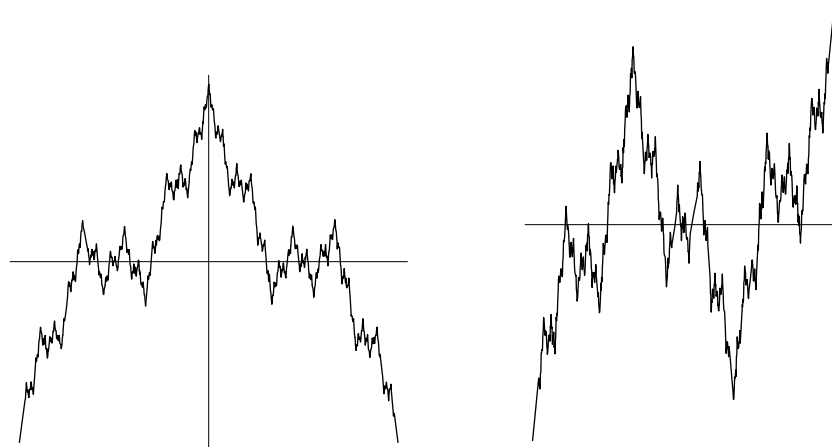


Figura 4.1. Gráfica de la función $\sum_{n=1}^{20} 2^{-n} \cos 3^n t$ en el intervalo $(-\pi/3, \pi/3)$ (un periodo) y detalle del intervalo $(\pi/9, 2\pi/9)$.

En este capítulo nos vamos a limitar a probarlo en unas condiciones aún más restrictivas sobre a y b , por un procedimiento que tiene cierta semejanza con la construcción de Lebesgue de la sección anterior: una serie se hace grande haciendo grande un término y acotando las sumas de todos los demás.

Teorema 4.4. *La función*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos a^n x}{b^n},$$

es continua en todo punto y no es derivable en ningún punto, si $b > 25$ y $a/b > 40$.

Demostración. Como ya hemos mencionado, la continuidad se deduce del teorema A.18. Fijado un punto x_0 , probaremos que existe una sucesión x_k que tiende a x_0 y tal que el cociente

$$\frac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$$

tiende a infinito; entonces f no puede ser derivable en x_0 .

Cuando x se mueve entre $x_0 + \pi/a^k$ y $x_0 + 3\pi/a^k$, $a^k x$ recorre un intervalo de longitud 2π en el que el coseno toma todos los valores entre -1 y 1 ; por tanto, podemos elegir x_k de modo que

$$\frac{\pi}{a^k} \leq x_k - x_0 \leq \frac{3\pi}{a^k} \quad \text{y} \quad |\cos(a^k x_k) - \cos(a^k x_0)| \geq 1;$$

entonces,

$$\left| \frac{\cos a^k x_k - \cos a^k x_0}{b^k (x_k - x_0)} \right| \geq \frac{a^k}{3\pi b^k}.$$

Por otra parte, se tiene

$$(4.3) \quad |\cos a^n x_k - \cos a^n x_0| \leq a^n |x_k - x_0|$$

pasando la diferencia de cosenos a producto de senos y utilizando después que $|\sin t| \leq |t|$; de esta cota deducimos

$$\frac{1}{x_k - x_0} \left| \sum_{n=0}^{k-1} \frac{\cos a^n x_k - \cos a^n x_0}{b^n} \right| \leq \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{a}{b} \right)^n \leq \frac{a^k}{b^{k-1}(a-b)}.$$

Finalmente,

$$\frac{1}{x_k - x_0} \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{\cos a^n x_k - \cos a^n x_0}{b^n} \right| \leq \frac{a^k}{\pi} \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{b^n} = \frac{2a^k}{\pi b^k (b-1)}.$$

Con las tres cotas obtenidas concluimos que

$$\begin{aligned} \frac{|f(x_k) - f(x_0)|}{x_k - x_0} &\geq \frac{a^k}{3\pi b^k} - \frac{a^k}{b^{k-1}(a-b)} - \frac{2a^k}{\pi b^k (b-1)} \\ &= \frac{a^k}{b^k} \left[\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{a/b-1} - \frac{2}{\pi(b-1)} \right], \end{aligned}$$

y en las hipótesis del enunciado el último término tiende a infinito si k tiende a infinito. \square

Integración y derivación de series de Fourier

5.1. Integración término a término de series de Fourier

Sea f una función periódica de periodo 2π cuya integral en $(-\pi, \pi)$ es nula. Entonces, su serie de Fourier se escribe

$$(5.1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ya que $a_0 = 0$. Consideremos ahora la función

$$(5.2) \quad F(x) = \int_{-\pi}^x f(t) dt.$$

Esta función es continua y periódica de periodo 2π ($F(-\pi) = F(\pi) = 0$ debido a que f tiene integral nula en un periodo). El teorema fundamental del Cálculo asegura que $F' = f$ en los puntos de continuidad de f de modo que si ésta es continua excepto en un número finito de puntos, estamos en las condiciones mencionadas en la sección 1.3 y la relación entre los coeficientes de Fourier de f y F viene dada por

$$(5.3) \quad a_k(F) = -\frac{b_k(f)}{k}, \quad b_k(F) = \frac{a_k(f)}{k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

En realidad, partiendo de la definición (5.2), se puede deducir sin más condición que la integrabilidad de f la relación (5.3). Un modo de ver esto

es utilizar el cambio de orden de integración en una integral doble:

$$\begin{aligned} a_k(F) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^x f(t) dt \right) \cos kx dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_{-\pi}^x \cos kx dx \right) dt = -\frac{b_k(f)}{k}. \end{aligned}$$

Se hace igual para $b_k(F)$ (en éste hay que tener en cuenta que la integral de f es cero).

En la definición (5.2) la elección de $-\pi$ como extremo inferior no es importante. Cualquier otra elección produciría una función que diferiría de ésta en una constante, lo que no afecta más que al término $a_0(F)$ de la serie de Fourier, que no entra en las fórmulas (5.3).

Hemos probado de paso que la propiedad 3 de la sección 1.3 es válida siempre que f se pueda escribir como integral de su derivada (en casi todo punto). Las funciones que cumplen esta condición se llaman *absolutamente continuas* y se pueden caracterizar del modo siguiente: f es absolutamente continua en un intervalo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^J |f(b_j) - f(a_j)| < \epsilon$$

siempre que a_j, b_j sean puntos del intervalo y $\sum_j |b_j - a_j| < \delta$.

Sean ahora

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

de modo que $f = f_+ - f_-$ y, por tanto,

$$F(x) = \int_{-\pi}^x f_+(t) dt - \int_{-\pi}^x f_-(t) dt.$$

Como f_+ y f_- son no negativas, esta expresión muestra que F es diferencia de dos funciones monótonas no decrecientes (lo que implica que es de variación acotada) y se le puede aplicar el criterio de Dirichlet¹. Por ser continua,

$$(5.4) \quad F(x) = \frac{a_0(F)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx).$$

Esto muestra que la serie de Fourier de F se obtiene integrando término a término la serie (5.1) y que, sea o no convergente ésta, (5.4) lo es siempre. $a_0(F)/2$ aparece como una constante de integración y se puede determinar a partir de F por la fórmula habitual.

¹Si suponemos que f es continua a trozos en lugar del criterio de Dirichlet se puede razonar con el teorema 2.3.

Si suprimimos la hipótesis de integral nula sobre f , podemos considerar la función

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = f(x) - \frac{a_0(f)}{2}$$

cuya integral sí se anula en $(-\pi, \pi)$ y cumple

$$a_k(f) = a_k(g), \quad b_k(f) = b_k(g), \quad k = 1, 2, \dots$$

Si G es la primitiva de g definida como en (5.2), de (5.4) se deduce

$$G(x) = \frac{a_0(G)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx)$$

de modo que

$$(5.5) \quad F(x) = C + \frac{a_0(f)}{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx).$$

Esta igualdad es la que resulta exactamente si integramos término a término la serie de Fourier de f . No obstante, no es una serie de Fourier porque contiene el término $a_0x/2$. Como ya hemos visto en la sección 2.7 que

$$\frac{x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \quad -\pi < x < \pi,$$

podemos sustituir esta igualdad y deducir que

$$(5.6) \quad F(x) = \frac{a_0(F)}{2} + a_0(f) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (a_k(f) \sin kx - b_k(f) \cos kx).$$

Esta expresión es válida en $(-\pi, \pi)$. Para los extremos del intervalo, la función F tiene ahora una discontinuidad de salto, de modo que la serie convergerá a $\int_{-\pi}^{\pi} f/2$.

La conclusión de los cálculos realizados se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 5.1. *Sea f una función integrable en $(-\pi, \pi)$. Si F es una primitiva de f en el intervalo $(-\pi, \pi)$, la igualdad (5.5) que resulta de integrar término a término la serie de Fourier de f es válida. La serie de Fourier de F viene dada por (5.6), que se obtiene sustituyendo en (5.5) la función x por su serie de Fourier. Además, la serie obtenida converge a $F(x)$ en $(-\pi, \pi)$ (independientemente de que sea o no convergente la serie de f).*

Si en la igualdad (5.6) hacemos $x = 0$, deducimos el siguiente resultado.

Corolario 5.2. *Si la serie trigonométrica (1.1) es una serie de Fourier, la serie numérica $\sum_k \frac{b_k(f)}{k}$ es convergente.*

Recuérdese que llamamos serie de Fourier a aquélla cuyos coeficientes vienen dados por las fórmulas (1.4) aplicadas a alguna función integrable.

Ya sabíamos por el lema de Riemann-Lebesgue que si una serie trigonométrica es de Fourier sus coeficientes tienden a cero; ahora vemos que esta condición necesaria no es suficiente: por ejemplo, la serie

$$(5.7) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\log k}$$

no es de Fourier. Esta observación es debida a Fatou.

Un resultado de Lebesgue asegura que si una serie trigonométrica converge a una función integrable es la serie de Fourier de su suma. Como la serie 5.7 es convergente (véase el problema 5.3), se concluye que su suma no es una función integrable (Lebesgue).

5.2. Derivación término a término de series de Fourier

La situación para la derivación término a término de series de Fourier es inversa de la de la integración. Este hecho es consecuencia de que las propiedades de regularidad de una función mejoran al integrarla y empeoran al derivarla. Por eso, si queremos dar un enunciado que permita derivar la serie de Fourier de una función, las hipótesis deben ir sobre la derivada, no sobre la función de partida.

Teorema 5.3. *Sea f una función continua que tiene una derivada a trozos f' que es una función integrable en $(-\pi, \pi)$. Entonces, la serie de Fourier de f' se obtiene derivando término a término la de f , es decir,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx).$$

Sin embargo, no se puede decir nada de la convergencia de la serie obtenida sin hipótesis suplementarias sobre f' .

La existencia de derivadas sucesivas de f permite obtener mejores cotas sobre los coeficientes de Fourier de f y asegurar buenas propiedades de convergencia de la serie. Basta aplicar sucesivamente la fórmula que relaciona los coeficientes de Fourier de una función y de su derivada para convencerse de ello. Por ejemplo, si f'' existe y es integrable,

$$a_k(f) = -\frac{a_k(f'')}{k^2} \quad \text{y} \quad b_k(f) = -\frac{b_k(f'')}{k^2}$$

y los coeficientes de Fourier de f se acotan por A/k^2 lo que asegura la convergencia uniforme (aunque, de todos modos, si f'' existe ya podíamos aplicar el teorema 3.1).

5.3. Problemas

5.1 Comprobar que de la serie de Fourier de $\operatorname{sgn} x$ se obtiene la de $|x|$, por integración término a término. Ambas están calculadas en (2.9) y (2.12), respectivamente.

5.2 Integrando la serie de Fourier de $f(x) = x$ en $(-\pi, \pi)$ demostrar que para $-\pi \leq x \leq \pi$, se tiene

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos x}{1^2} - \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} - \dots \right)$$

y, a partir de ésta, demostrar que para $-\pi \leq x \leq \pi$,

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots \right),$$

con convergencia uniforme en ambos casos.

5.3 Utilizar el criterio de Dirichlet del problema A.16 para probar que la serie trigonométrica (5.7) es uniformemente convergente en cualquier intervalo de la forma $[\delta, \pi - \delta]$ para $0 < \delta < \pi/2$ y, por tanto, define una función continua en $(0, \pi)$.

Fenómeno de Gibbs

6.1. El fenómeno de Gibbs para funciones con saltos

6.1.1. La función signo.

Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ para $x \in (-\pi, \pi)$. Su serie de Fourier es

$$(6.1) \quad \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

y el teorema 2.4 asegura que la serie de Fourier converge a la función en $(-\pi, \pi)$ (definiendo el signo de 0 como 0). La convergencia no puede ser uniforme porque el límite no es una función continua, aunque sí es uniforme en $[\delta, \pi - \delta]$ para cualquier $\delta > 0$, como asegura el teorema 3.4. Por tanto, si tomamos $\epsilon > 0$, existe N_0 de modo que las sumas parciales de la serie de Fourier satisfacen $|S_N f(x) - 1| < \epsilon$, para todo $N \geq N_0$ y $x \in [\delta, \pi - \delta]$. Por otra parte, está claro que en $(0, \delta)$ las sumas parciales tienen que tomar todos los valores entre 0 y 1.

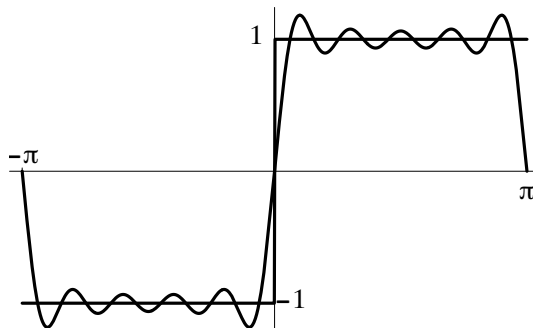


Figura 6.1. Gráfica de S_9 .

La figura 6.1 muestra la gráfica de la suma parcial S_9 de la serie de Fourier. Sólo en la zona central de cada intervalo está relativamente cerca de los valores de f . Con más sumandos la aproximación será mejor.

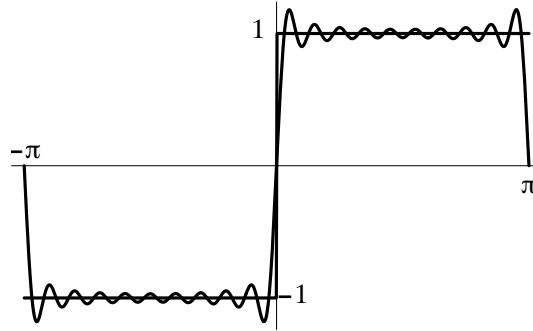


Figura 6.2. Gráfica de S_{19} .

En la gráfica de S_{19} (figura 6.2) vemos que la aproximación mejora en la zona central pero no se rebaja el “pico” que por encima de 1 aparece para valores de la variable cercanos a 0 (y sus correspondientes simétricos).



Figura 6.3. Detalle de la gráfica de S_{29} , para valores de la función cercanos a 1.



Figura 6.4. Detalle de la gráfica de S_{100} , para valores de la función cercanos a 1.

Aumentando el número de sumandos de la suma parcial, la situación no cambia: la figura 6.3 muestra una ampliación de la gráfica para S_{29} y, sin embargo, el pico se mantiene. Este hecho, que puede resultar sorprendente, no se remedia añadiendo términos a la suma parcial (en la figura 6.3 mostramos S_{100}). En efecto, el valor máximo de la suma parcial $S_N f$ en $(0, \delta)$ no tiende a 1 cuando N tiende a infinito, sino al valor

$$(6.2) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = 1.17897944 \dots$$

$S_{2N-1}f$ corresponde a tomar la suma hasta $k = N - 1$ en (6.1). Los máximos de $S_{2N-1}f$ se encontrarán en puntos que anulen a su derivada que es

$$(6.3) \quad \frac{d}{dx} S_{2N-1}f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \cos(2k+1)x = \frac{4 \sin 2Nx}{\pi \sin x}.$$

(La última igualdad se obtiene a partir de la fórmula $\cos(2k+1)x \sin x = \sin(2k+2)x - \sin 2kx$, del mismo modo que en el cálculo del núcleo de Dirichlet.) Esta derivada se anula en $(0, \pi)$ en los ceros de $\sin 2Nx$ que son $x = k\pi/2N, k = 1, 2, \dots, 2N - 1$. La segunda derivada tiene en esos puntos el signo de $\cos 2Nx$ de modo que corresponden alternativamente a máximos y mínimos locales, comenzando en un máximo.

Como $S_{2N-1}f(0) = 0$, de la expresión (6.3) para la derivada de la suma parcial también se deduce

$$S_{2N-1}f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2Nt}{\sin t} dt.$$

Utilizando esta expresión se pueden comparar las sumas parciales en máximos sucesivos y se comprueba que el primer máximo, que se obtiene para $x = \pi/2N$, es precisamente el máximo absoluto. Ahí es donde vamos a evaluar la suma parcial y calcular el límite, de modo que buscamos

$$(6.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} S_{2N-1}f\left(\frac{\pi}{2N}\right) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin(2k+1)\pi/2N}{2k+1}.$$

Consideremos la partición del intervalo $[0, \pi]$ en N intervalos iguales determinada por los puntos $x_k = k/N, k = 0, 1, \dots, N$. Si escribimos ahora la suma de Riemann para la función $\sin x/x$ asociada a esta partición, con la función evaluada en el punto medio de cada uno de los intervalos, obtenemos precisamente el valor de $S_{2N-1}f(\pi/2N)$ multiplicado por $\pi/2$. Como la función $\sin x/x$ es continua, el límite de sus sumas de Riemann cuando N tiende a infinito es su integral en $(0, \pi)$. Entonces, el límite de $S_{2N-1}f(\pi/2N)$ vendrá dado por (6.2).

6.1.2. Otras funciones con saltos.

La propiedad que hemos probado para la función $f(x) = \operatorname{sgn} x$ en $x \in (-\pi, \pi)$, ocurre para cualquier función que tenga un salto, en el entorno de éste. Sea g una función discontinua en un punto x_0 , en el que tiene un salto $g(x_0+) - g(x_0-) = 2\ell$. La función $g - \ell f$ es continua en x_0 . Supongamos que g cumple a ambos lados de la discontinuidad alguno de los criterios de convergencia uniforme; entonces, la serie de Fourier de $g - \ell f$ converge uniformemente en un entorno de x_0 y, por tanto, el comportamiento de la serie de Fourier de g en un entorno de x_0 es el mismo que el de ℓf . Es decir, la diferencia entre el límite cuando N tiende a infinito del máximo

de S_{Ng} en un entorno de x_0 y el mayor de los valores $g(x_0+)$ y $g(x_0-)$ es $0.17897944\dots\ell$ y lo mismo ocurre por debajo. Esta propiedad se llama *fenómeno de Gibbs* (a veces de *Gibbs-Wilbraham*).

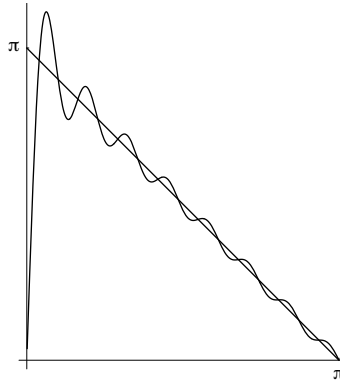


Figura 6.5. Gráfica de S_{15} en medio periodo para la función impar de periodo 2π que vale $\pi - x$ en $(0, \pi)$.

En 1898 Michelson y Stratton diseñaron un analizador armónico que permitía hacer gráficas de las sumas parciales de series de Fourier. Observaron que en esas gráficas aparecía un exceso sobre el valor máximo de la función cuando estaba cerca del salto y Michelson envió una carta a la revista *Nature* pidiendo una explicación para el fenómeno. Durante los años 1898 y 1899 hubo varios artículos sobre el tema en la revista y finalmente fue Gibbs quien en 1899 aclaró la situación. El nombre de *fenómeno de Gibbs* es debido a Bôcher (1906).

Posteriormente se descubrió que ya en 1848 Wilbraham había publicado un artículo titulado *On a certain periodic function* (Cambridge Dublin Math. J. 3, 1848) en el que había descubierto el fenómeno. Wilbraham estudia la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(2k+1)x}{2k+1},$$

que corresponde a una función que vale $\pi/4$ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ y $-\pi/4$ en el resto del periodo y que aparece en el libro de Fourier; indica que erróneamente algunos autores dicen que las sumas parciales están comprendidas entre $\pi/4$ y $-\pi/4$, demuestra que no es así y obtiene el valor exacto del exceso. El artículo de Wilbraham se reproduce en el libro *A Source Book in Classical Analysis*, editado por G. Birkhoff (Harvard University Press, 1973).

6.2. Problemas

- 6.1 Calcular el valor aproximado de la integral que aparece en (6.2) utilizando la serie de Taylor de $\sin x$. Queda una serie alternada de término general decreciente y se puede estimar el error como se indica en la sección A.2.4.
- 6.2 Estudiar el fenómeno de Gibbs para la función representada en la figura 6.5.

Sumabilidad de series de Fourier

Hasta ahora nuestro objetivo ha sido estudiar la suma de la serie de Fourier de la función y compararla con la función. Pero podemos plantear el problema de otro modo: conocidos los coeficientes de Fourier de una función integrable, ¿es posible recuperar la función? En algunos casos ya hemos visto que la respuesta es afirmativa sin más que sumar la serie; pero también hemos visto que hay funciones continuas que no son la suma de su serie de Fourier. Ahora veremos métodos que permiten ir más lejos y ampliar la clase de funciones que se recuperan.

Cambiaremos la manera de asignar un valor suma a la serie y ya no haremos el límite de sus sumas parciales, pero siempre teniendo en cuenta que para una serie convergente el valor obtenido por el nuevo procedimiento debe coincidir con su suma anterior.

7.1. Sumabilidad Cesàro

El método de Cesàro consiste en tomar promedios de las sumas parciales antes de pasar al límite. Está basado en el conocido resultado para sucesiones numéricas que dice: *si el límite de la sucesión $\{b_n\}$ es l , la sucesión de promedios $(b_1 + b_2 + \dots + b_n)/n$ también converge a l .* (En el problema A.4 se pide una prueba y se comprueba que el recíproco no es cierto.)

Para una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ estudiaremos el límite de la sucesión

$$\sigma_N = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_N}{N},$$

donde s_k es la k -ésima suma parcial. Cuando esta sucesión de promedios es convergente a σ , decimos que la serie es *sumable Cesàro* con suma σ . El resultado arriba mencionado nos asegura que en caso de que la serie sea convergente, σ coincide con el límite de s_N .

Fejér aplicó con éxito este método de sumabilidad a las series de Fourier. Se trata pues de considerar la sucesión de funciones

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N S_j f(x)$$

(dividimos por $N+1$ porque la suma empieza en 0) y estudiar su límite. Vamos a comenzar escribiendo una expresión integral para σ_N como antes hemos hecho para S_N . Tenemos que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_j(t) f(x-t) dt.$$

Usando la expresión del núcleo de Dirichlet de (2.2) obtenemos

$$\sum_{j=0}^N D_j(t) = \sum_{j=0}^N \frac{\sin(j+1/2)t}{2 \sin t/2} = \frac{1 - \cos(N+1)t}{4 \sin t/2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(N+1)t/2}{\sin t/2} \right)^2.$$

Para la segunda igualdad hemos usado que

$$2 \sin t/2 \sin(j+1/2)t = \cos jt - \cos(j+1)t.$$

Se llama *núcleo de Fejér* a

$$(7.1) \quad F_N(t) = \frac{1}{2(N+1)} \left(\frac{\sin(N+1)t/2}{\sin t/2} \right)^2,$$

y con esta notación podemos escribir

$$(7.2) \quad \sigma_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) f(x-t) dt.$$

Usando la expresión (2.4) para las sumas parciales se puede escribir una análoga para $\sigma_N f(x)$:

$$(7.3) \quad \sigma_N f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F_N(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt.$$

Propiedades (Propiedades del núcleo de Fejér).

1. F_N es una función periódica, par y no negativa.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \pi$ para todo N .
3. Para cualquier $\delta > 0$, $F_N(t)$ tiende uniformemente a 0 en $\delta \leq |t| \leq \pi$.

Que F_N es par y no es negativa se ve claramente en (7.1), al igual que la acotación

$$F_N(t) \leq \frac{1}{2(N+1) \sin^2 \delta/2}$$

que implica la propiedad 3. Para obtener la propiedad 2 basta observar que F_N es promedio de núcleos de Dirichlet, que tienen integral 1.

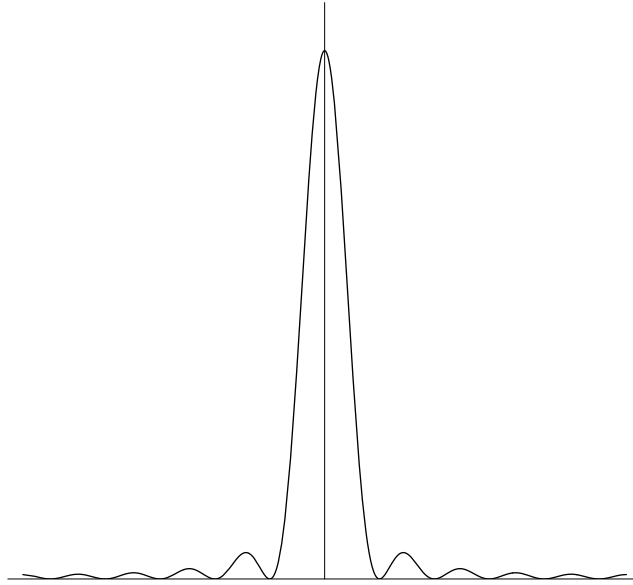


Figura 7.1. Gráfica de F_{10} .

Teorema 7.1 (Fejér). *Si la función integrable f tiene límites laterales en el punto x ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

En particular, si f es continua en x ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f(x) = f(x).$$

Este teorema fue muy importante en su tiempo ya que restituía a las series de Fourier una propiedad que el resultado negativo de du Bois-Reymond sobre la convergencia de la serie para funciones continuas parecía haber cerrado, la de recuperar los valores de una función continua en todos sus puntos (además con convergencia uniforme como veremos en la sección 7.3). A cambio, exigía cambiar el procedimiento de asignar a la serie un valor suma. Veamos la prueba.

Demostración. Utilizando (7.3) y la propiedad 2 de F_N (junto con el hecho de ser par) podemos escribir

$$\begin{aligned}\sigma_N f(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F_N(t)[f(x-t) + f(x+t) - f(x-) - f(x+)] dt.\end{aligned}$$

Ahora tenemos

$$\begin{aligned}\left| \int_0^\pi F_N(t)[f(x-t) - f(x-)] dt \right| &\leq \int_0^\delta + \int_\delta^\pi F_N(t)|f(x-t) - f(x-)| dt \\ &\leq \pi \sup_{0 \leq t \leq \delta} |f(x-t) - f(x-)| + \sup_{\delta < t \leq \pi} F_N(t) \left(\int_{-\pi}^\pi |f| + \pi |f(x-)| \right).\end{aligned}$$

Dado ϵ , se puede escoger δ de modo que el primer sumando sea menor que $\epsilon/2$ por la definición de $f(x-)$ y con este δ fijado, para todo N suficientemente grande el segundo sumando también es menor que $\epsilon/2$ por la propiedad 3 de F_N . Se razona igualmente con $f(x+t) - f(x+)$. \square

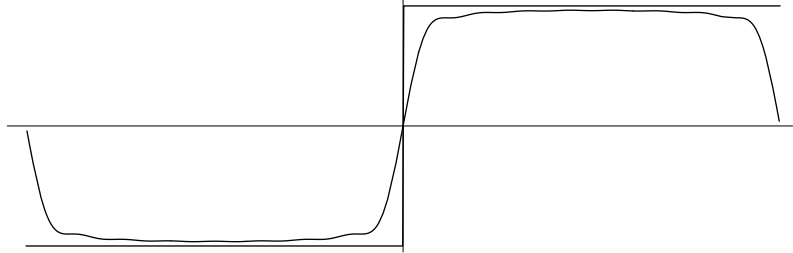


Figura 7.2. Gráfica de $\sigma_{16}f(x)$ para la función signo.

Si tratamos de escribir esta misma prueba con el núcleo de Dirichlet en lugar del de Fejér, sólo hay un lugar donde se estropea: en la acotación de la integral entre 0 y δ aparece la integral del valor absoluto del núcleo, el núcleo de Fejér es positivo y la integral es la misma con o sin valor absoluto; el de Dirichlet no es positivo y las integrales con o sin valor absoluto son muy distintas (véase (4.2)). Esta “pequeña” diferencia entre las propiedades de los dos núcleos es crucial.

Por otra parte, es fácil darse cuenta de que ahora no hay fenómeno de Gibbs (ver figura 7.2). En efecto, si $m \leq f(x) \leq M$, se tiene $m \leq \sigma_N f(x) \leq M$ (otra vez por la positividad del núcleo de Fejér) y nunca se superan los valores máximo y mínimo de la función.

Un teorema de Hardy afirma que si una serie $\sum a_n$ es sumable Cesàro y su término general satisface $|na_n| \leq C$, entonces la serie es convergente. Los coeficientes de Fourier de una función monótona a trozos y acotada satisfacen esta condición de tamaño (problema 2.2), de modo que el teorema de Dirichlet 2.5 se puede deducir del de Fejér.

7.2. Sumabilidad Abel-Poisson

Sea $\sum a_n$ una serie numérica convergente. Entonces, la serie $\sum a_n r^n$ es convergente para todo $0 < r < 1$ y define una función $S(r)$. Abel demostró que $\lim_{r \rightarrow 1^-} S(r)$ coincide con la suma de la serie original. (En el problema A.15 del apéndice A se pide una prueba.) Sin embargo, $S(r)$ y su límite pueden existir sin que la serie original $\sum a_n$ sea convergente (por ejemplo, para que $S(r)$ exista en $0 < r < 1$ es suficiente que la sucesión $\{a_n\}$ esté acotada), lo que sugiere una nueva manera de asignar una suma a una serie, que llamamos *sumabilidad Abel*. Unos años antes del resultado de Dirichlet, Poisson creyó haber probado la convergencia de la serie de Fourier por este procedimiento.

Se trata pues de estudiar

$$(7.4) \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Comenzamos, como en casos anteriores, buscando una expresión integral. Para ello sustituimos primero los coeficientes a_k y b_k por sus expresiones integrales; puesto que la serie de (7.4) converge uniformemente para $r < 1$ fijo, podemos intercambiar integral y sumatorio para obtener

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos k(x-t) \right] dt.$$

Se llama *núcleo de Poisson* a la expresión

$$P_r(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt,$$

que se puede transformar en una expresión más manejable. Para ello, escribiendo $S = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \cos kt$, tenemos

$$\begin{aligned} 2S \cos t &= \sum_{k=1}^{\infty} r^k [\cos(k+1)t + \cos(k-1)t] \\ &= \frac{1}{r}(S - r \cos t) + r(S + 1) = \left(r + \frac{1}{r}\right)S + (r - \cos t). \end{aligned}$$

Despejando S y sumando $1/2$ tenemos finalmente

$$(7.5) \quad P_r(t) = \frac{1 - r^2}{2(1 - 2r \cos t + r^2)}$$

cuyas propiedades son semejantes a las del núcleo de Fejér.

Propiedades (Propiedades del núcleo de Poisson).

1. P_r es periódica, par y $P_r(t) \geq 0$ para todo t .
2. $\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t) dt = \pi$ para todo $0 \leq r < 1$.
3. Para cualquier $\delta > 0$, $P_r(t)$ tiende uniformemente a 0 en $\delta \leq |t| \leq \pi$ cuando $r \rightarrow 1-$.

Está claro que P_r es una función periódica y par y escribiendo el denominador como $(1-r)^2 + 2r(1-\cos t)$ se observa que es positiva. Cuando $\delta \leq |t| \leq \pi$, el denominador se acota inferiormente por $(1-r)^2 + 2r(1-\cos \delta)$ para obtener la propiedad 3. Para la propiedad de la integral, lo mejor es utilizar la serie que da P_r e integrar término a término, lo que es lícito porque hay convergencia uniforme.

Teorema 7.2. *Sea f integrable y acotada. Si f tiene límites laterales en un punto x ,*

$$\lim_{r \rightarrow 1-} P_r * f(x) = \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)].$$

En particular, si f es continua en x ,

$$\lim_{r \rightarrow 1-} P_r * f(x) = f(x).$$

La prueba es idéntica a la del teorema 7.1 y se deja como ejercicio.

7.3. Sumabilidad uniforme

Sabemos que si la serie de Fourier converge uniformemente, el límite tiene que ser una función continua. Es fácil observar que lo mismo es cierto si en lugar de convergencia estudiamos la sumabilidad a través de cualquiera de los métodos anteriores; en efecto, $\sigma_N f$ y $P_r * f$ son funciones continuas. Pero ahora la condición es también suficiente: la continuidad implica la convergencia uniforme.

Teorema 7.3. *Si f es una función continua en $[-\pi, \pi]$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma_N f = f \quad \text{y} \quad \lim_{r \rightarrow 1-} P_r * f = f$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Demostración. Sólo la haremos para $\sigma_N f$ ya que el otro caso es semejante. Escribamos como en la prueba del teorema 7.1

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \sup_{|t| \leq \delta} |f(x-t) - f(x)| + \frac{4M}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} F_N(t) dt.$$

Como ahora deseamos convergencia uniforme necesitamos que dado $\epsilon > 0$ exista $\delta > 0$ tal que $\sup_{0 \leq t \leq \delta} |f(x-t) - f(x)| < \epsilon/2$ para todo x (es decir,

el mismo δ para todo x). Esto es cierto por la continuidad uniforme de f en $[-\pi, \pi]$. \square

Un famoso teorema debido a Weierstrass asegura que toda función continua se puede aproximar uniformemente por polinomios en un intervalo cerrado. Un resultado semejante se obtiene como corolario del teorema anterior, con polinomios trigonométricos (se toma la sucesión $\sigma_N f$ como aproximante de f).

Corolario 7.4. *Sea f una función continua en $[-\pi, \pi]$. Entonces existe una sucesión de polinomios trigonométricos que converge a f uniformemente.*

Se puede probar el teorema de Weierstrass a partir de éste (problema 7.4).

Corolario 7.5. *Dos funciones continuas que tienen la misma serie de Fourier son iguales.*

Puesto que sus promedios de sumas parciales son los mismos y el límite de éstos es único, las dos funciones son la misma. Conviene echar una ojeada a los resultados de los capítulos anteriores para asegurarse de que no había ninguno que permitiese asegurar el resultado de este corolario.

7.4. Aproximación en media

Hasta ahora hemos considerado sólo la posibilidad de representar la función a través de su serie de Fourier estudiando límites puntuales o uniformes. Sin embargo, sabemos que existen otros modos de convergencia. En particular, la sucesión $\{g_N\}$ converge en media (o en L^1) a una función g en $[-\pi, \pi]$ si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N(t) - g(t)| dt = 0.$$

La diferencia entre la convergencia en media y la convergencia uniforme es que mientras esta última exige que hechas las diferencias en cada punto la máxima de ellas tienda a cero, la convergencia en media sólo necesita que su promedio (integral) tienda a cero. También se habla de la convergencia en media p (media cuadrática si $p = 2$) cuando se cumple que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |g_N(t) - g(t)|^p dt = 0.$$

Teorema 7.6. *Sea f una función integrable. Entonces,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f - f| = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r * f - f| = 0.$$

Demostración. Nuevamente trabajaremos sólo con $\sigma_N f$. Volviendo a la demostración del teorema 7.1 escribimos

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f(x) - f(x)| dx \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\delta}^{\delta} F_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt dx + 2\|f\|_1 \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_N(t) dt. \end{aligned}$$

Lo único que necesitamos para concluir el teorema es probar que si f es integrable

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)| dx = 0.$$

Este resultado está en (B.2) del apéndice B. \square

Para funciones integrables y acotadas, el resultado en media p se deduce fácilmente del anterior. Basta observar que si $|f(x)| \leq M$, entonces $|\sigma_N f(x)| \leq M$ y, por tanto, $|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq 2M$. Se pone entonces

$$|\sigma_N f(x) - f(x)|^p \leq (2M)^{p-1} |\sigma_N f(x) - f(x)|$$

y se aplica el teorema anterior. Pero el resultado es válido aunque la función no esté acotada.

Teorema 7.7. *Sea f una función de L^p (es decir, $|f|^p$ es integrable). Entonces,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f - f|^p = 0 \quad y \quad \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{-\pi}^{\pi} |P_r * f - f|^p = 0.$$

La demostración es como la del teorema 7.6 con la siguiente observación:

$$\begin{aligned} |\sigma_N f(x) - f(x)|^p & \leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) |f(x-t) - f(x)| dt \right)^p \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) |f(x-t) - f(x)|^p dt, \end{aligned}$$

que es consecuencia de la desigualdad de Hölder (teorema B.18 en el apéndice B) aplicada a $F_N(t)^{1/p'}$ y $F_N(t)^{1/p} |f(x-t) - f(x)|$.

La cuestión de la unicidad, que hemos mencionado en la sección anterior para funciones continuas, se puede responder ahora para funciones integrables. Si los coeficientes de Fourier de una función f son todos nulos, las sumas $\sigma_N f$ son todas nulas y el teorema 7.6 implica que $\int |f| = 0$. Si los coeficientes de f y g coinciden, los de $f - g$ son nulos y se tiene el siguiente corolario.

Corolario 7.8. *Si f y g son funciones integrables en $[-\pi, \pi]$ y tienen los mismos coeficientes de Fourier, se tiene*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f - g| = 0.$$

Por tanto, f y g coinciden en casi todo punto.

La consecuencia se obtiene de la propiedad 4 de la sección B.2.6 del apéndice B.

7.5. Convergencia en media cuadrática e igualdad de Plancherel

Probamos en el teorema 1.1 que de todos los polinomios trigonométricos de grado N , el que mejor aproxima a f en media cuadrática es precisamente la N -ésima suma parcial de su serie de Fourier. Como $\sigma_N f$ es un polinomio trigonométrico de grado N , se tiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f - f|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f - f|^2,$$

y del teorema 7.7 se deduce la convergencia de las sumas parciales en media cuadrática.

Corolario 7.9. *Sea f una función de cuadrado integrable. Entonces,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N f - f|^2 = 0.$$

Este razonamiento no vale si $p \neq 2$ (lo que no quiere decir que el resultado sea falso). El cálculo de la sección 1.4 muestra que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |S_N f - f|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^N (a_k^2 + b_k^2) \right].$$

Haciendo el límite cuando N tiende a infinito, el corolario 7.9 produce el siguiente:

Corolario 7.10 (Igualdad de Plancherel). *Sea f de cuadrado integrable y acotada. Entonces,*

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

La igualdad de Plancherel nos dice que lo que en el capítulo 1 habíamos llamado desigualdad de Bessel era un resultado parcial y que, en realidad, es una igualdad. De todos modos, la desigualdad de Bessel es un resultado general de sistemas ortogonales mientras que la igualdad de Plancherel es un resultado particular para algunos de ellos, que llamamos completos, como se verá en el capítulo 10. En el caso de las series de Fourier la igualdad de Plancherel se llama a veces *igualdad de Parseval*.

En un trabajo escrito en 1799 y publicado en 1805 –¡antes del primer trabajo de Fourier!– Parseval obtenía de un modo puramente formal la igualdad mencionada, incluso en la forma (equivalente) de producto escalar

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} fg = \frac{a_0(f)a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(f)a_k(g) + b_k(f)b_k(g)).$$

Podría ser más apropiado llamar igualdad de Parseval a la correspondiente a series de Fourier y guardar el nombre de igualdad de Plancherel para las integrales. Hay autores que lo hacen así, hay quienes usan el nombre igualdad de Parseval-Plancherel para ambas, e incluso quienes usan nombres distintos según sea la versión con normas o con productos escalares. Aun a riesgo de ser injusto con el reconocimiento al trabajo de Parseval, he utilizado el nombre único de igualdad de Plancherel para todas las versiones que aparecen en este texto.

Además de saber que S_N converge a f en la norma de L^2 , podemos medir el error en términos de los coeficientes de Fourier ya que de las igualdades previas se deduce que

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N f - f|^2 = \sum_{k=N+1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2);$$

la calidad de la aproximación depende de la rapidez con la que los coeficientes de Fourier tienden a cero.

Veremos en el capítulo 10 que también hay un resultado recíproco; dadas sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ de modo que las series $\sum a_n^2$ y $\sum b_n^2$ sean convergentes, existe una función de cuadrado integrable cuyos coeficientes de Fourier son los de la sucesión (teorema 10.5). Aquí es esencial la integral de Lebesgue para estar trabajando en un espacio de Hilbert (las funciones integrables Riemann de cuadrado integrable no forman un espacio completo).

Podemos pensar si el corolario 7.9 será cierto en media en vez de en media cuadrática; es decir, si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_N f - f| = 0$$

siempre que f sea integrable. La respuesta es negativa. Un modo de probarlo es aplicar el principio de acotación uniforme (teorema 4.2) con $E = F = L^1$ y la sucesión de operadores $f \mapsto S_N f = D_N * f$; puesto que cada uno de estos operadores está acotado de L^1 en L^1 porque $\|S_N f\|_1 \leq \|D\|_1 \|f\|_1$, el principio de acotación uniforme asegura que o bien existe A independiente de N tal que $\|S_N f\|_1 \leq A \|f\|_1$, o bien existe f en L^1 tal que la sucesión $\{\|S_N f\|_1\}$ no está acotada (y, por tanto, $S_N f$ no es convergente en L^1). Veamos que la primera posibilidad no ocurre. En efecto, sea F_n el núcleo de Fejér, para el que $\|F_n\|_1 = 1$; como $S_N F_n = \sigma_n(D_N)$ converge en L^1 a D_N cuando n tiende a infinito por el teorema 7.6, se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_N F_n\|_1 = \|D_N\|_1$ que por (4.2) es incompatible con $\|S_N F_n\| \leq A$ independiente de N .

La misma cuestión se puede plantear en cualquier otra norma p (véase la información histórica al final del apéndice C).

7.6. Problemas

7.1 La igualdad de Plancherel permite calcular la suma de series numéricas. Aplicarla a los desarrollos (2.10) y (2.11) de la sección 2.7 y obtener las sumas

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

7.2 Escribir la igualdad de Plancherel para la función

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } |x| < \alpha, \\ 0 & \text{para } \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Calcular las sumas de las series

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k\alpha}{k^2}.$$

7.3 Completar la prueba del teorema 7.2.

7.4 Probar el teorema de Weierstrass de aproximación uniforme por polinomios a partir del corolario 7.4 del modo siguiente:

1. Dada una función f continua en $[-1, 1]$ definir la función $g(t) = f(\cos t)$ en $[-\pi, \pi]$, que es par y continua.
2. Dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico en cosenos, $\sigma_N g$ con N suficientemente grande, tal que

$$\sup_{-\pi \leq t \leq \pi} |g(t) - \sigma_N g(t)| \leq \epsilon.$$

3. Deducir que $\sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t) - \sigma_N g(\arccos t)| \leq \epsilon$.
4. El teorema de Weierstrass estará probado si vemos que $\sigma_N g(\arccos t)$ es un polinomio; comprobarlo viendo que $\cos(n \arccos t)$ es un polinomio para todo n .

7.5 1. Comprobar que

$$\sigma_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} \left(1 - \frac{k}{N}\right) (a_k \cos kt + b_k \sin kt).$$

2. Probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_N f - f|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 - \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k^2 + b_k^2) \right] + \frac{\pi}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} k^2 (a_k^2 + b_k^2).$$

3. Deducir que si f es de cuadrado integrable se tiene

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^{N-1} k^2 (a_k^2 + b_k^2) = 0.$$

7.6 *Núcleos de sumabilidad.*

Sea K_t una familia de funciones periódicas de periodo 2π en la que t es un parámetro discreto o continuo. Diremos que es un *núcleo de sumabilidad* si se cumple:

1. $K_t(x) \geq 0$ para todo x .
2. $\int_{-\pi}^{\pi} K_t(x) dx = 1$ para todo t .
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{\delta < |x| < \pi} K_t(x) dx = 0$ para todo $\delta \in (0, \pi)$.

(Aquí t_0 puede ser finito o infinito.) El núcleo de Fejér y el de Poisson son (múltiplos de) núcleos de sumabilidad. Otro ejemplo muy sencillo es $K_t(x) = 1/t$ si $|x| < t/2$, $K_t(x) = 0$ si $t/2 < |x| < \pi$, con $t_0 = 0 < t < \pi$.

Repetir la pruebas de los teoremas 7.3, 7.6 y 7.7 para $K_t * f$, donde K_t es un núcleo de sumabilidad general.

Con $t = k$ entero y $t_0 = \infty$ definimos el *núcleo de de la Vallée-Poussin* a partir del núcleo de Fejér como $V_k = 2F_{2k+1} - F_k$. Comprobar que es núcleo de sumabilidad. Determinar los coeficientes de Fourier de V_k .

7.7 Probar que si $|f(x+t) - f(x)| \leq K|t|^\alpha$ con $0 < \alpha \leq 1$ se tiene

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq \frac{\pi+1}{1-\alpha} KN^{-\alpha}, \quad \text{si } \alpha < 1,$$

$$|\sigma_N f(x) - f(x)| \leq 2\pi K \frac{\log N}{N}, \quad \text{si } \alpha = 1.$$

Sugerencia: Acotar primero el núcleo de Fejér por

$$F_N(t) \leq \min \left(N+1, \frac{\pi^2}{(N+1)t^2} \right).$$

Después separar la integral en dos partes como en las pruebas de los teoremas 7.1 y 7.3 y elegir $\delta = 1/N$.

Resolución de algunas ecuaciones en derivadas parciales

La presentación que ofrezco en este capítulo no es la habitual ni la más adecuada para utilizar las series de Fourier en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales. Fourier inventó el *método de separación de variables* y fue este método, aplicado a la ecuación del calor, el que le condujo a la necesidad de desarrollar una función en serie trigonométrica de senos y cosenos. Aquí hemos contado la teoría al revés, hemos comenzado por el problema de la representación y ahora escribiremos la solución en forma de serie trigonométrica con coeficientes indeterminados, que trataremos de determinar a partir de la ecuación y de las condiciones iniciales. El método de separación de variables tiene además la ventaja de que conduce directamente al tipo de serie que se debe utilizar, que varía según las condiciones de contorno. Tampoco esto estará claro en esta presentación ya que escogemos un tipo de serie particular que las cumpla. Añadiré también que el método conduce siempre a un desarrollo de la solución a través de un sistema ortogonal de funciones (véase el capítulo 10), pero no siempre al sistema trigonométrico. Todos estos detalles quedan para un curso de ecuaciones en derivadas parciales.

8.1. La cuerda vibrante

La ecuación que permite describir el movimiento de una cuerda que vibra (como la de una guitarra) sin fuerzas externas es una ecuación en derivadas

parciales (*ecuación de ondas*) que, en forma simplificada, se escribe

$$(8.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Supondremos que la cuerda tiene longitud π y que sus puntos se sitúan (en reposo) en el intervalo $[0, \pi]$. La función $u(x, t)$ que aparece en la ecuación anterior expresa el desplazamiento del punto de abscisa x en el instante t , es decir, la posición de la cuerda en el instante t viene dada por (la gráfica de) la función de x que resulta al fijar t . La ecuación (8.1) tiene infinitas soluciones y para determinar la que corresponde a un movimiento concreto supondremos que los extremos de la cuerda están fijos, lo que se expresa como

$$(8.2) \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad \text{para todo } t,$$

y que conocemos la posición (f) y velocidad inicial (g) de la cuerda, es decir,

$$(8.3) \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < \pi.$$

Si fijamos t , la función $u(x, t)$ está definida en $[0, \pi]$ y vale 0 en los extremos según (8.2). Haciendo una extensión impar a $[-\pi, \pi]$ podemos desarrollarla en serie de Fourier de senos y escribir

$$(8.4) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx$$

que sustituida en la ecuación (8.1) y suponiendo que la derivación término a término de la serie es posible, conduce a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k''(t) + k^2 b_k(t)) \sin kx = 0.$$

Para que esta serie se anule para todo x necesitamos que sus coeficientes sean nulos

$$b_k''(t) + k^2 b_k(t) = 0 \quad \text{para todo } k.$$

Las funciones que satisfacen esta ecuación son

$$b_k(t) = A_k \cos kt + B_k \sin kt$$

que sustituidas en (8.4) producen la solución

$$(8.5) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \cos kt + B_k \sin kt] \sin kx.$$

Esta solución satisface la ecuación (8.1) y las condiciones (8.2). Para que cumpla (8.3) necesitamos escoger los coeficientes A_k y B_k . Sustituyendo

(8.5) en (8.3) resultan

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx = f(x)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} kB_k \sin kx = g(x),$$

de modo que A_k y kB_k son los coeficientes del desarrollo de Fourier en senos de f y g , respectivamente, es decir,

$$A_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad B_k = \frac{2}{\pi k} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin kx \, dx.$$

Si los coeficientes permiten justificar la derivación bajo el signo integral hemos encontrado una solución del problema planteado.

8.2. La difusión del calor

Sea una barra de longitud π que identificamos con el intervalo $[0, \pi]$. Escribimos $u(x, t)$ la temperatura del punto x de la barra ($0 \leq x \leq \pi$) en el instante t . Si suponemos que los extremos de la barra se mantienen a temperatura 0 y que en el instante inicial ($t = 0$) la temperatura viene dada por la función f , $u(x, t)$ viene determinada por las condiciones siguientes:

$$(8.6) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Podemos intentar resolver esta ecuación del calor como hemos hecho en la sección anterior. Para ello, para cada t fijo tenemos una función de x en $[0, \pi]$ de la que escribimos su serie de Fourier de senos

$$(8.7) \quad u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx.$$

De este modo se cumple la segunda condición de (8.6). Dejamos el resto de los detalles como ejercicio, con las siguientes indicaciones:

- (a) Suponiendo que la serie (8.7) se pueda derivar término a término, escribir la condición que deben cumplir las funciones $b_k(t)$ para que se cumpla la ecuación de (8.6).
- (b) Determinar las funciones $b_k(t)$ que cumplen la condición obtenida.

- (c) Escribir la expresión que queda en (8.7) cuando se sustituyen las funciones $b_k(t)$ obtenidas. En esta expresión quedan sin determinar unos coeficientes numéricos que hay que escoger haciendo $t = 0$ para que cumplan la tercera condición de (8.6).

La solución obtenida debe ser

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k e^{-k^2 t} \sin kx$$

con los coeficientes B_k dados por el desarrollo de f en serie de senos, o sea,

$$B_k = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$

8.3. Problemas

- 8.1** Completar los detalles de la resolución de la ecuación del calor (8.6) por medio de series de Fourier siguiendo los pasos indicados. Comprobar que la derivación término a término de la solución obtenida está justificada en $0 < x < \pi$, $t > 0$, y que se cumple la ecuación.
- 8.2** Considerar el problema de la ecuación del calor, como en (8.6), pero ahora con condiciones de contorno sobre la derivada (tipo Neumann), es decir,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) = f(x). \end{cases}$$

Encontrar la solución escribiendo $u(x, t)$ para cada t fijo como una serie trigonométrica de cosenos.

- 8.3** Se considera el problema siguiente para la ecuación del potencial en el rectángulo $[0, a] \times [0, b]$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, \\ u(x, 0) = f(x); u(x, b) = g(x). \end{cases}$$

Para cada y fijo se escribe $u(x, y)$ en serie de senos en el intervalo $(0, a)$ y se continúa como en los otros casos. Completar los cálculos.

- 8.4** Buscamos funciones armónicas (es decir, de laplaciano nulo) en el círculo unidad del plano conociendo su valor en la circunferencia. Escribiremos la solución en coordenadas polares de modo que busquemos $u(r, \theta)$ para $0 \leq$

$r < 1$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Utilizando la expresión del laplaciano en polares el problema es

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, \\ u(1, \theta) = f(\theta). \end{cases}$$

Para cada r fijo desarrollamos $u(r, \theta)$ en serie de Fourier y tenemos

$$u(r, \theta) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\theta + B_k(r) \sin k\theta).$$

Escribir las ecuaciones diferenciales ordinarias que deben satisfacer $A_k(r)$ y $B_k(r)$ y resolverlas; eliminar las soluciones que no sean continuas en el origen. Las constantes indeterminadas se obtienen a partir de f y la solución obtenida debe ser

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

donde a_k y b_k son los coeficientes de Fourier de f . A partir de aquí se pueden incorporar resultados que hemos descrito en la sección 7.2.

- 8.5** Encontrar los valores de α para los que existe una función periódica de periodo p , no nula, que satisface la ecuación

$$f'' = \alpha f.$$

Para cada uno de estos valores de α , encontrar todas las posibles soluciones.

- 8.6** Encontrar la serie de Fourier de una función $g(x)$ en $(-\pi, \pi)$ tal que

$$g'(x) - 2g(x) = \cos \frac{x}{2}.$$

Otras aplicaciones de las series de Fourier

9.1. Desigualdad de Wirtinger

Teorema 9.1. *Sea f una función con derivada de cuadrado integrable, de integral nula en $[-\pi, \pi]$ y tal que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces,*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt.$$

La desigualdad es estricta salvo si $f(t) = A \cos t + B \sin t$.

Demostración. Basta considerar la relación (1.5) entre los coeficientes de Fourier de f y f' y aplicar la igualdad de Plancherel. Se obtienen

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \quad \text{y} \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2),$$

que demuestran la desigualdad buscada. También se ve que la desigualdad es estricta salvo si los coeficientes de Fourier de f son nulos para $k > 1$. \square

Para intervalos distintos de $[-\pi, \pi]$ basta hacer un cambio de variable en la desigualdad.

9.2. Problema isoperimétrico

De entre todas las figuras con el mismo perímetro, ¿cuál es la que encierra mayor área? Esta es la cuestión que se conoce como *problema isoperimétrico*. Existen varias demostraciones de su solución y veremos a continuación una

que está basada en las series de Fourier (y la fórmula de Green del análisis de varias variables).

Supongamos que la curva tiene longitud 2π y se parametriza como $(x(t), y(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, en función de la longitud de arco, es decir, la longitud del trozo de curva entre $(x(0), y(0))$ y $(x(t), y(t))$ es t , para todo t . Usando la expresión para la longitud de arco, esto equivale a

$$(9.1) \quad \int_0^t \sqrt{x'(s)^2 + y'(s)^2} ds = t,$$

de donde $x'(t)^2 + y'(t)^2 = 1$. Podemos suponer además que hemos colocado los ejes de modo que $y(0) = y(\pi) = 0$.

Utilizando la fórmula de Green, el área encerrada por la curva se puede escribir como

$$A = \int_0^{2\pi} x(t)y'(t) dt,$$

y de aquí

$$\begin{aligned} A &\leq \int_0^{2\pi} \frac{x(t)^2 + y'(t)^2}{2} dt = \int_0^{2\pi} \frac{x(t)^2 + 1 - x'(t)^2}{2} dt \\ &= \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [x(t)^2 - x'(t)^2] dt. \end{aligned}$$

La última integral es menor o igual que cero por la desigualdad de Wirtinger de la sección anterior.

Por tanto, hemos demostrado que $A \leq \pi$ y como una circunferencia de longitud 2π encierra un círculo de área π , se obtiene el área máxima. Para comprobar que es el único caso debemos analizar si las desigualdades que hemos escrito en la demostración son estrictas o no. Ya hemos visto antes que la de Wirtinger es igualdad si $x(t) = A \cos t + B \sin t$ y para que $2x(t)y'(t) \leq x(t)^2 + y'(t)^2$ sea igualdad, debe ser $x(t) = y'(t)$. Entonces, $y'(t) = A \cos t + B \sin t$, lo que implica $y(t) = A \sin t - B \cos t + C$. Exigiendo que $y(0) = y(\pi) = 0$ queda $y(t) = A \sin t$, $x(t) = A \cos t$. Para que se cumpla la condición (9.1) debe ser $A = \pm 1$ y se obtiene una circunferencia.

La conclusión se recoge en el siguiente teorema.

Teorema 9.2. *El área encerrada por una curva de longitud 2π es menor que π , salvo si es la circunferencia de radio 1, en cuyo caso es igual a π .*

Si la longitud de la curva es L , un cambio de escala reduce el problema al anterior. Si A es el área encerrada por la curva, se tiene la *desigualdad isoperimétrica*

$$A \leq \frac{L^2}{4\pi},$$

que sólo es igualdad para circunferencias. Esta desigualdad tiene una lectura inversa: *de todas las figuras de igual área, el círculo es la que tiene menor perímetro.*

Se suele presentar el problema isoperimétrico como un problema clásico relacionado con la leyenda de la fundación de Cartago. Se cuenta que la reina Dido huyó de Tiro, expulsada por su hermano el rey, para establecerse en el norte de África. Allí consiguió comprar “el terreno que pudiese abarcar en una piel de toro”. Dido cortó en finas tiras la piel del toro, las ató y rodeó con ellas una porción de terreno; el problema isoperimétrico propone estudiar la forma tenía que tener ese terreno para que el área encerrada fuera máxima. Las primeras soluciones rigurosas del problema aparecieron en el siglo XIX: hacia 1840, J. Steiner probó por argumentos geométricos que si existía una figura que diese el área máxima tenía que ser un círculo (no probó la existencia del máximo). La primera prueba analítica, del estilo de la que acabamos de ver, se debe a A. Hurwitz (1902).

Una variante del problema dice que el terreno elegido por la reina Dido tenía el mar a un lado, de modo que lo que hay que determinar es la figura de área máxima entre las que están encerradas por una curva de longitud fija dada cuyos extremos se apoyan en una recta. Se deja como ejercicio.

9.3. Equidistribución de sucesiones aritméticas

Teorema 9.3. *Sea f continua y periódica de periodo 1 y $\{x_k\}$ una sucesión (progresión) aritmética $x_k = x_0 + k\gamma$ donde x_0 es arbitrario y γ es un número irracional. Entonces*

$$(9.2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) = \int_0^1 f(t) dt.$$

Demostración. Dejamos como ejercicio probar que se cumple si $f(t) = e^{2\pi int}$ para todo n . Entonces se cumple para todo polinomio trigonométrico.

Sea ahora f una función continua. Dado $\epsilon > 0$ existe un polinomio trigonométrico P tal que $|f(t) - P(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [0, 1]$ (corolario 7.4). Entonces

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k) - \int_0^1 f(t) dt \right| \leq 2\epsilon + \left| \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} P(x_k) - \int_0^1 P(t) dt \right|$$

y se deduce el teorema. □

Este resultado se debe a Hermann Weyl.

Corolario 9.4. *Sea $x_k = x_0 + k\gamma$ donde x_0 es arbitrario y γ un irracional. Si $0 \leq a < b \leq 1$, se tiene*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{k < N : a < x_k < b \pmod{1}\} = b - a$$

donde $\#A$ representa el número de elementos del conjunto A .

Esto significa que la probabilidad de que la parte fraccionaria de x_k esté en (a, b) es la longitud del intervalo, de ahí el nombre de equidistribución.

Demostración. Si en el teorema anterior tomásemos como f la función que en $[0, 1]$ coincide con la función característica de $[a, b]$ tendríamos el corolario. Pero como esta función no es continua (salvo si $a = 0$ y $b = 1$), tenemos que utilizar un argumento de aproximación.

Supongamos que $0 < a < b < 1$ (con pequeños cambios se hace el caso en que alguno de ellos es extremo). Sea $\epsilon < \min(a, 1 - b, (b - a)/2)$. Definimos funciones continuas y periódicas g_1 y g_2 (se pueden elegir lineales a trozos, por ejemplo) de modo que en $[0, 1]$ se tenga

$$\chi_{[a+\epsilon, b-\epsilon]} \leq g_1 \leq \chi_{[a, b]} \leq g_2 \leq \chi_{[a-\epsilon, b+\epsilon]}.$$

(χ_I es la función característica de I .) Entonces

$$\sum_{k=0}^{N-1} g_1(x_k) \leq \#\{k < N : a < x_k < b \pmod{1}\} \leq \sum_{k=0}^{N-1} g_2(x_k),$$

se divide por N y se aplica el teorema anterior a g_1 y g_2 para conseguir

$$b - a - 2\epsilon \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \#\{k < N : a < x_k < b \pmod{1}\} \leq b - a + 2\epsilon.$$

□

9.4. Problemas

9.1 Probar (9.2) para $f(t) = e^{2\pi i n t}$.

9.2 ¿Qué ocurre en el corolario 9.4 si γ es racional?

9.3 Estudiar la variante del problema isoperimétrico en el que la figura cuya área hay que maximizar está rodeada por una curva de longitud fija con los extremos apoyados en una recta.

Sistemas ortogonales de funciones

La propiedad de ortogonalidad se puede definir en espacios con producto escalar y los resultados de series de Fourier basados en esa propiedad valen en un contexto abstracto que presentamos ahora. Escribiremos los resultados para sucesiones y funciones con valores complejos para usarlos posteriormente, pero para nuestro tratamiento de las series de Fourier el caso real sería suficiente (basta suprimir la conjugación). Para un número complejo z escribiremos \bar{z} su complejo conjugado y $|z|$ su módulo.

10.1. Producto escalar

Definición. Sea E un espacio vectorial sobre \mathbf{C} . Se dice que una aplicación de $E \times E$ en \mathbf{C} tal que al par (x, y) asocia el número (complejo) $\langle x, y \rangle$ es un *producto escalar* sobre E si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ y sólo es 0 si $x = 0$,
- (ii) $\langle \alpha x_1 + \beta x_2, y \rangle = \alpha \langle x_1, y \rangle + \beta \langle x_2, y \rangle$ para todos $x_1, x_2, y \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$;
- (iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ para todos $x, y \in E$.

Ejemplos.

1. Sea $E = \mathbf{R}^n$ o \mathbf{C}^n y sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ elementos de E . El producto escalar habitual en E se define

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j,$$

donde la conjugación no tiene ningún efecto si estamos en \mathbf{R}^n .

2. Hay una versión semejante en dimensión infinita. Definimos el espacio $\ell^2(\mathbf{C})$ como el conjunto de sucesiones (x_1, x_2, x_3, \dots) de elementos complejos tales que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2$ es convergente. Dadas dos sucesiones $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, \dots)$ en este espacio se define su producto escalar como

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}.$$

3. Sea $\mathcal{C}([a, b])$ el espacio de funciones continuas definidas en $[a, b]$ con valores complejos. Dadas dos funciones f y g en este espacio se define su producto escalar

$$(10.1) \quad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt.$$

4. El mismo producto escalar (10.1) sirve en $L^2([a, b])$, que es el espacio de funciones definidas en $[a, b]$ de cuadrado integrable (véase la sección B.2.11 del apéndice B).

Todos los ejemplos se pueden considerar con valores reales y en ese caso la conjugación no tiene ningún efecto.

De la definición se deduce la siguiente propiedad

$$\langle x, \alpha y_1 + \beta y_2 \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta} \langle x, y_2 \rangle$$

para todos $x, y_1, y_2 \in E$, $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$.

Teorema 10.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwarz). *Dados x, y en un espacio vectorial E con un producto escalar, se tiene la siguiente desigualdad*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Demostración. Si $y = 0$ la igualdad es claramente cierta, así que supondremos $y \neq 0$. El producto escalar $\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle$ es mayor o igual que 0 para todo escalar α ; desarrollándolo obtenemos

$$\langle x + \alpha y, x + \alpha y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re} \alpha \overline{\langle x, y \rangle} + |\alpha|^2 \langle y, y \rangle.$$

Si elegimos $\alpha = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$ tenemos la desigualdad buscada. \square

La desigualdad original de Cauchy corresponde al caso de sumas finitas reales (es decir, al producto escalar de \mathbf{R}^n):

$$\left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n a_j^2 \sum_{j=1}^n b_j^2,$$

de donde se deduce el resultado para series. El resultado de Cauchy se puede probar por inducción. A. Schwarz probó la desigualdad para integrales.

Recordemos a continuación la definición de norma en un espacio vectorial.

Definición. Una aplicación de E en $[0, \infty)$ que a cada $x \in E$ asocia $\|x\|$ se dice que es una *norma* si satisface

- (i) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = 0$;
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para todo escalar α y todo $x \in E$;
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todos $x, y \in E$ (*desigualdad triangular*).

Si en un espacio vectorial E tenemos definido un producto escalar y para cada x ponemos $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, obtenemos una norma (problema 10.3). En adelante, cuando hablemos de una norma será siempre la definida por el producto escalar.

10.2. Sistemas ortogonales y ortonormales

Definición. Sea E un espacio con un producto escalar. Un subconjunto F de E se dice que es un *sistema ortogonal* si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo par de elementos distintos x, y de F . Si además $\langle x, x \rangle = 1$ para todo $x \in F$, el sistema se dice que es *ortonormal*.

Ejemplos.

1. La base canónica de \mathbf{R}^n o \mathbf{C}^n formada por $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$ es un sistema ortonormal.
2. Las sucesiones $(1, 0, 0, \dots)$, $(0, 1, 0, \dots)$, $(0, 0, 1, \dots)$, \dots forman un sistema ortogonal en $\ell^2(\mathbf{R})$ o $\ell^2(\mathbf{C})$.
3. Las funciones trigonométricas $\{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots\}$ forman un sistema ortogonal en $\mathcal{C}[-\pi, \pi]$. No es ortonormal pero se convierte fácilmente en ortonormal dividiendo cada función por $\sqrt{\pi}$, excepto la primera que se divide por $\sqrt{2\pi}$.
4. Se considera la función $r_0(t) = -1$ si $t \in [0, 1/2)$ y $r_0(t) = 1$ si $t \in [1/2, 1)$ que se extiende a todo \mathbf{R} por periodicidad (con periodo 1). Se define para cada entero positivo j la función $r_j(t) = r_0(2^j t)$. El sistema $\{r_j : j \in \mathbf{N}\}$ es ortogonal en $L^2[0, 1]$ (no en $\mathcal{C}([0, 1])$ porque las funciones no son continuas).

Teorema 10.2 (Teorema de Pitágoras). *Sea $\{\varphi_j, j = 1, \dots, N\}$ un sistema ortonormal y $\{\alpha_j, j = 1, \dots, N\}$ un conjunto de escalares. Entonces,*

$$\left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^N |\alpha_j|^2.$$

La demostración es sencilla usando la ortogonalidad. Si se aplica a dos vectores ortogonales del plano, su interpretación es el teorema clásico de

Pitágoras. Aplicado al sistema trigonométrico es la igualdad (1.8), igualdad de Plancherel para polinomios trigonométricos.

A partir de este teorema es inmediato comprobar que los elementos de un sistema ortonormal son linealmente independientes.

Teorema 10.3 (Desigualdad de Bessel). *Sea $\{\varphi_j\}$ un sistema ortonormal (finito o numerable) en E . Entonces, para todo $x \in E$,*

$$\sum_j |\langle x, \varphi_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demostración.

$$(10.2) \quad \left\langle x - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j, x - \sum_{j=1}^N c_j \varphi_j \right\rangle = \langle x, x \rangle - \sum_{j=1}^N 2\operatorname{Re} \bar{c}_j \langle x, \varphi_j \rangle + \sum_{j=1}^N |c_j|^2$$

es no negativo por la propiedad del producto escalar. Escogiendo $c_j = \langle x, \varphi_j \rangle$ queda la desigualdad de Bessel. \square

Esta prueba es la misma que la de la desigualdad semejante para el sistema trigonométrico, que hemos visto en el teorema 1.2. Aquí hemos probado menos porque hemos escogido c_j inmediatamente, lo que también se podría haber hecho allí si el objetivo hubiera sido exclusivamente la desigualdad de Bessel. Pero también ahora podíamos haber probado un teorema equivalente al 1.1: de todas las combinaciones lineales de $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$, la que minimiza el término de la izquierda de (10.2), es decir, la que minimiza la distancia definida por el producto escalar, es la que tiene los coeficientes $\langle x, \varphi_j \rangle$. Los detalles se piden en el problema 10.4.

Los valores $\langle x, \varphi_j \rangle$ se suelen llamar *coeficientes de Fourier* de x con respecto al sistema correspondiente.

10.3. Espacios de Hilbert

Tenemos en el espacio con producto escalar una norma definida por éste, como hemos mencionado antes. Si el espacio vectorial es completo con respecto a esa norma (es decir, si toda sucesión de Cauchy es convergente) se dice que es un *espacio de Hilbert*.

Si el espacio de Hilbert es de dimensión N , un sistema de N vectores ortonormales es una base y un elemento x de E se representa como $\sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$. Si la dimensión es infinita, que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$ tienda a x en esa norma se puede expresar por varias condiciones equivalentes.

Teorema 10.4. *Sea E un espacio de Hilbert y $\{\varphi_j\}$ un sistema ortonormal. Son equivalentes:*

- (i) $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j = x$ en la norma del producto escalar;

- (ii) $\|x\| = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle x, \varphi_j \rangle|^2$;
 (iii) si $\langle x, \varphi_j \rangle = 0$ para todo j , entonces $x = 0$.

Demostración. Que (i) y (ii) son equivalentes es consecuencia de

$$\left\| x - \sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^N |\langle x, \varphi_j \rangle|^2,$$

que es (10.2) con la elección de los coeficientes allí indicada.

Que (ii) implica (iii) es evidente porque si $\|x\| = 0$, x debe ser 0.

Para ver que (iii) implica (i), observemos que la sucesión $y_N = \sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j$ es de Cauchy en esta norma por la desigualdad de Bessel, luego tiene límite por ser el espacio completo. Sea y el límite. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene

$$|\langle y_N, \varphi_j \rangle - \langle y, \varphi_j \rangle| \leq \|y_N - y\|$$

de modo que $\lim_{N \rightarrow \infty} \langle y_N, \varphi_j \rangle = \langle y, \varphi_j \rangle$ para cada j . Pero, por otra parte, $\langle y_N, \varphi_j \rangle = \langle x, \varphi_j \rangle$ si $N \geq j$. Por tanto, $\langle y, \varphi_j \rangle = \langle x, \varphi_j \rangle$ para todo j y esto junto con (iii) implica $x = y$. \square

Un sistema ortonormal que satisface las condiciones del teorema anterior se dice que es *completo* o que es una *base hilbertiana*. La condición (ii) es lo que hemos llamado *igualdad de Plancherel* en el corolario 7.10, trabajando con el sistema trigonométrico. En consecuencia, el sistema trigonométrico satisface las condiciones exigidas en el teorema y es completo en el espacio de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$. Esta afirmación exige estar trabajando con la integral de Lebesgue. En efecto, el espacio de funciones continuas en $[-\pi, \pi]$ con el producto escalar (10.1) no es completo porque el límite de una sucesión de Cauchy de funciones continuas con respecto a esta norma no tiene por qué ser continua; pero tampoco es completo si trabajamos con la integral de Riemann, porque el límite de una sucesión de Cauchy (para la norma del producto escalar) puede ser una función no integrable. Para conseguir la completitud debemos utilizar la integral de Lebesgue.

La igualdad de Plancherel que aparece en el teorema anterior tiene una versión en términos del producto escalar en vez de la norma. Es la siguiente:

$$(10.3) \quad \langle x, y \rangle = \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \overline{\langle y, \varphi_j \rangle}.$$

De (10.3) se deduce (ii) del teorema 10.4 haciendo $x = y$. De (i) del teorema y la desigualdad de Cauchy-Schwarz se deduce (10.3) porque

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle x - \sum_{j=1}^N \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j, y - \sum_{j=1}^N \langle y, \varphi_j \rangle \varphi_j \right\rangle = 0.$$

Si en un espacio de Hilbert tenemos un sistema ortonormal completo que sea numerable, podemos dar una especie de teorema recíproco del anterior.

Teorema 10.5 (Teorema de Riesz-Fischer). *Sea E un espacio de Hilbert, $\{\varphi_j\}$ una base ortonormal de E y $\{a_j\}$ una sucesión numérica tal que la serie $\sum_j |a_j|^2$ es convergente. Entonces existe $x \in E$ único tal que $\langle x, \varphi_j \rangle = a_j$ para todo j .*

Demostración. Sea $x_n = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j$; la sucesión $\{x_n\}$ es de Cauchy en E porque, si $n > m$, del teorema de Pitágoras se deduce que

$$\|x_n - x_m\|^2 = \sum_{j=m+1}^n |a_j|^2.$$

Por ser E completo, existe $x \in E$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y de aquí, $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, \varphi_j \rangle = \langle x, \varphi_j \rangle$. Como $\langle x_n, \varphi_j \rangle = a_j$ siempre que $n \geq j$, el teorema está probado. \square

Como consecuencia, si un espacio de Hilbert E tiene una base ortonormal numerable, existe una correspondencia biunívoca entre E y el espacio $l^2(\mathbf{C})$ ($l^2(\mathbf{R})$ si el cuerpo de escalares es real) antes definido, que además es una isometría (las normas de los elementos asociados son iguales).

El sistema trigonométrico es un ejemplo de sistema ortonormal completo del espacio $L^2(-\pi, \pi)$; para otros intervalos basta hacer los cambios de la sección 1.6.1. La siguiente sección describe otra base hilbertiana para $L^2(0, 1)$; en el problema 10.10 damos una para $L^2(-1, 1)$ y en la sección 12.5 mostraremos otra para $L^2(\mathbf{R})$.

10.4. Base de Haar

Una base sencilla de describir para las funciones de cuadrado integrable en un intervalo es la base de Haar. La construimos para el intervalo $[0, 1]$. La familia de funciones que describimos depende de dos parámetros: $\{h_{k,j}\}$ donde $k = 0, 1, 2, \dots$ y $j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Para cada k dividimos el intervalo $[0, 1]$ en 2^k intervalos iguales (que llamamos intervalos *diádicos*) y $h_{j,k}$ está soportada en el j -ésimo intervalo; vale 1 en la mitad izquierda del intervalo y -1 en la mitad derecha. Además añadimos la función que vale 1 en todo $[0, 1]$.

Es fácil comprobar que las funciones del sistema de Haar son ortogonales. No son de norma 1, pero basta multiplicarlas por $2^{-k/2}$ para que lo sean. Para probar que son base ortonormal de $L^2(0, 1)$ aplicamos el apartado (iii) del teorema 10.4: si f tiene integral nula y para todas las funciones $h_{k,j}$ del

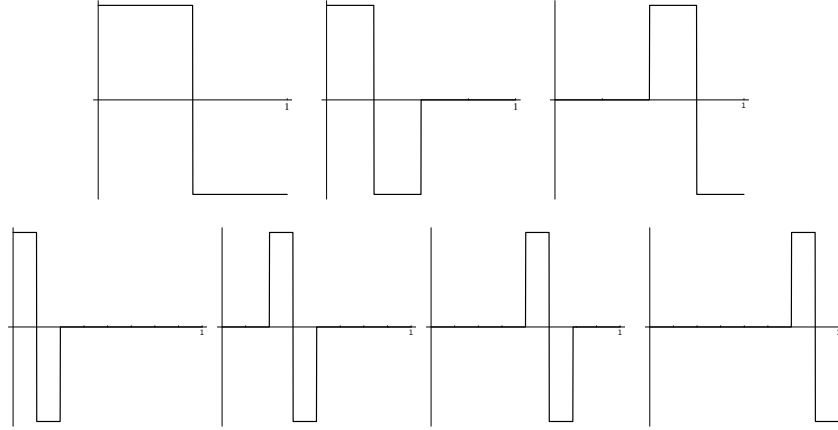


Figura 10.1. Funciones de la base de Haar para $k = 0, 1, 2$.

sistema se cumple

$$\int_0^1 f h_{k,j} = 0,$$

entonces f es idénticamente nula. En el problema 10.11 se indican los detalles. Una vez visto esto, toda función de $L^2(0, 1)$ se puede representar como

$$(10.4) \quad f(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{2^k-1} c_{k,j} h_{k,j}(t),$$

donde la convergencia es en L^2 .

La base de Haar fue introducida por Alfred Haar en 1910. Después de muchos años ha vuelto a la actualidad porque la moderna teoría de ondículas (*wavelets*) la ha incorporado como uno de sus ejemplos característicos. A diferencia del sistema trigonométrico de las series de Fourier, las funciones de la base de Haar están localizadas; así, si una función es nula en un intervalo I , todos los coeficientes $c_{k,j}$ del desarrollo (10.4) que corresponden a funciones $h_{k,j}$ soportadas en I son nulos. Por otra parte, todas las funciones de la base se obtienen por traslación y dilatación de $h_{0,0}$; en efecto, $h_{k,j}(t) = h_{0,0}(2^k t - j)$. El defecto de las funciones del sistema es que no son continuas y para el análisis en ondículas, la construcción de bases en las que la función de partida tenga cierta regularidad es importante.

10.5. Problemas

- 10.1** Comprobar que los ejemplos de la sección 10.1 definen productos escalares. (No hay que olvidar comprobar que las expresiones tienen sentido.)
- 10.2** Probar que la desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si y sólo si x e y son linealmente dependientes.

- 10.3** Comprobar que si en E tenemos definido un producto escalar, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ define una norma. (La desigualdad de Cauchy-Schwarz será útil para probar la desigualdad triangular.)
- 10.4** Sea $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert E y E_N el espacio vectorial engendrado por los elementos del sistema. Probar que el elemento de E_N más próximo (en la norma de E) a un elemento x de E es el que tiene como coeficientes los coeficientes de Fourier de x .
- 10.5** Supongamos que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ en un espacio de Hilbert E . Probar las afirmaciones siguientes:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo y de E .
(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$.

Probar que el recíproco es cierto, es decir, que (i) y (ii) implican que x_n tiende a x . Dar contraejemplos que muestren que una sola de las condiciones no es suficiente para asegurar el recíproco.

- 10.6** Si $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$ en un espacio de Hilbert, probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle x_n, y_n \rangle = \langle x, y \rangle.$$

- 10.7** Escribir la forma que toma (10.3) cuando se aplica al sistema trigonométrico en forma real.
- 10.8** La completitud del sistema trigonométrico complejo $\{e^{inx}, n \in \mathbf{Z}\}$ se puede deducir del real. Escribir las igualdades de Plancherel en términos de la norma y el producto escalar en este caso. Adaptar el sistema trigonométrico a funciones periódicas de periodo $2l$ y escribir las igualdades de Plancherel correspondientes.
- 10.9** *Ortonormalización de Gram-Schmidt.*

Un conjunto finito o numerable $\{x_n\}$ de elementos linealmente independientes de un espacio vectorial con producto escalar se puede ortonormalizar. Para ello se define $e_1 = x_1/\|x_1\|$ y por recurrencia, si se han construido e_1, \dots, e_{n-1} , se define

$$e_n = \frac{x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j \rangle e_j}{\|x_n - \sum_{j=1}^{n-1} \langle x_n, e_j \rangle e_j\|}.$$

Comprobar que efectivamente se construye un sistema ortonormal. Comprobar también que el subespacio engendrado por los vectores $\{e_1, e_2, \dots, e_N\}$ coincide con el engendrado por $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ para cada N .

10.10 *Polinomios de Legendre.*

Aplicando el proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt a la sucesión de polinomios $\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$ en $L^2(-1, 1)$ se obtiene un sistema ortonormal cuyos elementos se llaman *polinomios de Legendre*. Calcular los cuatro primeros.

Como los polinomios son densos en $L^2(-1, 1)$ (a través del teorema de aproximación de Weierstrass, por ejemplo), los polinomios de Legendre forman una base hilbertiana de $L^2(-1, 1)$.

10.11 Para probar que el sistema de Haar es completo tenemos que ver que si para $f \in L^2(0, 1)$ la integral de f y las de $fh_{k,j}$ en $(0, 1)$ son todas 0, la función es idénticamente nula.

1. Empezar viendo que por ser las integrales de f y $fh_{0,0}$ nulas, debe ser nula la integral de f en $(0, 1/2)$ y en $(1/2, 1)$.
2. Probar por inducción que la integral de f sobre cualquier intervalo diádico tiene que ser nula.
3. Probar que todo intervalo contiene algún intervalo diádico.
4. Deducir que si f es una función escalonada y es ortogonal a todas las funciones del sistema de Haar, debe ser nula.
5. Concluir aproximando una función general por funciones escalonadas.

Transformada de Fourier en L^1

Las series de Fourier representan funciones definidas en un intervalo de la recta o, equivalentemente, funciones periódicas en la recta. Para representar funciones definidas en toda la recta y no periódicas, se sustituye por la *transformada de Fourier*. Ahora es conveniente trabajar en forma compleja, como hemos indicado que se podía hacer para las series (sección 1.6.3).

Formalmente se puede deducir una expresión de la transformada de Fourier a partir de la serie. Supongamos que f es una función periódica de periodo $2l$, entonces su serie de Fourier en forma compleja se escribe

$$(11.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\pi i n t / l} dt \right) e^{\pi i n x / l}.$$

Llamando $\xi_n = n/2l$ y

$$h(\xi) = \int_{-l}^l f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt,$$

(11.1) se escribe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_n - \xi_{n-1}) h(\xi_n) e^{2\pi i \xi_n x}$$

que tiene el aspecto de una suma de Riemann. En el límite tendríamos la igualdad formal

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \xi t} dt \right] e^{2\pi i \xi x} d\xi,$$

que contiene lo que llamaremos transformada de Fourier de f en la expresión interior, y la fórmula de inversión que dará f a partir de la transformada.

Aunque se puede hacer la teoría sólo con la integral de Riemann, ahora resulta mucho más cómodo razonar con la de Lebesgue, que será lo que hagamos en adelante. Las propiedades de esta integral que utilizaremos se recogen en el apéndice B.

11.1. Transformada de Fourier

Sea f una función integrable definida en \mathbf{R} . Su *transformada de Fourier* será la función definida también en \mathbf{R} , que representamos como \hat{f} , dada por

$$(11.2) \quad \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

La definición varía según los gustos en la aparición de ciertas constantes: el exponente puede ser $-ix\xi$; en este caso, la fórmula de inversión (11.4) lleva un factor $1/2\pi$ multiplicando a la integral; para recuperar la simetría a veces se pone un factor $1/\sqrt{2\pi}$ en la definición de la transformada. Además, el exponente casi siempre lleva signo $-$, pero algunos autores usan signo $+$ (en este caso, el $-$ aparece en la fórmula de inversión).

Igual que las series de Fourier en el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición o *análisis* de f en componentes; ahora en lugar de presentar sólo frecuencias discretas formando una sucesión, aparece un rango continuo de frecuencias (todo \mathbf{R}). A cada *frecuencia* ξ le corresponde un coeficiente $\hat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo; su módulo es la *amplitud* y su argumento es la *fase*. La reconstrucción de f a partir de \hat{f} es la *síntesis*.

Proposición 11.1 (Propiedades algebraicas de la transformada).

1. *Linealidad:* $(\alpha f + \beta g)^\wedge = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.
2. *Conjugación:* $(\overline{f})^\wedge(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$.
3. *Traslación:* si $\tau_h f(x) = f(x+h)$, entonces $(\tau_h f)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi i h \xi}$.
4. *Modulación:* si $g(x) = f(x)e^{2\pi i h x}$, entonces $\hat{g}(\xi) = (\tau_{-h}\hat{f})(\xi)$.
5. *Dilatación:* si $g(x) = \lambda^{-1}f(\lambda^{-1}x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\lambda\xi)$.

La primera se deduce inmediatamente de la linealidad de la integral; la segunda, de las propiedades de la conjugación; para las demás hay que hacer los cambios de variable adecuados.

Proposición 11.2 (Propiedades analíticas de la transformada).

1. \hat{f} es una función (uniformemente) continua y $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_1$.
2. Si f y f' son integrables, $(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$.

3. Si $xf(x)$ es integrable, \hat{f} es derivable y $(-2\pi ixf)^{\wedge}(\xi) = (\hat{f})'(\xi)$.
4. Lema de Riemann-Lebesgue: $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0$.
5. Si f y g son integrables, $\int f\hat{g} = \int \hat{f}g$.

Demostración. 1. Se escribe

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-2\pi i x h} - 1| dx.$$

El integrando tiende puntualmente a cero con h y está acotado por $2|f(x)|$ que es integrable, luego la integral tiende a cero por el teorema de la convergencia dominada. La uniformidad se deduce porque la cota no depende de ξ .

2. Como f es integrable, existen sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ que tienden respectivamente a $-\infty$ y $+\infty$, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = 0$. Integrando por partes se tiene

$$\begin{aligned} \int_{a_n}^{b_n} f'(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \\ = f(b_n) e^{-2\pi i b_n \xi} - f(a_n) e^{-2\pi i a_n \xi} + 2\pi i \xi \int_{a_n}^{b_n} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx. \end{aligned}$$

Haciendo tender n a infinito y teniendo en cuenta que f y f' son integrables, se tiene el resultado.

3. Para calcular la derivada de \hat{f} se puede derivar bajo el signo integral usando el teorema B.13: la integrabilidad de $xf(x)$ es suficiente para ello.
4. Multiplicamos (11.2) por $-e^{i\pi}$ y hacemos un cambio de variable para escribir

$$\hat{f}(\xi) = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i \xi(x-1/2\xi)} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \frac{1}{2\xi}) e^{-2\pi i x \xi} dx;$$

lo sumamos con (11.2) y llegamos a

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x + \frac{1}{2\xi})| dx,$$

que tiende a cero cuando ξ tiende a ∞ por la continuidad de la integral (propiedad B.2 en el apéndice B).

5. Se escribe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i xy} dy dx$$

y se aplica el teorema de Fubini para cambiar el orden de integración. \square

Las propiedades segunda y tercera se pueden aplicar sucesivamente si se tienen más derivadas integrables de f o si $x^m f(x)$ es integrable. Esta última

condición se cumple siempre si la función es de soporte compacto¹, y en este caso \hat{f} es \mathcal{C}^∞ . Incluso se tiene un resultado más fuerte.

Teorema 11.3. *Si f es de soporte compacto, \hat{f} es analítica. En consecuencia, si \hat{f} se anula en todos los puntos de un intervalo es idénticamente nula (por el corolario 11.5, f será nula en casi todo punto).*

Se dice que una función es analítica si coincide con la suma de su serie de Taylor.

Demostración. Supongamos que f se anula fuera de $[-A, A]$; entonces

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\pi i (\xi - a))^n}{n!} \int_{-A}^A f(x) e^{-2\pi i x a} x^n dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\xi - a)^n\end{aligned}$$

con

$$|c_n| \leq \frac{(2\pi A)^n}{n!} \|f\|_1.$$

Tenemos así una serie de potencias que converge en todo \mathbf{R} .

Si \hat{f} se anula en un intervalo abierto, $\hat{f}^{(n)}(a) = 0$ para cualquier a del intervalo; al ser \hat{f} analítica, tiene que ser idénticamente nula. \square

Este resultado es una versión simplificada de un teorema más completo, llamado *teorema de Paley-Wiener*, que asegura que se puede definir \hat{f} en una banda del plano complejo y que es una función analítica en esa banda.

Ejemplo 11.1. Sea f la función característica del intervalo $[-1/2, 1/2]$, es decir, $f(x) = 1$ si $-1/2 \leq x \leq 1/2$ y $f(x) = 0$ en otro caso; entonces,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}.$$

La función del segundo miembro se suele llamar *seno cardinal* y se representa por $\text{sinc } \xi$. Utilizando las propiedades algebraicas 3 y 5 se puede deducir a partir de aquí la transformada de Fourier de la función característica del intervalo $[a, b]$.

Ejemplo 11.2. Sea $f(x) = e^{-2\pi|x|}$; entonces,

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + \xi^2}.$$

Utilizando la propiedad algebraica 5 podemos calcular la transformada de $e^{-\lambda|x|}$.

¹Recordemos que una función es de soporte compacto si se anula fuera de un intervalo cerrado.



Figura 11.1. Gráficas de las funciones f y \hat{f} del ejemplo 11.1.

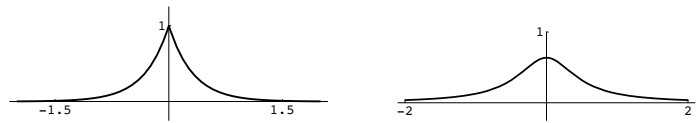


Figura 11.2. Gráficas de $e^{-\pi|x|}$ y su transformada de Fourier.

Ejemplo 11.3. Sea $f(x) = e^{-\pi x^2}$. Derivando, $f'(x) = -2\pi x f(x)$ y utilizando las propiedades analíticas 2 y 3 deducimos que

$$2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = -i \hat{f}'(\xi).$$

Tenemos así que \hat{f} satisface una ecuación diferencial lineal de primer orden, que se resuelve fácilmente por separación de variables y da $\hat{f}(\xi) = C e^{-\pi \xi^2}$. (También se podía haber dicho que f y \hat{f} satisfacen la misma ecuación diferencial lineal de primer orden y, por tanto, deben ser linealmente dependientes, $\hat{f} = C f$.) Para determinar la constante hagamos $\xi = 0$,

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

(El cálculo de la integral de e^{-x^2} se puede hacer por varios procedimientos. Véase el problema 11.2.) Utilizando la propiedad algebraica 5 deducimos que entonces

$$(11.3) \quad \left(\frac{1}{\lambda} e^{-\pi x^2 / \lambda^2} \right) \hat{\quad}(\xi) = e^{-\pi \lambda^2 \xi^2}.$$

Otros dos procedimientos para calcular la transformada de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ aparecen en el problema 11.3.

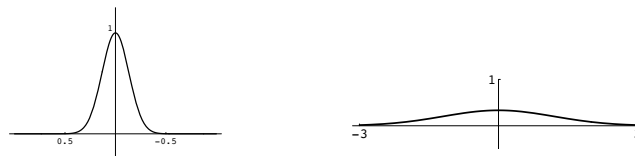


Figura 11.3. Gráficas de $e^{-9\pi x^2}$ y su transformada de Fourier.

11.2. Un teorema de inversión

Teorema 11.4. *Si f y \hat{f} son integrables, entonces*

$$(11.4) \quad f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad \text{c.t.p.}$$

Además, el término de la derecha es una función continua en x , de modo que f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos de continuidad de f .

Observamos que el término de la derecha es la transformada de Fourier de \hat{f} evaluada en $-x$; dicho de otro modo, $(\hat{f})^\wedge(x) = f(-x)$ en casi todo punto. Por tanto, aplicar cuatro veces sucesivas la transformada de Fourier produce una identidad.

Demostración. Utilizando (11.3) y la propiedad analítica 5 de la transformada de Fourier se deduce que

$$(11.5) \quad \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-\pi y^2/t^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Si hacemos tender t a cero, el último término tiende al segundo miembro de (11.4) por el teorema de la convergencia dominada. En la primera integral hacemos el cambio de variable y por ty ; si f es continua en x y acotada, por ejemplo, el primer término tiende a $f(x)$, por el mismo teorema.

Como no hacemos la hipótesis de continuidad de f , probamos primero la convergencia en L^1 a f del primer miembro. En efecto,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x+ty) e^{-\pi y^2} dy - f(x) \right| dx \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+ty) - f(x)| dx \right) dy, \end{aligned}$$

podemos aplicar el teorema B.17 para deducir que el término entre paréntesis tiende a cero para cada y y acotarlo por $2\|f\|_1$ para aplicar el teorema de la convergencia dominada y deducir que el límite es 0. Ahora el teorema B.16 asegura que hay una sucesión de valores de t para la que el término de la izquierda de (11.5) converge a f en casi todo punto. Con esta sucesión terminamos la demostración.

El término de la derecha de (11.4) define una función continua por la propiedad 1 de la proposición 11.2. \square

Este teorema se aplica al ejemplo 11.2 y podemos poner

$$e^{-2\pi|x|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\xi^2} e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

Sin embargo, no se aplica al ejemplo 11.1 porque la función $\sin \xi/\xi$ no es integrable en el sentido de Lebesgue. Sí existe la integral impropia y utilizándola podemos invertir la transformada de Fourier como veremos en la siguiente sección.

Corolario 11.5. *Si $f \in L^1$ y $\hat{f} = 0$ c.t.p., entonces $f = 0$ c.t.p.*

Como f y \hat{f} son integrables, se aplica el teorema.

11.3. Resultados de convergencia puntual

Los resultados clásicos de convergencia puntual que hemos visto para series de Fourier tienen su contrapartida en el caso de las integrales de Fourier. A la manera de la suma parcial de la serie de Fourier definimos para $R > 0$,

$$S_R f(x) = \int_R^R \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

y estudiamos $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x)$. Cada una de estas integrales tiene sentido porque \hat{f} es continua, pero como no tiene por qué ser una función integrable no escribimos la integral de $-\infty$ a ∞^2 .

Comenzamos viendo la representación de $S_R f$ por medio de un núcleo de Dirichlet. Para ello ponemos

$$\begin{aligned} S_R f(x) &= \int_R^R \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i t \xi} dt e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \int_R^R e^{2\pi i (x-t)\xi} d\xi dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{\sin 2\pi R(x-t)}{\pi(x-t)} dt. \end{aligned}$$

Si ahora definimos el *núcleo de Dirichlet* como

$$(11.6) \quad D_R(x) = \frac{\sin 2\pi R x}{\pi x},$$

tenemos

$$(11.7) \quad S_R f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) D_R(x-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) D_R(t) dt,$$

de manera semejante a la representación de las sumas parciales de las series de Fourier dada en (2.3). Al ser $D_R(t)$ una función par también podemos escribir

$$(11.8) \quad S_R f(x) = \int_0^{\infty} [f(x-t) + f(x+t)] D_R(t) dt.$$

Utilizando la representación (11.7) y el lema de Riemann-Lebesgue de la proposición 11.2 tenemos un principio de localización análogo al teorema 2.2.

²Usando la terminología del apéndice B, sección B.1.4.3, estamos haciendo el valor principal de Cauchy de la integral en \mathbf{R} .

Teorema 11.6. Si f es una función integrable que se anula en $(x - \delta, x + \delta)$ para algún $x \in \mathbf{R}$ y $\delta > 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = 0$.

Teorema 11.7. Sea f una función integrable. Si para algún x y algún A la función

$$h(t) = \frac{f(x-t) + f(x+t) - 2A}{t}$$

es integrable en $0 < t < \delta$, entonces $\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = A$.

Demostración. Sabemos que $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N D_R(t) dt = 1/2$ (por ejemplo, en el problema 2.7 del capítulo 2 se propone una prueba). Escribimos

$$\begin{aligned} S_R f(x) - A &= \int_0^N [f(x-t) + f(x+t) - 2A] D_R(t) dt \\ &\quad + \int_N^\infty [f(x-t) + f(x+t)] D_R(t) dt \\ &\quad + \left(1 - 2 \int_0^N D_R(t) dt\right) A. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos N de modo que

$$\left| \frac{1}{2} - \int_0^N D_R(t) dt \right| \cdot |A| \leq \frac{\epsilon}{6},$$

y

$$\int_N^\infty \frac{|f(x-t) + f(x+t)|}{\pi t} dt < \frac{\epsilon}{3}.$$

Una vez fijado N , $h(t)$ es integrable en $(0, N)$ y el lema de Riemann-Lebesgue implica que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^N \frac{|f(x-t) + f(x+t) - 2A|}{\pi t} \sin \pi R t dt = 0.$$

Eligiendo R_0 tal que si $R > R_0$ esta integral es (en valor absoluto) menor que $\epsilon/3$, resulta que para $R > R_0$ se tiene $|S_R f(x) - A| < \epsilon$. \square

Este teorema es análogo al teorema de Dini para series de Fourier (teorema 2.8). En particular, si f es derivable en x el teorema vale con $A = f(x)$ y si existen derivadas laterales será $A = [f(x+) + f(x-)]/2$, resultados que corresponden a los teoremas 2.3 y 2.4. Se pueden utilizar condiciones más débiles de tipo Lipschitz, por ejemplo, las de (2.7).

También se puede dar un teorema de tipo Dirichlet-Jordan para integrales de Fourier.

Teorema 11.8. Si f es integrable en \mathbf{R} y de variación acotada en un entorno de x ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2}.$$

Como hemos visto en el capítulo 2 (previamente al teorema 2.10) una función de variación acotada es diferencia de dos funciones no decrecientes. Para probar el teorema es suficiente ver que se cumple si f es no decreciente en un entorno de x y para ello se imita la prueba del teorema 2.5.

11.4. Convolución y transformada de Fourier

Dadas dos funciones integrables, f y g , se define su convolución $f * g$ como la función integrable dada por

$$(11.9) \quad f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy.$$

La integral no tiene por qué tener sentido puntualmente, pero es válida como función en L^1 ya que según el teorema de Fubini y la hipótesis de integrabilidad de f y g se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx dy \\ &= \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

De paso hemos probado que $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$ (además, hay igualdad si ambas funciones son positivas).

Teorema 11.9. Si f y g son integrables, $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy e^{-2\pi i x \xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-2\pi i (x-y) \xi} dx \right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i y \xi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \right) dy = \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi). \end{aligned}$$

□

Cuando $g(x) = \overline{f(-x)}$, la convolución se llama *correlación* y se escribe $f \star f$.

Corolario 11.10. $(f \star f)^\wedge(\xi) = |f(\xi)|^2$.

11.5. Resultados de sumabilidad

Como ocurría con las series de Fourier también ahora es más fácil recuperar la función si en vez de hacer el límite de las sumas parciales utilizamos métodos de sumabilidad. Presentamos tres y hacemos una prueba conjunta.

11.5.1. Sumabilidad Cesàro. Consiste en hacer promedios de sumas parciales:

$$\begin{aligned}\sigma_R f(x) &= \frac{1}{R} \int_0^R S_r f(x) dr = \frac{1}{R} \int_0^R \int_{-r}^r \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi dr \\ &= \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.\end{aligned}$$

Si la función F_R cuya transformada de Fourier es $1 - |\xi|/R$ es integrable, los teoremas 11.9 y 11.4 permiten escribir

$$\sigma_R f(x) = F_R * f(x).$$

Calculando F_R por la fórmula de inversión (problema 11.6) resulta

$$(11.10) \quad F_R(x) = \frac{1}{R} \left(\frac{\sin \pi R x}{\pi x} \right)^2,$$

que se llama *núcleo de Fejér*. También se puede calcular F_R teniendo en cuenta que

$$F_R(x) = \frac{1}{R} \int_0^R D_r(x) dr.$$

11.5.2. Sumabilidad Abel-Poisson. Este método de sumabilidad consiste en hacer convergente la integral de la inversión por la introducción de un factor $e^{-\pi t|\xi|}$ y hacer después tender t a cero. Es decir, estudiamos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t|\xi|} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

También esta integral se puede escribir como una convolución de f con la transformada inversa de $e^{-\pi t|\xi|}$; según el ejemplo 11.2 tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t|\xi|} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = P_t * f(x),$$

donde

$$(11.11) \quad P_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2},$$

que se llama *núcleo de Poisson*.

11.5.3. Sumabilidad Gauss-Weierstrass. Ahora introducimos el factor $e^{-\pi t \xi^2}$ para hacer convergente la integral y estudiamos

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi.$$

La integral se escribe como una convolución

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t \xi^2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = W_t * f(x),$$

donde, a partir del ejemplo 11.3,

$$(11.12) \quad W_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\pi \xi^2/t},$$

que se llama *núcleo de Gauss*.

11.5.4. Propiedades comunes y teoremas.

Propiedades. 1. Los núcleos de Fejér, Poisson y Gauss son pares y no negativos.

2. Los tres núcleos tienen integral 1.

3. Fijado $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x| > \delta} F_R(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{|x| > \delta} P_t(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \sup_{|x| > \delta} W_t(x) = 0.$$

y

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y| > \delta} F_R(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} P_t(y) dy = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{|y| > \delta} W_t(y) dy = 0.$$

Las propiedades se comprueban fácilmente. Para la segunda lo más sencillo es darse cuenta de que la integral de una función coincide con el valor de su transformada de Fourier en 0.

Teorema 11.11. Si f es integrable y existen los límites laterales en un punto x ,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} P_t * f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} W_t * f(x) = \frac{1}{2} [f(x+) + f(x-)].$$

En particular, el límite es $f(x)$ en los puntos de continuidad.

Si f es integrable y uniformemente continua (lo que ocurre, por ejemplo, si es continua y tiene soporte compacto) la convergencia es uniforme.

Demostración. La prueba es análoga en los tres casos utilizando las propiedades de los núcleos que hemos mencionado. La escribimos para el núcleo de Fejér.

$$\begin{aligned} \sigma_R f(x) - \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] \\ = \int_0^\infty F_R(y) [f(x+y) + f(x-y) - (f(x+) + f(x-))] dy. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ elegimos δ de modo que $|f(x+y) + f(x-y) - (f(x+) + f(x-))| < \epsilon/2$ cuando $0 < y \leq \delta$; esto junto con las propiedades 1 y 2 del núcleo de Fejér da

$$\int_0^\delta F_R(y) |f(x+y) + f(x-y) - (f(x+) + f(x-))| dy < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \int_\delta^\infty F_R(y) |f(x+y) + f(x-y) - (f(x+) + f(x-))| dy \\ \leq \sup_{|y|>\delta} F_R(y) \|f\|_1 + |(f(x+) + f(x-))| \int_\delta^\infty F_R(y) dy; \end{aligned}$$

utilizando la propiedad 3, encontramos R_0 de modo que cuando $R > R_0$ esta última expresión es menor que $\epsilon/2$.

La continuidad uniforme en la hipótesis mencionadas se deja como ejercicio. \square

Teorema 11.12. *Si f es integrable, $\sigma_R f$, $P_t * f$ y $W_t * f$ convergen a f en L^1 , es decir,*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \|\sigma_R f - f\|_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|P_t * f - f\|_1 = \lim_{t \rightarrow 0^+} \|W_t * f - f\|_1 = 0.$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned} \|\sigma_R f - f\|_1 &= \int_{-\infty}^\infty \left| \int_{-\infty}^\infty F_R(y) (f(x-y) - f(x)) dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^\infty F_1(y) \left(\int_{-\infty}^\infty |f(x - \frac{y}{R}) - f(x)| dx \right) dy. \end{aligned}$$

(Hemos hecho un cambio de variable en la integral en y antes de pasar a la última desigualdad.) Se termina con el teorema de la convergencia dominada y la continuidad de la integral como en la prueba del teorema 11.4. \square

Este resultado no implica convergencia puntual, pero de las propiedades de los espacios L^p (teorema B.16) se deduce que existe una sucesión $\sigma_{R_n} f$ que converge a f en casi todo punto e igualmente con los otros núcleos. Ahora bien, la sucesión depende de f . El resultado general, sin extraer sucesiones, también es cierto pero no lo demostraremos aquí.

11.6. Transformada de Fourier en senos y en cosenos

En el estudio de series de Fourier hemos indicado (sección 1.6.2) que dada una función en $(0, \pi)$ se pueden definir una serie de Fourier de cosenos o una serie de Fourier de senos, según se elijan una extensión par o una impar a $(-\pi, \pi)$.

Algo semejante se puede hacer ahora. Dada una función f en $(0, \infty)$ se define su *transformada de Fourier en cosenos* como

$$\hat{f}_C(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos 2\pi x \xi \, dx,$$

y su *transformada de Fourier en senos* como

$$\hat{f}_S(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin 2\pi x \xi \, dx.$$

Se comprueba fácilmente que la primera coincide con la transformada de Fourier usual de la extensión par de f a todo \mathbf{R} y la segunda con la de su extensión impar multiplicada por i .

11.7. Transformada de Fourier en \mathbf{R}^n

La transformada de Fourier se define para funciones integrables de \mathbf{R}^n como la función en \mathbf{R}^n dada por

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) e^{-2\pi i(x_1 \xi_1 + \dots + x_n \xi_n)} \, dx_1 \dots dx_n.$$

Las propiedades se mantienen con pequeños cambios, por ejemplo, la aparición de derivadas parciales en vez de ordinarias. También son válidos el teorema de inversión 11.4 y el referente a la convolución 11.9.

Cuando $f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$, la transformada de Fourier de f es el producto de las transformadas unidimensionales de f_1, \dots, f_n . Esto junto con los ejemplos 11.1 y 11.3 permite calcular las integrales de Fourier de productos de funciones características y de la gaussiana n -dimensional $e^{-\pi|x|^2}$ donde $|x|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

11.8. Problemas

11.1 Probar las propiedades algebraicas de la transformada de Fourier.

11.2 Dos maneras de calcular la integral en $(0, \infty)$ de $e^{-\pi x^2}$.

- (a) Multiplicando la integral por sí misma se tiene una integral en el plano, que se puede escribir como integral doble utilizando el teorema de Fubini. Pasando a coordenadas polares esta integral sale directamente.

- (b) Aplicar el teorema de Fubini a la función $f(x, y) = ye^{-(x^2+1)y^2}$ en $(0, \infty) \times (0, \infty)$. En un sentido la integral se calcula directamente, en el otro conduce a la que buscamos.

11.3 Dos métodos más para calcular la transformada de Fourier de la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$ del ejemplo 11.3. Completar los detalles.

- (a) Utilizando el desarrollo en serie de Taylor de la exponencial se tiene

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\pi i x \xi)^n}{n!} dx$$

y se puede integrar término a término. Las integrales para n impar son nulas porque el integrando es impar; para n par se pueden obtener por recurrencia.

- (b) Completando un cuadrado se puede escribir

$$\hat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx$$

y llamando $h(\xi)$ a la integral del segundo miembro tenemos

$$h'(\xi) = -2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} (x+i\xi) e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} e^{-\pi(x+i\xi)^2} dx = 0.$$

Entonces h es constante y su valor se calcula haciendo $\xi = 0$.

11.4 Probar que para una función real f la fórmula de inversión (11.4) se puede escribir

$$f(x) = 2 \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \cos 2\pi(x-y)\xi dy d\xi.$$

Esta fórmula se llama *teorema integral de Fourier* y aparece en el libro de Fourier.

11.5 Determinar las condiciones que debe cumplir f para que \hat{f} sea real y para que sea imaginaria pura. (No olvidar que f puede tomar valores complejos.)

11.6 Cálculo del núcleo de Fejér. Basta hacerlo para $R = 1$ y aplicar la propiedad algebraica de dilatación de la transformada de Fourier. Se tiene

$$F_1(x) = \int_{-1}^1 (1 - |\xi|) e^{2\pi i x \xi} d\xi = 2 \int_0^1 (1 - \xi) \cos(2\pi x \xi) d\xi.$$

11.7 Calcular las transformadas de Fourier de las funciones: (a) $xe^{-|x|}$; (b) xe^{-x^2} ; (c) $(4x^2 - 2)e^{-x^2}$.

11.8 Calcular las transformadas de Fourier de las funciones: (a) $(ax^2 + bx + c)^{-1}$ con $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$; (b) e^{x-x^2} ; (c) $\int_{-1/2}^{1/2} e^{-(x-t)^2} dt$; (d) $e^{-|2\pi x|} \text{sinc } x$.

11.9 Calcular utilizando transformadas de Fourier las integrales:

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos bx}{x^2 + a^2} dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bx dx \quad \text{con } a > 0.$$

11.10 Probar la segunda afirmación del teorema 11.11: si f es integrable y uniformemente continua, $\lim_{R \rightarrow \infty} \sigma_R f = f$ uniformemente.

11.11 Calcular f y g sabiendo que cumplen las ecuaciones

$$\int_0^{\infty} f(u) \cos(2\pi ux) du = e^{-x} \quad \text{si } 0 < x < \infty;$$

$$\int_0^{\infty} g(u) \sin(2\pi ux) du = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x < \infty. \end{cases}$$

11.12 Probar que las n -traslaciones del seno cardinal son ortogonales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x-n) \text{sinc}(x-m) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m, \\ 0 & \text{si } n \neq m, \end{cases}$$

con n y m enteros.

11.13 Probar la fórmula de inversión para la transformada de Fourier del ejemplo 11.1 directamente, utilizando la integral de $\sin x/x$ calculada en el problema 2.7.

11.14 *La clase de Schwartz.* Las propiedades analíticas 2 y 3 de la transformada de Fourier sugieren definir el siguiente espacio de funciones que llamamos espacio o clase de (Laurent) Schwartz:

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}) : \sup_{t \in \mathbf{R}} |t|^m |f^{(j)}(t)| = c_{mj} < \infty \text{ para todo } m, j \in \mathbf{N}\}.$$

Las funciones \mathcal{C}^{∞} de soporte compacto están en $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ pero también otras como e^{-x^2} .

Probar que las funciones de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ son integrables y que sus transformadas de Fourier también están en $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Por tanto, se puede aplicar el teorema 11.4; deducir que la transformación de Fourier es una biyección de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ en sí mismo.

11.15 *Fenómeno de Gibbs.* El fenómeno de Gibbs que hemos presentado en el capítulo 6 para las series de Fourier también ocurre en el caso de la transformada. Para comprobarlo escogamos la función del ejemplo 11.1, es decir, la función característica del intervalo $(-1/2, 1/2)$. Según los resultados de convergencia de la sección 11.3 se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = f(x)$$

en los puntos de continuidad, que son todos menos $1/2$ y $-1/2$. En un intervalo de cualquiera de estos dos puntos, las sumas parciales presentan un exceso sobre el valor 1, como en el caso de las series.

$S_R f$ se puede escribir según (11.7) como

$$S_R f(x) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \frac{\sin 2\pi R t}{\pi t} dt.$$

De aquí podemos deducir la condición para que la derivada de $S_R f$ sea nula. Si $R = N$ entero, podemos determinar cuáles son los valores de x que anulan a esta derivada y comprobar que el extremo más próximo a $1/2$ por su izquierda ocurre en $x = (N - 1)/2N$. Determinar

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f\left(\frac{N-1}{2N}\right)$$

y comprobar que el exceso es el mismo que ocurre en el caso de las series de Fourier.

Comprobar también que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{N \leq R < N+1} |S_R f(x) - S_N f(x)| = 0.$$

11.16 Usando el teorema de inversión para la función $e^{-x} \chi_{(0, \infty)}(x)$ deducir que

$$\int_0^\infty \frac{t \sin xt + \cos xt}{1 + t^2} dt = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \pi/2 & \text{si } x = 0, \\ \pi e^{-x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

11.17 Encontrar f integrable tal que $f * f(x) = \frac{1}{a^2 + x^2}$.

11.18 Probar que la ecuación $f = f * f$ no tiene ninguna solución no nula en L^1 .

11.19 *Núcleos de sumabilidad.*

Igual que en el caso de series (problema 7.6) se pueden definir núcleos de sumabilidad en las integrales de Fourier, que incluyen a los núcleos de Fejér, Poisson y Gauss. Sea K_t una familia de funciones en \mathbf{R} en la que t es un parámetro discreto o continuo. Diremos que es un *núcleo de sumabilidad* si se cumple:

1. $K_t(x) \geq 0$ para todo x .
2. $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x) dx = 1$ para todo t .
3. $\lim_{t \rightarrow t_0} \sup_{|x| > \delta} K_t(x) = 0$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} \int_{|x| > \delta} K_t(x) dx = 0$ para todo $\delta > 0$.

(Aquí t_0 puede ser finito o infinito.) Los teoremas que hemos probado para los núcleos particulares se pueden repetir para $K_t * f$.

Transformada de Fourier en L^2

La teoría de las series de Fourier de funciones de cuadrado integrable tiene un marco natural en los espacios de Hilbert como hemos visto en el capítulo 10. Una teoría semejante ahora tiene un problema de partida: las funciones de cuadrado integrable no tienen por qué ser integrables, de modo que la definición de la transformada de Fourier (11.2) podría no tener sentido. Éste es el primer problema que hay que resolver. Hagamos notar que no podemos limitarnos al espacio L^2 de funciones reales porque la transformada de Fourier de una función real puede no ser real, así que las funciones pueden tomar valores complejos y el producto escalar y la norma en L^2 son

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad \text{y} \quad \|f\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

12.1. Igualdad de Plancherel en $L^1 \cap L^2$

Proposición 12.1. *Sea f una función en $L^1 \cap L^2$ (es decir, f y f^2 son integrables). Entonces, \hat{f} está en L^2 y satisface*

$$(12.1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Esta igualdad de normas en L^2 se llama *igualdad de Plancherel* y es la correspondiente a la del corolario 7.10 para series de Fourier. La elección de otras variantes de la definición de transformada de Fourier mencionadas en la observación posterior a (11.2) puede requerir una constante multiplicando a uno de los términos de la igualdad de Plancherel.

Antes de probar la proposición daremos un lema.

Lema 12.2. *Si f y g están en L^2 su convolución define una función continua.*

Demostración. La función $|f(x-y)g(y)|$ es integrable porque se mayor a puntualmente por $|f(x-y)|^2 + |g(y)|^2$, de modo que la convolución está bien definida.

Además, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} |f * g(x+h) - f * g(x)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h-y) - f(x-y)| |g(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y+h) - f(y)|^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^2 dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

que tiende a cero con h por la continuidad respecto a las traslaciones de la norma de L^2 (teorema B.17). \square

Demostración de la proposición. La correlación $f \star f$ definida en la sección 11.4 es una función integrable, por ser convolución de dos funciones integrables, y es continua, por el lema precedente. Utilizando el resultado de sumabilidad del teorema 11.11 con el núcleo de Gauss, por ejemplo, podemos escribir

$$(12.2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = f \star f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t \xi^2} d\xi.$$

Si probamos que \hat{f} está en L^2 , el teorema de la convergencia dominada permite pasar el límite dentro de la integral en el último término y obtener (12.1).

Excluimos el caso trivial en que f es cero en casi todo punto. Por un lado tenemos que si $0 < t < t_0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\xi)|^2 e^{-\pi t \xi^2} d\xi \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Ahora, fijado $R > 0$ podemos encontrar $t < t_0$ tal que $e^{-\pi t \xi^2} \geq 1/2$ cuando $|\xi| < R$; entonces

$$\int_{-R}^R |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq 4 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$$

y del teorema de la convergencia monótona se deduce que la integral de $|\hat{f}(\xi)|^2$ es finita. \square

12.2. Definición de la transformada de Fourier en L^2

Dada una función f de L^2 , existen sucesiones de funciones de $L^1 \cap L^2$ que convergen a f en L^2 . Una de ellas es

$$(12.3) \quad f_n(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } |x| < n, \\ 0, & \text{en otro caso;} \end{cases}$$

la convergencia a f en L^2 es consecuencia del teorema de la convergencia monótona (teorema B.10).

Sea $\{f_n\}$ una sucesión cualquiera de $L^1 \cap L^2$ que converge a f en L^2 ; será una sucesión de Cauchy en L^2 y aplicando la proposición 12.1 se tiene

$$\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\|_2 = \|f_n - f_m\|_2,$$

lo que implica que la sucesión $\{\hat{f}_n\}$ también es de Cauchy en L^2 . Como L^2 es un espacio completo, la sucesión $\{\hat{f}_n\}$ converge, de modo que existe una función h de L^2 tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{f}_n - h\|_2 = 0$. Diremos que h es la transformada de Fourier de f , que seguiremos escribiendo como \hat{f} .

Necesitamos comprobar que la definición anterior no depende de la sucesión escogida. Así es, porque si $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ son dos sucesiones de $L^1 \cap L^2$ que convergen en L^2 a f , su diferencia converge a 0; por la igualdad (12.1), $\hat{f}_n - \hat{g}_n$ también converge a 0 y sus límites deben ser iguales.

Por otra parte, está claro que si la función ya estaba en L^1 la nueva definición no cambia la transformada de Fourier porque se puede tomar $f_n = f$ para todo n .

Teorema 12.3. *Sea f una función de $L^2(\mathbf{R})$.*

1. *Se tiene*

$$\hat{f}(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

entendiendo el límite en la norma de L^2 .

2. *f y \hat{f} satisfacen la igualdad de Plancherel (12.1).*

3. *Si f y g están en L^2 ,*

$$(12.4) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) g(\xi) d\xi.$$

y

$$(12.5) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi.$$

Demostración. 1. Se aplica la definición a la sucesión $\{f_n\}$ definida en (12.3).

2. Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $L^1 \cap L^2$ que converge a f en L^2 , $\{\|f_n\|_2\}$ converge a $\|f\|_2$ (este resultado aparece en el problema 10.5). Para cada f_n tenemos (12.1) y podemos pasar al límite.

3. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ sucesiones de $L^1 \cap L^2$ que convergen a f y g , respectivamente; (12.4) es válida para f_n y g_n por la propiedad analítica 5 de la proposición 11.2 y para obtener (12.4) hay que pasar al límite (como en el problema 10.6). Para el primer miembro, por ejemplo, ponemos

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f_n(x) \hat{g}_n(x) - f(x) \hat{g}(x)) dx \right| \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| |\hat{g}_n(x)| dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{g}_n(x) - \hat{g}(x)| |f(x)| dx, \end{aligned}$$

y comprobamos que cada sumando tiende a cero.

Si ponemos $\hat{g} = \bar{h}$, resulta $g = \bar{\bar{h}}$ y de (12.4) sale (12.5). \square

La igualdad de Plancherel sale también de (12.5) haciendo $g = f$. Recíprocamente, (12.5) sale de la igualdad de Plancherel utilizando la igualdad puntual:

$$4f\bar{g} = |f + g|^2 - |f - g|^2 + i|f + ig|^2 - i|f - ig|^2.$$

12.3. Teorema de inversión y otras propiedades

El teorema 11.9 vale si una de las dos funciones está en L^2 .

Teorema 12.4. Sea $f \in L^2$ y $g \in L^1$. Entonces, $f * g$ está en L^2 y se tiene $(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$.

Demostración. Se deja como ejercicio (problema 12.3) la prueba de las dos siguientes afirmaciones:

(i) La definición (11.9) produce una función de L^2 si $f \in L^2$ y $g \in L^1$.

(ii) Si f_n es una sucesión de funciones de $L^1 \cap L^2$ que converge a f en L^2 , la sucesión $f_n * g$ de funciones de $L^1 \cap L^2$ converge a $f * g$ en L^2 .

Para completar la prueba del teorema observamos que si f_n es una sucesión como en (ii), $\hat{f}_n \hat{g}$ converge a $\hat{f} \hat{g}$ en L^2 ; en efecto, \hat{f}_n converge a \hat{f} en L^2 y \hat{g} es acotada. Por el teorema 11.9 se tiene $(f_n * g)^\wedge = \hat{f}_n \hat{g}$ y el resultado se deduce pasando al límite. \square

Teorema 12.5. Si f está en L^2 , se tiene $(\hat{f})^\wedge(x) = f(-x)$ como funciones de L^2 y, por tanto, en casi todo punto. En particular,

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi,$$

como límite en L^2 . Además, la transformada de Fourier define una isometría en L^2 .

Demostración. Si F_N es el núcleo de Fejér de (11.10) (tomamos sólo valores enteros de N). Para $f \in L^2$, se tiene $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N * f = f$ en L^2 lo que se puede probar directamente o aplicando la transformada de Fourier y la igualdad de Plancherel. Además, $\hat{F}_N \hat{f}$ es una sucesión de L^2 que converge a \hat{f} en L^2 luego $(\hat{f})^\wedge$ coincide con el límite en L^2 de $(F_N * f)^\wedge$.

Si $f \in L^1 \cap L^2$, tanto $F_N * f$ como su transformada de Fourier están en L^1 y por el teorema 11.4 se tiene $(F_N * f)^\wedge(x) = (F_N * f)(-x)$. Pasando al límite cuando N tiende a infinito se tiene el resultado para estas funciones.

Si sólo suponemos que f está en L^2 , se tiene $F_N * f \in L^1 \cap L^2$ y para cada una de estas funciones vale el resultado. Se vuelve a aplicar un paso al límite.

Este resultado junto con el del teorema 12.3 implica que la transformada de Fourier es una biyección de L^2 en sí mismo y por la igualdad de Plancherel, es una isometría. \square

Las propiedades analíticas que relacionan transformación de Fourier y derivación también se extienden al espacio L^2 .

Proposición 12.6. 1. Si f y f' están en L^2 , $\xi \hat{f}(\xi)$ está en L^2 y $(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$ en casi todo punto.

2. Si f y xf están en L^2 , \hat{f} es continua, existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h}$$

en L^2 y coincide con $(-2\pi i x f)^\wedge(\xi)$. Si $(\hat{f})'$ existe en el sentido habitual, coincide en casi todo punto con ese límite.

Demostración. 1. Sea φ una función de clase \mathcal{C}^1 tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo x , $\varphi(x) = 1$ si $|x| < 1$ y $\varphi(x) = 0$ si $|x| > 2$. Sea $\varphi_n(x) = \varphi(x/n)$. Con el teorema de convergencia dominada se puede ver que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n f = f \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi_n f)' = f'$$

en L^2 . Entonces, $(f')^\wedge = \lim_{n \rightarrow \infty} ((\varphi_n f)')^\wedge$ en L^2 . Por otra parte, $\varphi_n f$ está en L^1 y podemos aplicar la propiedad 2 de la proposición 11.2 para deducir que $((\varphi_n f)')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi (f \varphi_n)^\wedge(\xi)$. Como $(f \varphi_n)^\wedge(\xi)$ converge a $\hat{f}(\xi)$ en casi todo punto (porque converge en L^2), se tiene el resultado.

2. f está en L^1 porque

$$2|f(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} + (1+x^2)|f(x)|^2$$

y la integral del lado derecho es finita en las hipótesis del enunciado. Por ser f integrable, \hat{f} es continua.

Como se tiene

$$\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = \left(f(x) \frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} \right)^\wedge(\xi),$$

existe el límite en L^2 del miembro de la izquierda si existe el de su antitransformada (la expresión entre paréntesis de la derecha). Pero

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) \left(\frac{e^{-2\pi i x h} - 1}{h} + 2\pi i x \right) \right|^2 dx = 0$$

aplicando el teorema de la convergencia dominada (el módulo de la expresión entre paréntesis se acota $4\pi|x|$). Entonces,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h} = (-2\pi i x f)^\wedge(\xi) \quad \text{en } L^2.$$

□

En realidad, en la primera parte de la proposición no se necesita que la derivada exista puntualmente, bastaría con la existencia de una función g tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} - g \right\|_2 = 0.$$

Llamando $f' = g$ (g coincide con f' en casi todo punto si f es derivable), se tiene el resultado enunciado. La prueba es como la de la segunda parte.

12.4. La transformada de Fourier en L^p , $1 < p < 2$

Una función de L^p , con $1 < p < 2$, se puede descomponer en suma de dos funciones, una de L^1 y otra de L^2 . Una manera de hacerlo es la siguiente: si $f \in L^p$, el conjunto $E = \{x : |f(x)| > 1\}$ tiene medida finita porque en otro caso la integral de $|f|^p$ sería infinita; definimos

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E; \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

Está claro que $f = f_1 + f_2$; además,

$$\int_{\mathbf{R}} |f_1(x)| dx = \int_E |f(x)| dx \leq \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} (m(E))^{1/q}$$

utilizando la desigualdad de Hölder (teorema B.18) con $1/p + 1/q = 1$, por lo que $f_1 \in L^1$, y

$$\int_{\mathbf{R}} |f_2(x)|^2 dx = \int_{\mathbf{R} \setminus E} |f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbf{R} \setminus E} |f(x)|^p dx,$$

ya que $|f(x)| \leq 1$ en $\mathbf{R} \setminus E$, por lo que $f_2 \in L^2$. Podemos entonces definir $\hat{f} = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$, que será suma de una función de L^∞ y de otra de L^2 . La

descomposición de f en suma de funciones de L^1 y L^2 no es única, luego hay que comprobar que cualquier otra produce la misma transformada de Fourier. Pero si $f = g_1 + g_2$ con $g_1 \in L^1$ y $g_2 \in L^2$, $f_1 - g_1 = g_2 - f_2 \in L^1 \cap L^2$ y $\hat{g}_1 + \hat{g}_2 = \hat{f}_1 + \hat{f}_2$ porque en $L^1 \cap L^2$ las dos definiciones coinciden.

Aunque la definición sólo nos dice que la transformada está en $L^\infty + L^2$, en realidad existe un resultado más preciso, que no probaremos aquí, y dice que \hat{f} está en L^q donde, como antes, $1/p + 1/q = 1$; incluso se tiene la *desigualdad de Hausdorff-Young*:

$$\|\hat{f}\|_q \leq \|f\|_p.$$

El proceso anterior muestra que podemos definir la transformada para funciones en $L^1 + L^2$, pero no permite hacerlo en L^p si $p > 2$. De hecho, no a toda función en esos espacios L^p se le puede asignar una transformada de Fourier que sea una función y la definición trabaja con objetos más generales que las funciones (distribuciones).

12.5. Otra definición de la transformada de Fourier en L^2

Norbert Wiener observó que $L^2(\mathbf{R})$ tiene una base ortonormal formada por funciones propias de la transformada de Fourier y esto le permitió dar una definición de la transformada de Fourier en L^2 . Salvo por la normalización, la base viene dada por las *funciones de Hermite* que se definen como

$$h_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\pi x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-2\pi x^2}), \quad n \geq 0.$$

Es fácil ver que $h_n(x) = e^{-\pi x^2} p_n(x)$ donde p_n es un polinomio de grado n (*polinomio de Hermite*) y, por tanto, es una función integrable. Su transformada de Fourier está bien definida.

Las funciones de Hermite satisfacen las siguientes relaciones de recurrencia:

$$(12.6) \quad h'_n - 2\pi x h_n = -(n+1)h_{n+1},$$

$$(12.7) \quad h'_n + 2\pi x h_n = 4\pi h_{n-1},$$

tomando en la segunda $h_{-1} \equiv 0$. De aquí se deduce la relación de recurrencia de tres términos de las funciones de Hermite:

$$(n+1)h_{n+1} - 4\pi x h_n + 4\pi h_{n-1} = 0.$$

Para probar que la transformada de Fourier de h_n es un múltiplo de h_n , aplicamos la transformada de Fourier a (12.6) y encontramos una relación de recurrencia para \hat{h}_n . Comprobamos a continuación que esta relación es la misma que la de $(-i)^n h_n$ y como $\hat{h}_0 = h_0$ deducimos que $\hat{h}_n = (-i)^n h_n$.

Para probar la ortogonalidad ($\langle h_n, h_m \rangle = 0$ si $n \neq m$) observamos a partir de las relaciones de recurrencia que

$$(12.8) \quad h''_n = [4\pi^2 x^2 - 2\pi(2n+1)]h_n;$$

el resto se hace integrando por partes.

La sucesión $\{e_n = h_n/\|h_n\|_2\}$ será un sistema ortonormal en $L^2(\mathbf{R})$. Para probar que es completo, según el teorema 10.4, basta ver que si $\langle f, e_n \rangle = 0$ para todo n , f es idénticamente nula. Los detalles se explican en el problema 12.5.

Una vez probado esto, $f \in L^2(\mathbf{R})$ se escribe como $f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle e_n$ y

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, e_n \rangle|^2.$$

Definimos

$$(12.9) \quad \hat{f} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f, e_n \rangle (-i)^n e_n,$$

que por el teorema de Riesz-Fischer está en $L^2(\mathbf{R})$ y claramente cumple $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Es inmediato comprobar que la fórmula de inversión es

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \hat{f}, e_n \rangle i^n e_n.$$

12.6. Problemas

12.1 A partir del ejemplo 11.1 y del núcleo de Fejér deducir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 dx = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^3 dx = \frac{3\pi}{8}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^4 dx = \frac{\pi}{3}.$$

12.2 Utilizar (12.5) para evaluar las integrales

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} \quad \text{y} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi ax}{x(x^2 + b^2)} dx.$$

12.3 Probar las afirmaciones (i) y (ii) de la prueba del teorema 12.4.

12.4 La función $x/(x^2 + a^2)$ está en L^2 pero no es integrable. Determinar justificadamente su transformada de Fourier a partir de la de $1/(x^2 + a^2)$.

12.5 Completar los detalles de la definición de Wiener de la transformada de Fourier en L^2 .

1. Probar (12.6) y (12.7).
2. Escribir la relación de recurrencia para \hat{h}_n y comprobar que es la misma que la de $(-i)^n h_n$.
3. Probar (12.8) y deducir la ortogonalidad de los h_n .
4. Probar que si $\langle f, h_n \rangle = 0$ para todo n , f es idénticamente nula. Probar primero que la hipótesis equivale a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-\pi x^2} x^n dx = 0$$

para todo n . Después escribir la transformada de Fourier de $g(x) = f(x)e^{-\pi x^2}$ como serie de potencias

$$\hat{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\pi x^2} x^n dx \frac{(2\pi i \xi)^k}{k!}$$

(justificar la convergencia) y concluir que tiene que ser nula.

- 12.6** Utilizando la fórmula de recurrencia (12.6) y la relación (12.8) demostrar que

$$(n+1)\|h_{n+1}\|_2^2 = 4\pi\|h_n\|_2^2.$$

Deducir que $\|h_n\|_2^2 = (4\pi)^n (\sqrt{2}n!)^{-1}$.

- 12.7** Deducir de la definición (12.9) y de las propiedades de las funciones de Hermite que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1/2) |(f, e_n)|^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2$$

y que sólo hay igualdad en múltiplos constantes de $e^{-\pi x^2}$.

- 12.8** La definición de la transformada de Fourier en L^2 también se puede basar en las funciones de la clase de Schwartz, introducida en el problema 11.14 del capítulo anterior. Como tanto la función como su transformada están en L^1 , la igualdad

$$\int f \hat{g} = \int \hat{f} g$$

se deduce de la proposición 11.2 y haciendo $\hat{g} = \overline{\hat{f}}$ se deduce (12.1) para las funciones de $\mathcal{S}(\mathbf{R})$. Como este espacio es denso en L^2 (contiene a las funciones continuas de soporte compacto, que son densas), se termina por un argumento de densidad como el que hemos utilizado para $L^1 \cap L^2$.

Aplicaciones de la transformada de Fourier

13.1. Principio de incertidumbre

Teorema 13.1. *Si f, xf y f' están en L^2 se tiene*

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4.$$

La igualdad sólo se produce si $f(x) = e^{kx^2}$, $k < 0$.

Demostración. Por la proposición 12.6 tenemos $(f')^\wedge(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi)$; con la igualdad de Plancherel y la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos escribir

$$\begin{aligned} & \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |f(\xi)|^2 d\xi \right) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|^2 dx \right) \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{4\pi^2} \left| \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right|^2. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\frac{d}{dx}|f(x)|^2 = 2\operatorname{Re}[f(x)\overline{f'(x)}]$, podemos acotar inferiormente el último término por

$$\frac{1}{16\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx}|f(x)|^2 dx \right|^2,$$

de donde el resultado se deduce por integración por partes.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz es una igualdad si xf y f' son proporcionales (problema 10.2), es decir, si $f' = 2kxf$, de donde se deduce $f(x) = e^{kx^2}$. La integrabilidad requiere que $k < 0$ y por ser las funciones reales, el cambio del módulo del complejo por la parte real mantiene la igualdad. \square

Si f cumple las hipótesis del teorema, también las cumple la función $g(x) = f(x+x_0)e^{2\pi ix\xi_0}$; escribiendo la desigualdad para g y trasladando la variable llegamos a

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi-\xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4.$$

13.2. Fórmula de sumación de Poisson

Teorema 13.2. *Sea f continua e integrable. Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ converge uniformemente para $0 \leq x \leq 1$ y $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)$ converge absolutamente, entonces*

$$(13.1) \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k+x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{2\pi i k x}$$

y, en particular,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k),$$

que se llama fórmula de sumación de Poisson.

Demostración. La función $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ es periódica de periodo 1 y continua; su serie de Fourier se escribe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+k) e^{-2\pi i n t} dt \right] e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}.$$

Como $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}(n)|$ es convergente por hipótesis, la serie de Fourier converge uniformemente a la función y se tiene (13.1).

El caso particular corresponde a $x = 0$. \square

13.3. Ecuación del calor

Buscamos una solución del problema de la difusión del calor unidimensional dado por

$$(13.2) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

donde suponemos que f es integrable.

Haciendo la transformada de Fourier de u en la variable x definimos

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2\pi i x \xi} dx.$$

Utilizando las propiedades de la transformada de Fourier y la ecuación (13.2) deducimos que \hat{u} debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + 4\pi^2 \xi^2 \hat{u} = 0, & -\infty < \xi < \infty, t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi), & -\infty < \xi < \infty. \end{cases}$$

Para cada ξ fijo tenemos una ecuación diferencial ordinaria en t que se resuelve fácilmente; obtenemos

$$\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{-4\pi^2 \xi^2 t}.$$

Ahora para cada t fijo podemos invertir la transformada de Fourier, ya que es el producto de dos funciones de L^1 . Aplicando el resultado del ejemplo 11.3 deducimos que

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-(x-y)^2/4t} dy = W_t * f(x),$$

donde W_t es el núcleo de Gauss (11.12).

Que esta función cumple la ecuación para $t > 0$ se comprueba fácilmente ya que la gaussiana permite derivar bajo el signo integral. Si interpretamos la condición inicial de (13.2) como $\lim_{t \rightarrow 0} u(x, t)$, podemos referirnos a los teoremas 11.11 y 11.12.

13.4. Ecuación de Schrödinger

Consideramos ahora el problema de valores iniciales para la ecuación de Schrödinger,

$$(13.3) \quad \begin{cases} i \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Esta ecuación se asemeja a la anterior y procedemos del mismo modo: hacemos la transformada de Fourier de u en la variable x , escribimos la ecuación

para \hat{u} y resolvemos la ecuación diferencial ordinaria en t para cada ξ fijo. Obtenemos

$$(13.4) \quad \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi) e^{4\pi^2 i \xi^2 t}.$$

Aquí empiezan las diferencias con el caso de la ecuación del calor: el último factor está acotado, pero no es integrable. Con los resultados de que disponemos no podemos invertir la transformada de Fourier si sólo decimos que f es integrable. Sin embargo, si f está en L^2 , sabemos que también \hat{f} está en L^2 (teorema de Plancherel) y al multiplicarla por una función acotada, seguirá estando en L^2 . Entonces podemos decir que para cada t , $u(x, t)$ es la función de L^2 cuya transformada de Fourier viene dada por (13.4).

Para poder dar sentido a las derivadas de la ecuación (13.3) necesitaríamos hipótesis suplementarias sobre f (o un concepto más amplio de derivada). La condición inicial se cumple al menos como

$$(13.5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) = f(x) \quad \text{en } L^2.$$

13.5. Probabilidad: función característica y teorema central del límite

Una *densidad de probabilidad* en \mathbf{R} es una función no negativa f con integral 1 sobre todo \mathbf{R} . Asociada a una densidad hay una medida de probabilidad que asigna a cada conjunto medible E de \mathbf{R} la probabilidad $P(E) = \int_E f$.

La *media* m y la *varianza* σ^2 de la probabilidad dada por la densidad f se definen como

$$m = \int_{\mathbf{R}} x f(x) dx \quad \text{y} \quad \sigma^2 = \int_{\mathbf{R}} (x - m)^2 f(x) dx \quad \left(= \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x) dx - m^2 \right),$$

si estas integrales son finitas. La raíz cuadrada de la varianza, σ , se llama *desviación típica*.

Una variable aleatoria es una función medible con valores reales definida en un espacio de probabilidad. Su densidad de probabilidad es f si la probabilidad de que X esté en el intervalo (a, b) es la probabilidad de (a, b) definida por f , lo que escribimos

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx.$$

Un concepto introducido por Paul Lévy es el de *función característica*¹. Se llama función característica de una densidad de probabilidad a su transformada de Fourier (que puede llevar como definición alguna de las variantes que hemos mencionado en la observación de la sección 11.1).

¹No hay que confundir esta función característica con la de un conjunto, que vale 1 en los puntos del conjunto y 0 fuera de él. Para evitar confusiones los probabilistas acostumbran a llamar función indicatriz a esta última.

Dos variables aleatorias X e Y con densidades f y g se dice que son independientes si

$$P(a < X < b, c < Y < d) = \int_a^b f(x) dx \int_c^d g(y) dy.$$

El producto $f(x)g(y)$ define una densidad de probabilidad en \mathbf{R}^2 ; permite definir combinaciones de las variables aleatorias independientes X e Y , por ejemplo,

$$\begin{aligned} P(a < X + Y < b) &= \int \int_{a < x+y < b} f(x)g(y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \int_{a-x}^{b-x} g(y) dy dx = \int_a^b (f * g)(t) dt, \end{aligned}$$

es decir, la variable aleatoria $X+Y$ tiene como densidad $f * g$. Este resultado se puede generalizar a más variables aleatorias. También se puede obtener a partir de la función característica; la de la variable $X + Y$ es

$$\int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i(x+y)\xi} f(x)g(y) dx dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi),$$

que coincide con $(f * g)^\wedge$ por el teorema 11.9. La función de densidad de $X + Y$ se obtiene invirtiendo la función característica, luego es $f * g$.

Teorema 13.3 (Teorema central del límite). *Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes, todas con la misma densidad f , de media 0 y desviación típica 1. Sea $S_n = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$. Entonces,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a < S_n < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Demostración. La densidad de $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ es $f * \dots * f$ (n veces) luego

$$P(a < S_n < b) = \int_{a\sqrt{n}}^{b\sqrt{n}} (f * \dots * f)(x) dx = \int_a^b \sqrt{n}(f * \dots * f)(\sqrt{n}x) dx$$

y tenemos que probar que

$$(13.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sqrt{n}(f * \dots * f)(\sqrt{n}x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx.$$

Sea φ una función integrable; entonces,

$$(13.7) \quad \int_{\mathbf{R}} \sqrt{n}(f * \dots * f)(\sqrt{n}x)\hat{\varphi}(x) dx = \int_{\mathbf{R}} \left(\hat{f} \left(\frac{\xi}{\sqrt{n}} \right) \right)^n \varphi(\xi) d\xi.$$

utilizando el teorema 11.9 y las propiedades 5 de las proposiciones 11.2 y 11.1.

De las hipótesis sobre la densidad tenemos

$$\begin{aligned}\hat{f}(0) &= \int_{\mathbf{R}} f(x) dx = 1, & \hat{f}'(0) &= -2\pi i \int_{\mathbf{R}} x f(x) dx = 0, \\ \hat{f}''(0) &= -4\pi^2 \int_{\mathbf{R}} x^2 f(x) dx = -4\pi^2,\end{aligned}$$

por lo que usando el desarrollo de Taylor se tiene

$$\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{2\pi^2\xi^2}{n} + r(\xi, n)$$

donde $\lim_{n \rightarrow \infty} nr(\xi, n) = 0$. Deducimos que puntualmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\hat{f}\left(\frac{\xi}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = e^{-2\pi^2\xi^2}$$

y como $|\hat{f}(\xi)| \leq 1$ y φ es integrable, el teorema de la convergencia dominada permite pasar al límite en el segundo miembro de (13.7); volviendo a utilizar la propiedad 5 de la proposición 11.2 tenemos

$$(13.8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}} \sqrt{n}(f * \dots * f)(\sqrt{n}x)\hat{\varphi}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-x^2/2}\hat{\varphi}(x) dx.$$

No podemos poner en esta igualdad $\hat{\varphi}(x) = \chi_{(a,b)}(x)$ porque entonces φ no es integrable, así que para llegar a (13.6) utilizamos un argumento de aproximación; para $\epsilon > 0$, elegimos $\hat{\varphi}_\epsilon$ de modo que valga 1 si $a \leq x \leq b$, 0 si $x < a - \epsilon$ o $x > b + \epsilon$, y sea lineal en $(a - \epsilon, a)$ y $(b, b + \epsilon)$. Escribiendo (13.8) para φ_ϵ y pasando al límite cuando ϵ tiende a cero, se obtiene (13.6). (Queda por comprobar que φ_ϵ es integrable; véase el problema 13.9.) \square

13.6. Funciones de banda limitada y teorema de muestreo

Una función cuya transformada de Fourier se anula fuera de un intervalo se dice que es de *banda limitada*. Las funciones de banda limitada son importantes en teoría de señales porque las frecuencias de éstas se mueven en una banda de valores.

Si sabemos que \hat{f} tiene su soporte en el conjunto $|\xi| \leq A/2$ y que, por ejemplo, está en L^2 , sus coeficientes de Fourier como función definida en el intervalo $[-A/2, A/2]$ la determinan completamente. Para la forma compleja de la serie estos coeficientes son

$$\frac{1}{A} \int_{-A/2}^{A/2} \hat{f}(\xi) e^{-2\pi i k \xi / A} d\xi = \frac{1}{A} f\left(-\frac{k}{A}\right).$$

Pero si \hat{f} está completamente determinada, también lo está f , por lo que concluimos que los valores de f en los puntos k/A son suficientes para definir f completamente. La distancia $1/A$ a la que hay que tomar dos muestras

consecutivas de f se llama *intervalo de Nyquist* y su inverso A es la *razón de Nyquist*. Obviamente, hay que tomar más muestras cuanto menos concentrada esté la banda de frecuencias de la señal (cuanto mayor sea A). El resultado que sigue da una fórmula para reconstruir f a partir de sus muestras.

Teorema 13.4 (Teorema de Shannon). *Sea f una función de $L^2(\mathbf{R})$ tal que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq A/2$. Entonces,*

$$(13.9) \quad f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{\sin \pi(Ax - k)}{\pi(Ax - k)},$$

como igualdad en L^2 , y

$$(13.10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| f\left(\frac{k}{A}\right) \right|^2.$$

Si además la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k/A)|$ es convergente, la igualdad (13.9) es puntual.

Demostración. Utilizamos la fórmula de inversión de la transformada de Fourier y reemplazamos \hat{f} por su serie de Fourier en forma compleja para obtener formalmente

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-A/2}^{A/2} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-A/2}^{A/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{A} f\left(-\frac{k}{A}\right) e^{2\pi i k \xi / A} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{A} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \int_{-A/2}^{A/2} e^{2\pi i (x - k/A) \xi} d\xi \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{A}\right) \frac{\sin \pi(Ax - k)}{\pi(Ax - k)}. \end{aligned}$$

Si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k/A)|$ es convergente, la serie de Fourier de \hat{f} converge uniformemente, el intercambio de serie e integral está justificado y todas las igualdades son puntuales (el segundo miembro de (13.9) también converge uniformemente).

En general, se aplica primero el teorema de Plancherel y se comprueba que la convergencia en L^2 de (13.9) equivale a la convergencia en L^2 de la serie de Fourier de \hat{f} en el intervalo $[-A/2, A/2]$, que conocemos por la sección 7.5.

Para obtener (13.10) aplicamos primero la igualdad de Plancherel a f y su transformada de Fourier, y después a \hat{f} y su serie de Fourier en $[-A/2, A/2]$. \square

Si \hat{f} se anula fuera de $[-A/2, A/2]$, también se anula fuera de $[-B/2, B/2]$ siempre que $B > A$, así que la fórmula es válida sustituyendo A por B . Esto no es sorprendente porque equivale a tomar más muestras de la función de las estrictamente necesarias, ya que ahora la distancia entre dos consecutivas será $1/B$. Se podría esperar que tomando más muestras hubiese una mejor información de la función y algo así sucede, se puede hacer aparecer en el segundo miembro de (13.9) una función mejor que $\sin x/x$.

Teorema 13.5. *Sea f una función de $L^2(\mathbf{R})$ tal que $\hat{f}(\xi) = 0$ si $|\xi| \geq A/2$. Sea $B > A$ y φ una función que se anula fuera de $[-B/2, B/2]$ y vale 1 en $[-A/2, A/2]$; denotemos por Φ la función cuya transformada de Fourier es φ . Entonces*

$$f(x) = \frac{1}{B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{B}\right) \Phi\left(x - \frac{k}{B}\right),$$

como igualdad en L^2 , y como igualdad puntual si la serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f(k/B)|$ es convergente.

Demostración. Como en el teorema anterior, calculamos los coeficientes de Fourier de la función definida en $[-B/2, B/2]$ que vale $\hat{f}(\xi)$ en $[-A/2, A/2]$ y 0 en el resto; por la definición de φ , el producto $\varphi \hat{f}$ coincide con \hat{f} en $[-B/2, B/2]$ y se puede escribir

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(\xi) \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(\xi) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{B} f\left(-\frac{k}{B}\right) e^{2\pi i k \xi / B} e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{B}\right) \int_{-B/2}^{B/2} \varphi(\xi) e^{2\pi i (x - k/B) \xi} d\xi \\ &= \frac{1}{B} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{B}\right) \Phi\left(x - \frac{k}{B}\right). \end{aligned}$$

□

Cuando es la propia función y no su transformada de Fourier la que está soportada en un intervalo, se dice que es de *tiempo limitado*. Una función no puede ser simultáneamente de tiempo limitado y de banda limitada (es una consecuencia del teorema 11.3); por tanto, si $\|f\|_2 = 1$, los números α y β definidos por

$$\alpha^2 = \int_{-A}^A |f(x)|^2 dx \quad \text{y} \quad \beta^2 = \int_{-B}^B |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi$$

son menores o iguales que 1, pero no pueden ser ambos iguales a 1. Hay un principio de indeterminación que indica que cuanto más cerca de 1 esté uno de ellos, más

limitado está el rango del otro; una versión analítica es

$$(13.11) \quad \arccos \alpha + \arccos \beta \geq \arccos \sqrt{\gamma},$$

donde γ es el supremo de α^2 sobre las funciones de banda limitada (es decir, todas las funciones que hacen $\beta = 1$) de norma 1 en L^2 ; además, se excluyen en (13.11) los pares $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ y $(1, 0)$.

13.7. Funciones continuas sin derivada

En la sección 4.3 hemos visto que existen funciones continuas que no son derivables en ningún punto. En esta sección probamos el teorema de Hardy para la función propuesta por Weierstrass.

Teorema 13.6. *La función*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi a^n x}{b^n},$$

es continua en todos los puntos y no es derivable en ninguno si $b > 1$ y $a \geq b$.

En la prueba vamos a necesitar un lema.

Lema 13.7. *Sea $a > 1$, φ una función C^∞ soportada en $[1/a, a]$ y tal que $\varphi(1) = 1$, y sea Φ la función tal que $\hat{\Phi} = \varphi$. Sea f una función continua y acotada de \mathbf{R} en \mathbf{R} ; para un punto $x_0 \in \mathbf{R}$ definimos los números*

$$c_k = \int_{\mathbf{R}} f(x) \Phi(a^k(x - x_0)) dx.$$

Si f es derivable en x_0 , entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} a^{2k} c_k = 0$.

Demostración. Por ser f derivable en x_0 tenemos

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x),$$

donde el resto $r(x)$ satisface $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^{-1} r(x) = 0$. Tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \int_{\mathbf{R}} (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)) \Phi(a^k(x - x_0)) dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} r(x) \Phi(a^k(x - x_0)) dx, \end{aligned}$$

porque las integrales de Φ y de $x\Phi$ en \mathbf{R} son cero ya que φ se anula en el origen.

Pongamos

$$A = \int_{\mathbf{R}} |x| |\Phi(x)| dx \quad \text{y} \quad B = \sup_{x \in \mathbf{R}} |x^3 \Phi(x)|.$$

Dado ϵ elegimos $\delta > 0$ de modo que $|r(x)| \leq \epsilon|x - x_0|/2A$ si $|x - x_0| < \delta$; entonces,

$$\left| \int_{|x-x_0|<\delta} r(x)\Phi(a^k(x-x_0)) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{2a^{2k}}.$$

Para la otra parte de la integral tenemos

$$a^{2k} \left| \int_{|x-x_0|\geq\delta} r(x)\Phi(a^k(x-x_0)) dx \right| \leq \frac{1}{a^k} \int_{|x-x_0|\geq\delta} \frac{B|r(x)|}{|x-x_0|^3} dx$$

y la última integral es finita porque $|r(x)| \leq C(1 + |x - x_0|)$ para cierta constante C ; por tanto, podemos hacer que el primer miembro sea menor que $\epsilon/2$ a partir de un cierto valor de k . \square

Demostración del teorema 13.6. Sea

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2\pi a^n x}{b^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{2\pi i a^n x} + e^{-2\pi i a^n x}}{b^n}.$$

Utilizando la notación del lema y la convergencia uniforme de la serie tenemos

$$\begin{aligned} c_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n} \int_{\mathbf{R}} (e^{2\pi i a^n x} + e^{-2\pi i a^n x}) \Phi(a^k(x-x_0)) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n a^k} \int_{\mathbf{R}} \Phi(x) [e^{2\pi i a^n(x_0+a^{-k}x)} + e^{-2\pi i a^n(x_0+a^{-k}x)}] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^n a^k} [e^{2\pi i a^n x_0} \varphi(-a^{n-k}) + e^{-2\pi i a^n x_0} \varphi(a^{n-k})]. \end{aligned}$$

Por las hipótesis sobre φ la última suma tiene un único término no nulo, el que corresponde a $n = k$ (y en éste, sólo el segundo sumando); como $\varphi(1) = 1$, queda

$$a^{2k} c_k = \frac{a^k}{b^k} e^{-2\pi i a^k x_0},$$

que no tiende a cero cuando k tiende a infinito si $a \geq b$. Según el lema, f no es derivable en x_0 . \square

13.8. Problemas

13.1 Comprobar que la ecuación del calor conserva la cantidad total de calor, es decir, la integral de $u(x, t)$ en $-\infty < x < \infty$ es constante en t .

13.2 Dos cuestiones referidas a la ecuación de Schrödinger.

1. Comprobar que se cumple (13.5).
2. Comprobar que $\int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)|^2 dx$ no depende de t .

13.3 Obtener para la ecuación de ondas unidimensional,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \\ u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases}$$

la solución de d'Alembert y Euler:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds.$$

Sugerencia: Seguir un procedimiento análogo al utilizado en las secciones 13.3 y 13.4 para llegar a

$$\hat{u}(\xi, t) = \cos 2\pi c t \xi \hat{f}(\xi) + \frac{\sin 2\pi c t \xi}{2\pi c \xi} \hat{g}(\xi).$$

13.4 Resolver la ecuación del potencial en el semiplano superior:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases}$$

Sugerencia: Queda una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para $\hat{u}(\xi, t)$ y sólo una condición. La otra es de integrabilidad; hay que llegar a $\hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi)e^{2\pi|\xi|t}$.

13.5 Dos ejercicios con la fórmula de sumación de Poisson.

1. Deducir la identidad de Jacobi $\vartheta(t) = t^{-1/2}\vartheta(1/t)$ para la función (llamada *función theta de Jacobi*)

$$\vartheta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 t}, \quad t > 0.$$

2. Obtener

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + t^2} = \frac{\pi}{t} \frac{1 + e^{-2\pi t}}{1 - e^{-2\pi t}},$$

a partir de la función $\exp(-2\pi|x|t)$. Escribir la igualdad que resulta de hacer tender t a 0 después de restar el término correspondiente a $n = 0$.

13.6 Sea X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con la misma densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Probar que la variable aleatoria $X = (X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ tiene la misma densidad de probabilidad que cada una de ellas.

- 13.7** Sea X_1, \dots, X_n variables aleatorias independientes con la misma densidad de probabilidad

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Probar que la variable aleatoria $X = (X_1 + \dots + X_n)/n$ tiene la misma densidad de probabilidad que cada una de ellas. (Obsérvese que a estas variables aleatorias no se les puede aplicar el teorema central del límite porque su varianza es infinita.)

- 13.8** Sea X e Y variables aleatorias independientes con densidades de probabilidad f y g ; ¿cuál es la densidad de probabilidad de $X - Y$?, ¿cuál es la función característica de esta densidad?

Si X e Y tienen la misma densidad de probabilidad $f(x) = \alpha^{-1}e^{-x/\alpha}$ si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x \leq 0$, calcular la densidad de probabilidad de $X - Y$.

- 13.9** Sean c y d números positivos y $c < d$; se define

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq c, \\ 0 & \text{si } |x| \geq d, \\ \frac{d-|x|}{d-c} & \text{si } c < |x| < d. \end{cases}$$

Calcular su transformada de Fourier.

- (a) De aquí se puede deducir que la función φ_ϵ que definimos a través de su transformada de Fourier para terminar la prueba del teorema central del límite 13.3 es integrable.
- (b) Eligiendo $c = A/2$ y $d = B/2$ tenemos una posible función Φ para el teorema 13.5. Comprobar que su decrecimiento en infinito es más rápido que el de la función seno cardinal del teorema de Shannon.
- 13.10** Sea $L_A^2(\mathbf{R})$ el subespacio de $L^2(\mathbf{R})$ formado por las funciones cuya transformada de Fourier se anula fuera de $[-A/2, A/2]$. Utilizar el teorema de Shannon para probar que la familia de funciones

$$\sqrt{A} \frac{\sin \pi(Ax - k)}{\pi(Ax - k)},$$

con $k \in \mathbf{Z}$, es una base hilbertiana de $L_A^2(\mathbf{R})$.

Transformadas de Fourier discreta y rápida

Además de las aplicaciones de tipo matemático de las series y transformadas de Fourier que hemos encontrado en capítulos previos, su uso en el mundo real es destacable. Una (corta) lista de campos en los que aparecen es la siguiente:

- Óptica: difracción de Fraunhofer, teoría de interferencias, imagen con lentes.
- Estructura cristalina: difracción de rayos X, espectroscopía.
- Electromagnetismo: modelos de radiación de antenas, análisis de redes y de guía de ondas.
- Comunicaciones: análisis de sistemas, filtros digitales de alta velocidad, detección de señales, compresión.
- Mecánica aplicada: análisis de vibraciones.

Pero en las aplicaciones nos encontramos con el problema de que las funciones de que se dispone no vienen dadas por expresiones analíticas sino por colecciones de datos (evaluaciones en determinados puntos) y, por otra parte, las integrales que se necesitan también deben calcularse por procedimientos de aproximación. Todo ello ha hecho que en la práctica los objetos matemáticos con los que hemos trabajado en los capítulos anteriores vengán sustituidos por la llamada *transformada discreta de Fourier* en la que las operaciones involucradas son sumas y multiplicaciones.

Otro problema con el que hay que enfrentarse al usar transformadas de Fourier en la tecnología es el de calcularlas en tiempo real. De poco sirve un instrumento cuyo coste (en tiempo o en dinero) supera las necesidades del usuario. En este contexto se entiende el interés de lo que llamamos *transformada rápida de Fourier*, que no es un objeto matemático nuevo o una variante de los anteriores sino un algoritmo de cálculo que permite reducir considerablemente el número de operaciones necesario para calcular una transformada de Fourier discreta.

14.1. Transformada de Fourier discreta

Las funciones que vamos a considerar estarán definidas en el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ y tomarán valores complejos. Esto significa que tendremos un elemento de \mathbf{C}^N , pero para que quede claro el aspecto funcional lo escribiremos como $f[k]$. Es conveniente considerar que el argumento de la función está definido módulo N , es decir, que en realidad tenemos una sucesión $\{f[k]\}$ definida para $k \in \mathbf{Z}$, periódica de periodo N : $f[k+N] = f[k]$ para todo k .

La transformada de Fourier discreta asocia a cada f otra “función” \hat{f} definida por

$$(14.1) \quad \hat{f}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} f[j] e^{-2\pi i j k / N}.$$

Como claramente $\hat{f}[k+N] = \hat{f}[k]$, nuevamente podemos considerar que tenemos un elemento de \mathbf{C}^N o una sucesión periódica de periodo N , indistintamente.

Propiedades. 1. La transformada de Fourier discreta es lineal.

2. *Traslación en tiempo:* Si $g[k] = f[k-n]$, es $\hat{g}[k] = \hat{f}[k] e^{-2\pi i k n / N}$.

3. *Traslación en frecuencia:* Si $g[k] = f[k] e^{2\pi i k n / N}$, es $\hat{g}[k] = \hat{f}[k-n]$.

4. *Modulación:* Si $g[k] = f[k] \cos 2\pi k n / N$, $\hat{g}[k] = \frac{1}{2}(\hat{f}[k-n] + \hat{f}[k+n])$.

Sea $\omega = e^{-2\pi i / N}$; ω y $\bar{\omega} = e^{2\pi i / N} = \omega^{-1}$ son raíces N -simas de la unidad al igual que sus potencias, es decir, $\omega^{jN} = 1$ para todo j entero. Además,

$$(14.2) \quad 1 + \omega^j + \omega^{2j} + \dots + \omega^{(N-1)j} = \begin{cases} N & \text{si } j \text{ es múltiplo de } N, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

La comprobación de este resultado se reduce a sumar una progresión geométrica. Con esta notación la transformación (14.1) se escribe

$$\hat{f}[k] = \sum_{j=0}^{N-1} f[j] \omega^{jk}.$$

Como transformación lineal de \mathbf{C}^N en \mathbf{C}^N , la transformada discreta de Fourier admite una representación matricial. Si \mathbf{f} y $\hat{\mathbf{f}}$ son las matrices columna cuyas entradas son los valores $f[k]$ y $\hat{f}[k]$, respectivamente, (14.1) se puede escribir matricialmente como

$$\hat{\mathbf{f}} = A(\omega) \mathbf{f},$$

donde la matriz $A(\omega)$ viene dada por

$$(14.3) \quad A(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{N-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \dots & \omega^{2(N-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-1} & \omega^{2(N-1)} & \dots & \omega^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}.$$

(Algunos exponentes se pueden reducir utilizando que $\omega^{jN} = 1$, así, $\omega^{2(N-1)} = \omega^{N-2}$ y $\omega^{(N-1)(N-1)} = \omega$.)

14.1.1. Transformación inversa.

Si $A(\bar{\omega})$ es la matriz (14.3) con $\bar{\omega}$ en vez de ω se tiene

$$A(\omega) A(\bar{\omega}) = A(\bar{\omega}) A(\omega) = NI_N,$$

donde I_N es la matriz identidad. (Se utiliza (14.2) y que $\omega\bar{\omega} = 1$.) Entonces

$$\mathbf{f} = \frac{1}{N} A(\bar{\omega}) \hat{\mathbf{f}},$$

o sea,

$$(14.4) \quad f[k] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] \omega^{-jk} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] e^{2\pi i j k / N},$$

que es la transformada inversa.

Aunque la teoría de la transformada de Fourier se construye para funciones definidas en todo \mathbf{R} , en las aplicaciones la función estará definida en un intervalo que podemos suponer $[0, T]$. Si pretendemos “representar” la función f definida en $[0, T]$ por un polinomio trigonométrico como

$$p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i j x / T},$$

al tener N coeficientes podemos hacerlo coincidir con la función en N puntos (se suele decir que p es el polinomio que *interpola* a f en esos puntos). Si los elegimos de forma que sean kT/N con $k = 0, 1, \dots, N-1$, los coeficientes c_j se determinan como solución del sistema lineal

$$f\left(\frac{kT}{N}\right) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j e^{2\pi i j k / N}.$$

La fórmula (14.4) de la transformada inversa muestra que los coeficientes c_j son precisamente $\hat{f}[j]/N$ si $f[k] = f(kT/N)$. Esto ofrece una interpretación de la transformada discreta de Fourier.

14.1.2. Igualdad de Plancherel.

Teorema 14.1. *Con la notación anterior se tiene*

$$\sum_{k=0}^{N-1} f[k] \overline{g[k]} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] \overline{\hat{g}[k]},$$

y

$$\sum_{k=0}^{N-1} |f[k]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\hat{f}[k]|^2.$$

Demostración. Usamos la notación matricial. El primer miembro de la primera igualdad es el producto matricial $\mathbf{f}^t \overline{\mathbf{g}}$ donde el superíndice t indica la traspuesta de la matriz. Recordando que la traspuesta de un producto es el producto de traspuestas en el orden inverso y que $A(\omega)$ es simétrica (coincide con su traspuesta) tenemos

$$\mathbf{f}^t \overline{\mathbf{g}} = \frac{1}{N^2} \hat{\mathbf{f}}^t A(\overline{\omega}) A(\omega) \overline{\mathbf{g}} = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{f}}^t \overline{\mathbf{g}}.$$

La segunda igualdad corresponde a hacer $\mathbf{g} = \mathbf{f}$ en la primera. \square

14.1.3. Convolución.

La convolución de dos funciones f y g definidas en $\{0, 1, \dots, N-1\}$ se define como

$$(f * g)[k] = \sum_{l=0}^{N-1} f[l] g[k-l],$$

donde tenemos en cuenta la extensión periódica de g ya que $k-l$ puede ser negativo (no consiste más que en usar $g[N+k-l]$ en esos casos). La transformada discreta de Fourier es

$$(f * g)^\wedge[k] = \hat{f}[k] \hat{g}[k].$$

La prueba es la siguiente:

$$(f * g)^\wedge[k] = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{l=0}^{N-1} f[l] g[j-l] \right) \omega^{jk} = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] g[j-l] \omega^{lk} \omega^{(j-l)k}.$$

14.1.4. Fórmula de sumación de Poisson.

La igualdad equivalente a la fórmula de sumación de Poisson es

$$\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] = Nf[0].$$

En efecto,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}[k] = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f[j] \omega^{jk},$$

y sumando primero en k sólo es distinta de 0 la correspondiente a $j = 0$ según (14.2).

14.2. Transformada de Fourier rápida

El cálculo de una transformada de Fourier discreta requiere N^2 multiplicaciones. Si N es par se puede organizar el cálculo de modo que se realicen dos transformadas de Fourier discretas en $C^{N/2}$ y una combinación adecuada de ellas. Esto reduce el número de multiplicaciones a aproximadamente la mitad. Se puede aplicar sucesivamente el mismo proceso y al final el número de multiplicaciones se reduce considerablemente. Ésta es la idea de la *transformada rápida de Fourier*.

Antes de situarnos en el caso general veremos el caso $N = 4$. Ahora $\omega = -i$ y la transformada es

$$\begin{pmatrix} \hat{f}[0] \\ \hat{f}[1] \\ \hat{f}[2] \\ \hat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[1] \\ f[2] \\ f[3] \end{pmatrix}.$$

Escribamos los elementos de la última matriz columna de modo que aparezcan primero los de variable par y después los de variable impar; esto exige cambiar el orden de las columnas de la matriz:

$$(14.5) \quad \begin{pmatrix} \hat{f}[0] \\ \hat{f}[1] \\ \hat{f}[2] \\ \hat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -i & i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ f[1] \\ f[3] \end{pmatrix}.$$

Si dividimos la matriz resultante en cuatro matrices 2×2 observamos que las dos de la izquierda son iguales y corresponden a la matriz de la transformada discreta de Fourier en C^2 y que las de la derecha resultan de multiplicar las filas de la izquierda por 1, $-i$, -1 e i , respectivamente, que son ω^0 , ω^1 , ω^2 y ω^3 .

Definimos los elementos f_p y f_i de \mathbf{C}^2 siguientes:

$$f_p[0] = f[0], f_p[1] = f[2], f_i[0] = f[1], f_i[1] = f[3].$$

A partir de (14.5) tenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{f}[0] \\ \hat{f}[1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p[0] \\ f_p[1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i[0] \\ f_i[1] \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} \hat{f}[2] \\ \hat{f}[3] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_p[0] \\ f_p[1] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & \\ & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i[0] \\ f_i[1] \end{pmatrix}.$$

Como vemos, la transformada de f se obtiene a partir de las de f_p y f_i . También podemos escribir el resultado del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{f}[0] &= \hat{f}_p[0] + \hat{f}_i[0] \\ \hat{f}[1] &= \hat{f}_p[1] - i\hat{f}_i[1] \\ \hat{f}[2] &= \hat{f}_p[0] - \hat{f}_i[0] \\ \hat{f}[3] &= \hat{f}_p[1] + i\hat{f}_i[1]. \end{aligned}$$

El caso general con N par funciona del mismo modo, sólo la notación resulta más complicada. Escribiendo el vector columna de f con los términos que corresponden a variable par delante de los de variable impar y reordenando adecuadamente las columnas de la matriz $A(\omega)$ de (14.3) tenemos

$$\begin{pmatrix} \hat{f}[0] \\ \hat{f}[1] \\ \dots \\ \hat{f}[\frac{N}{2}-1] \\ \hat{f}[\frac{N}{2}] \\ \hat{f}[\frac{N}{2}+1] \\ \dots \\ \hat{f}[N-1] \end{pmatrix} = R(\omega) \begin{pmatrix} f[0] \\ f[2] \\ \dots \\ f[N-2] \\ f[1] \\ f[3] \\ \dots \\ f[N-1] \end{pmatrix},$$

donde la matriz $R(\omega)$ viene dada por

$$R(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & \omega & \omega^3 & \dots & \omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & \omega^{\frac{N}{2}-1} & \omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \\ 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \omega^2 & \dots & \omega^{N-2} & -\omega & -\omega^3 & \dots & -\omega^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \omega^{N-2} & \dots & \omega^{(\frac{N}{2}-1)^2} & -\omega^{\frac{N}{2}-1} & -\omega^{3(\frac{N}{2}-1)} & \dots & -\omega^{(\frac{N}{2}-1)\frac{N}{2}} \end{pmatrix}.$$

Para escribir la matriz de esta forma hemos tenido en cuenta en su segunda mitad (filas $N/2$ a $N - 1$) que $\omega^N = 1$ en las $N/2$ primeras columnas y que $\omega^{N/2} = -1$ en las $N/2$ últimas. Como hemos hecho en el caso $N = 4$ dividimos la matriz en cuatro matrices $N/2 \times N/2$ y observamos que las dos de la izquierda son iguales y corresponden a la de la transformada de Fourier discreta en $\mathbf{C}^{N/2}$ y las de la derecha salen de multiplicar las filas de la izquierda por ω^k donde k es el orden de la fila.

Si definimos, como hacíamos en $N = 4$, dos elementos f_p y f_i en $\mathbf{C}^{N/2}$ por la regla

$$f_p[j] = f[2j], f_i[j] = f[2j + 1], \quad j = 0, 1, \dots, N/2 - 1,$$

deducimos que

$$\begin{aligned} \hat{f}[j] &= \hat{f}_p[j] + \omega^j \hat{f}_i[j], \\ \hat{f}\left[\frac{N}{2} + j\right] &= \hat{f}_p[j] - \omega^j \hat{f}_i[j], \end{aligned}$$

con $j = 0, 1, \dots, N/2 - 1$.

Si $N/2$ es par podemos aplicar el mismo argumento para reducir el cálculo de las transformadas en $\mathbf{C}^{N/2}$ a transformadas en $\mathbf{C}^{N/4}$ y así sucesivamente. El caso más favorable es aquél en que N es una potencia de 2, que acaba reduciendo el proceso a calcular $N/2$ transformadas en \mathbf{C}^2 y a combinarlas adecuadamente. Las sucesivas reordenaciones de los elementos según ocupen lugar par o impar acaba en una distribución final que se puede relacionar con la escritura en base 2 de la variable. Existen algoritmos que permiten ordenar rápidamente los elementos en la forma conveniente para el cálculo. El ahorro de operaciones que la transformada rápida de Fourier supone es considerable: se puede probar por inducción que las N^2 multiplicaciones de la situación inicial pasan a ser $2N \log_2 N$. (Aquí están incluidas las multiplicaciones por 1, si se eliminan del cómputo queda sólo la cuarta parte.)

El caso en que N no es una potencia de 2, se puede aplicar también un algoritmo de reducción, pero la ganancia no es tan considerable. Por ejemplo, si se factoriza $N = RC$, el cálculo se puede hacer con $N(R + C)$ multiplicaciones.

14.3. Nota histórica

J. W. Cooley y J. W. Tukey publicaron en 1965 el artículo *An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series* (Math. Comp. 19 (1965), 297-301) en el que propusieron el algoritmo de la transformada rápida de Fourier. Se dice que es el artículo más citado en la literatura científica y el éxito en su aplicación fue inmediato. Gilbert Strang, que lo ha calificado como “el algoritmo más importante de nuestro tiempo”, dice que “industrias enteras pasaron de lentas a rápidas con

esta única idea, que es matemática pura” (en *Wavelet transforms versus Fourier transforms*, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1993), 288-305).

En realidad, Cooley y Tukey redescubrieron un método que ya había sido utilizado antes pero no se había extendido. Su uso se remonta a Gauss quien evaluó sumas trigonométricas por este procedimiento en 1805 (antes incluso de la primera memoria de Fourier, que es de 1807) para determinar la órbita del recién descubierto asteroide Ceres; este trabajo de Gauss no fue publicado en vida de su autor. Las referencias a algoritmos de reducción de tiempo de cálculo en el siglo XX son más numerosas. En 1903 Runge desarrolló un algoritmo para un número de términos que era potencia de 2 (luego extendido a potencias de 3); apareció publicado en libros de Runge y König (1923) y Stumpff (1937). En 1942, Danielson y Lanczos publicaron un artículo en el *Journal of the Franklin Institute* en el que explicaban la reducción a la mitad de términos, como hemos mostrado aquí, y su uso en cristalografía; indicaban que con esas mejoras el tiempo de cálculo era “10 minutos para 8 coeficientes, 25 minutos para 16, 60 para 32 y 140 para 64”. Conocido como era en ciertos medios, algunos recibieron con sorpresa la popularización del algoritmo después del artículo de Cooley y Tukey.

El éxito del algoritmo de Cooley y Tukey –que no se limitaba a potencias de 2, único caso que hemos visto en el texto– pudo ser debido a su aparición en el momento oportuno: las aplicaciones potenciales eran mucho mayores y la velocidad de cálculo de los ordenadores aumentaba más aún su utilidad. De hecho, inmediatamente empezaron a aparecer variantes con intención de mejorar sus posibilidades y se han publicado numerosos libros sobre su uso en distintos contextos industriales y científicos. Con la rapidez de cálculo actual un ordenador normal calcula una transformada de 10^6 valores en unos pocos segundos; compárese con la estimación de Danielson y Lanczos: toda la ventaja actual está en la máquina.

Para un estudio histórico de la transformada de Fourier rápida se puede consultar el artículo *Gauss and the history of the fast Fourier transform* de M. T. Heideman, D. H. Johnson y C. S. Burrus (*Archive for History of Exact Sciences*, 34 (1985), 265-277); sobre los distintos algoritmos actuales véase *Fast Fourier Transform: A tutorial review and a state of the art* (*Signal Processing* 19 (1990), 259-299).

14.4. Problemas

- 14.1** Probar que si f es real (toma valores reales) su transformada de Fourier satisface $\widehat{f}[k] = \widehat{f}[-k]$. Probar que si además f es par, \widehat{f} es real y par. (Que f sea par se entiende sobre su extensión periódica, lo que equivale a $f[j] = f[N - j]$.)
- 14.2** Calcular la transformada discreta de Fourier de $(1, 1, 1, 1)$ y de $(1, -i, -1, i)$ como elementos de \mathbf{C}^4 .
- 14.3** Sea $N = 8$ y f definida por $f[0] = f[1] = 1$ y $f[j] = 0$ para $j = 2, 3, \dots, 7$. Calcular \widehat{f} .
- 14.4** Aplicar la transformada rápida de Fourier al caso $N = 8$ y mostrar cómo se obtiene a partir de cuatro transformadas discretas de Fourier en \mathbf{C}^2 .

-
- 14.5** Escribir los números del 0 al 7 en base 2 y ordenarlos como requiere el cálculo del problema anterior. Hacer lo mismo para $N = 16$.
- 14.6** Utilizar el resultado del problema 14.4 para calcular la transformada de Fourier discreta de la función $f[j] = 1$ si $j = 1, \dots, 5$, $f[6] = 6$, $f[7] = 7$.

Sucesiones y series numéricas y de funciones

A.1. Sucesiones numéricas

Una sucesión de números reales es una aplicación de \mathbf{N} (conjunto de los números naturales) en \mathbf{R} . En notación simbólica el subíndice suele representar el elemento de \mathbf{N} cuya imagen se da; por ejemplo, escribimos $\{a_n\}$ para representar una sucesión.

Las sucesiones y series de este apéndice serán reales. Los cambios necesarios para trabajar con valores complejos son pequeños y casi siempre basta con interpretar el valor absoluto como módulo del complejo; hay que eliminar los resultados en los que interviene el orden de los reales, por ejemplo, no tiene sentido hablar de límites $+\infty$ o $-\infty$, o de límite superior e inferior.

A.1.1. Sucesiones convergentes.

El concepto principal es el de *sucesión convergente*. Una sucesión se dice convergente hacia ℓ si dado cualquier entorno \mathcal{E} de ℓ todos los términos de la sucesión a partir de un cierto lugar (que depende de \mathcal{E}) están en \mathcal{E} . El número ℓ se llama *límite* de la sucesión. En la práctica es suficiente considerar entornos simétricos y escribir la definición de convergencia diciendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ si para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 de modo que cuando $n \geq N_0$ se tiene $|a_n - \ell| < \epsilon$.

Entre las sucesiones que no convergen (*divergentes*) conviene destacar las que *tienden a infinito*. Son aquellas para las que dado cualquier número

positivo M , todos los términos de la sucesión, a partir de un cierto lugar son mayores que M en valor absoluto, o sea, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ si para todo $M > 0$ existe N_0 de modo que cuando $n \geq N_0$ se tiene $|a_n| > M$. Si además es $a_n > M$ para todo $n \geq N_0$ se puede precisar que el límite es $+\infty$ y cuando es $a_n < -M$ para todo $n \geq N_0$, el límite es $-\infty$.

Propiedades. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell_1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \ell_2$ (finitos), se tienen:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \ell_1 \cdot \ell_2$;
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = \ell_1/\ell_2$ si $\ell_2 \neq 0$.

Para la suma, si uno de los límites es infinito y el otro finito, el de la suma también es infinito. Para el producto, si uno es infinito y el otro no es cero (sea finito o infinito), el límite es infinito. En el cociente, si el numerador tiende a infinito y el denominador tiene límite finito o si el numerador tiene límite no nulo y el denominador tiende a cero, el límite es infinito. Son casos indeterminados (no se puede predecir el límite) los que simbólicamente se escriben en la forma

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Queda como ejercicio probar a partir de las definiciones de los límites los resultados mencionados y comprobar que las indeterminaciones lo son, mostrando que en estos casos las mismas condiciones de partida pueden dar lugar a resultados distintos.

Dos resultados interesantes sobre límites de sucesiones son los siguientes.

Proposición A.1. 1. *Una sucesión creciente y acotada tiene límite finito; si no está acotada, tiende a $+\infty$. Lo mismo ocurre si es decreciente, salvo que el límite es $-\infty$ en el segundo caso.*

- 2. *Si $a_n \leq b_n \leq c_n$ y $\lim a_n = \lim c_n$ (finito), la sucesión b_n es convergente hacia el mismo límite que las otras dos.*

A.1.2. Sucesiones de Cauchy.

Una sucesión a_n es de *Cauchy* si para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 de modo que cuando $n, m \geq N_0$ se cumple $|a_n - a_m| < \epsilon$. Una propiedad clave es la siguiente:

Teorema A.2. *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.*

Este resultado permite probar la convergencia de sucesiones sin conocer el límite. La proposición A.11 o el teorema A.18 pueden servir para convencerse de su utilidad.

A.1.3. Funciones y sucesiones.

La posibilidad de utilizar las propiedades de una función a la hora de calcular el límite de una sucesión encuentran su mejor reflejo en el siguiente teorema:

Teorema A.3. *Si f es una función continua en ℓ y $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ se tiene*

$$(A.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\ell).$$

Hay un resultado recíproco: si para todas las sucesiones que convergen a ℓ se cumple (A.1), f es continua en ℓ .

La continuidad de la función logaritmo es una de las más utilizadas para aplicar la propiedad anterior. Para calcular el límite de una sucesión a veces se calcula el límite de su logaritmo para obtener el logaritmo del límite.

A.1.4. Límites superior e inferior.

Se llama *límite superior* de una sucesión acotada superiormente al supremo de los límites de sus subsucesiones convergentes. Si no existe ninguna, el límite superior se define como $-\infty$ y si la sucesión no está acotada superiormente, como $+\infty$.

Para una sucesión acotada superiormente, $\{a_n\}$, el límite superior coincide con el obtenido del modo siguiente: se construye $b_n = \sup\{a_k : k \geq n\}$ que es una sucesión decreciente y se calcula $\lim b_n$. Podemos dar también una caracterización práctica: ℓ_1 (finito) es el límite superior de $\{a_n\}$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ hay infinitos términos de la sucesión mayores que $\ell_1 - \epsilon$ y no más de una cantidad finita de términos mayores que $\ell_1 + \epsilon$; el límite superior es $+\infty$ si para cualquier $M > 0$ hay (infinitos) términos de la sucesión mayores que M .

Hay una definición y caracterizaciones simétricas para el caso del *límite inferior*. Además, está claro que si una sucesión es convergente su límite coincide con los límites superior e inferior.

A.2. Series numéricas

Se suele decir que una serie es una “suma infinita”. Dada una sucesión $\{a_n\}$, el objetivo es definir de algún modo razonable la suma de todos los términos de la sucesión. La serie se escribe $\sum a_n$ y la manera que se escoge para definir la “suma” es la siguiente: se construye la sucesión de *sumas parciales* $\{s_n\}$ de modo que

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

y se estudia la convergencia de esta sucesión; si es convergente, se dice que la serie es convergente y que la *suma* de la serie $\sum a_n$ es $\lim s_n$, y si es divergente, se dice que la serie es divergente y no se le asocia una suma¹.

Dada una serie, el primer objetivo es decidir si es convergente o no; pero sólo en unos pocos casos podremos precisar cuál es el valor de la suma de una serie convergente (algunas sumas precisas, que se obtienen a partir de las series de Fourier, aparecen en el texto).

De la definición y las propiedades de las sucesiones se deduce fácilmente el siguiente resultado.

Proposición A.4. 1. $\sum a_n$ es convergente si y sólo si s_n es de Cauchy, es decir, si cumple que para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que cuando $n \geq N_0$ y $m \geq 0$ se tiene

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| < \epsilon.$$

2. Si la serie $\sum a_n$ es convergente, $\lim a_n = 0$.

La segunda propiedad se deduce de la primera haciendo $m = 0$. No hay que olvidar que sólo es una condición necesaria y, por tanto, es útil para decidir a veces que una serie es divergente, no para probar que es convergente.

A.2.1. Series de términos positivos.

Sea la serie $\sum a_n$. Si $a_n \geq 0$ para todo n , las sumas parciales forman una sucesión creciente y su convergencia o divergencia depende simplemente de que esta sucesión esté acotada o no (proposición A.1). Basándonos en esta observación se deduce en forma sencilla el *criterio de comparación*.

Teorema A.5. Sea $0 \leq a_n \leq b_n$.

1. Si $\sum b_n$ es convergente, $\sum a_n$ es convergente.
2. Si $\sum a_n$ es divergente, $\sum b_n$ es divergente.

Damos a continuación un par de resultados basados en el criterio de comparación.

Corolario A.6. Sea $a_n, b_n \geq 0$ y $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lambda \in (0, \infty)$. Entonces, las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ se comportan del mismo modo.

Corolario A.7 (Criterio de condensación de Cauchy). Si $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de términos positivos, las series $\sum a_n$ y $\sum 2^k a_{2^k}$ se comportan del mismo modo.

¹No se le asocia una suma por este procedimiento. Existen otros métodos, llamados de sumabilidad, que permiten asignar sumas a ciertas series divergentes y son importantes en la teoría de las series de Fourier (capítulo 7).

Para probar este resultado hay que sustituir los términos desde a_{2^k+1} hasta $a_{2^{k+1}-1}$ por a_{2^k} o por $a_{2^{k+1}}$, según los queramos hacer más grandes o más pequeños.

A.2.2. Criterios clásicos de convergencia.

Para poder utilizar los criterios de comparación necesitamos conocer algunas series convergentes y divergentes. La serie básica es la *serie geométrica*, $\sum r^n$. Las sumas parciales de esta serie ($s_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n$) se pueden escribir con una fórmula explícita (suma de una progresión geométrica). A partir de esta fórmula se deduce el bien conocido resultado:

$$\sum r^n \text{ es convergente si y sólo si } |r| < 1.$$

El criterio de condensación de Cauchy permite deducir de este resultado que

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ es convergente si y sólo si } \alpha > 1.$$

Existen unos criterios de convergencia cuya prueba se basa en la comparación con la serie geométrica. Los principales son el del cociente y el de la raíz.

Teorema A.8 (Criterio del cociente o de d'Alembert). *Sea $a_n \geq 0$ y supongamos que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$. Si $\ell < 1$, la serie es convergente, y si $\ell > 1$, la serie es divergente.*

Si el límite no existe, para la convergencia basta con que el límite superior sea menor que 1, y para la divergencia, que el límite inferior sea mayor que 1.

Teorema A.9 (Criterio de la raíz o de Cauchy). *Sea $a_n \geq 0$ y supongamos que $\limsup \sqrt[n]{a_n} = \ell$. Si $\ell < 1$, la serie es convergente, y si $\ell > 1$, la serie es divergente.*

Hay series convergentes y series divergentes para las que el límite obtenido es 1 (ejemplos respectivos son $\sum 1/n^2$ y $\sum 1/n$), de modo que ninguno de los criterios predice el comportamiento de la serie cuando $\ell = 1$. La serie armónica generalizada $\sum 1/n^\alpha$ también se suele utilizar para comparar.

Proposición A.10. *Sea $a_n \geq 0$.*

1. *Si $\lim n^\alpha a_n \in [0, \infty)$ y $\alpha > 1$, la serie $\sum a_n$ es convergente.*
2. *Si $\lim n^\alpha a_n \in (0, \infty]$ y $\alpha \leq 1$, la serie $\sum a_n$ es divergente.*

A.2.3. Series de términos positivos y negativos.

Una primera propiedad básica para el estudio de series en general es la siguiente.

Proposición A.11. *Si la serie $\sum |a_n|$ es convergente, la serie $\sum a_n$ también lo es.*

La prueba consiste simplemente en ver que si $\sum |a_n|$ satisface la condición de Cauchy, también la satisface $\sum a_n$. Si la serie $\sum |a_n|$ converge, se suele decir que la serie $\sum a_n$ es *absolutamente convergente*. Con este concepto, el enunciado anterior se puede leer así: *Toda serie absolutamente convergente es convergente*. El recíproco no es cierto, como muestra la serie $\sum (-1)^n/n$ (sabemos que $\sum 1/n$ diverge, para la convergencia de $\sum (-1)^n/n$ se puede utilizar el criterio de Leibniz que sigue). Cuando una serie es convergente pero no absolutamente convergente, se dice que es *condicionalmente convergente*.

Este resultado sugiere que para empezar a estudiar una serie de términos positivos y negativos se empiece estudiando la serie formada por sus valores absolutos y, en caso de que esta converja, también convergerá la serie original.

Aunque cuando la serie de valores absolutos diverge, el resultado anterior no da información sobre la original, a veces se tiene información indirecta. Por ejemplo, si hemos visto que el término general de la de valores absolutos no tiende a cero, tampoco tenderá a cero el término general de la serie dada y ésta tiene que ser divergente.

A.2.4. Series alternadas.

Se llama serie alternada a la que tiene sus términos alternativamente positivos y negativos, es decir, $\sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$. En este caso, existe una condición suficiente de convergencia que suele ser útil.

Teorema A.12 (Criterio de Leibniz). *Si la sucesión $\{a_n\}$ es de términos positivos, decreciente y tiende a cero, la serie alternada $\sum (-1)^n a_n$ es convergente.*

Se observa que las sucesiones de sumas parciales de lugares par e impar satisfacen $s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n+1} \leq \dots \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_4 \leq s_2$, de lo que se deduce que ambas tienen límite; estos límites coinciden porque la diferencia $s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n}$ tiende a cero. Además, si la suma es s , se tiene $s_{2n+1} \leq s \leq s_{2n}$, lo que permite estimar el error como $|s_n - s| \leq a_{n+1}$.

Con este criterio se prueba inmediatamente que la serie $\sum (-1)^n/n$ es convergente.

A.2.5. Reordenamientos de series.

Terminamos con un resultado sobre el reordenamiento de series. Teniendo en cuenta que en el caso de sumas finitas la propiedad conmutativa asegura que el orden de los sumandos no altera el valor de la suma, es lógico preguntarse si en el caso de series convergentes se puede reordenar la sucesión y conservar la convergencia de la serie y el valor de la suma. La respuesta la dio Riemann y no es independiente de la serie.

Teorema A.13. 1. Si una serie es absolutamente convergente, cualquier reordenamiento de la serie también es convergente y la suma es siempre la misma.

2. Si una serie es condicionalmente convergente, se puede reordenar de modo que se obtenga bien sea una serie convergente cuya suma es cualquier valor escogido de antemano, bien sea una serie divergente.

A.3. Sucesiones de funciones

A.3.1. Convergencia puntual.

Supongamos que para cada número natural n tenemos una función f_n definida en un dominio D (subconjunto de \mathbf{R}). Si fijamos un valor $x \in D$, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es una sucesión numérica, que puede ser convergente o no. Podemos definir una función cuyo dominio es el conjunto de puntos de D en los que estas sucesiones numéricas convergen poniendo

$$(A.2) \quad f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Se dice que la función f es el *límite puntual* de la sucesión de funciones $\{f_n\}$. Según la definición de convergencia de una sucesión numérica, (A.2) equivale a que para todo $\epsilon > 0$ exista N_0 tal que si $n \geq N_0$, entonces $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Conviene resaltar que el N_0 que aparece en esta formulación depende de ϵ y x .

A.3.2. Convergencia uniforme.

Para que la función límite herede ciertas propiedades de las funciones de la sucesión, a menudo es necesario algo más que la convergencia puntual. Es la propiedad que se suele llamar *convergencia uniforme*.

Definición. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un dominio D si para todo $\epsilon > 0$ existe N_0 tal que si $n \geq N_0$, entonces

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ para todo } x \in D.$$

La diferencia entre esta definición y la definición puntual previa es que ahora el valor de N_0 depende de ϵ , pero *no* depende de x , sirve el mismo para todo $x \in D$.

Al ser $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$, se tiene

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

y entonces tenemos la siguiente caracterización.

Proposición A.14. $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D si y sólo si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Esta formulación tiene la ventaja de que el límite se calcula para una sucesión numérica. Por supuesto, se necesita conocer la función f , pero ésta no puede ser otra que el límite puntual de la sucesión $\{f_n\}$.

La convergencia uniforme tiene una interpretación geométrica que conviene conocer. Basta observar que la condición $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para todo $x \in D$ equivale a decir que $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$ para todo $x \in D$, o sea, la gráfica de la función f_n no puede estar a distancia superior a ϵ de la gráfica de f en cada punto. Como esto debe ocurrir siempre que $n \geq N_0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en D si a partir de un lugar (N_0) en la sucesión las gráficas de las funciones están contenidas en un “tubo” de anchura ϵ a cada lado de la gráfica de f .

Las figuras representan las sucesiones de funciones $f_n(x) = \min\{x^n, 1\}$ en $[0, 2]$ y $g_n(x) = nx/(1 + n^2x^2)$ en $[-1, 1]$. No hay convergencia uniforme en esos intervalos. Sin embargo, hay que entender que la convergencia uniforme depende del conjunto sobre el que se mire y así, hay convergencia uniforme en algunos dominios (por ejemplo, $[0, 1/2]$ para f_n y $[1/2, 1]$ para g_n).

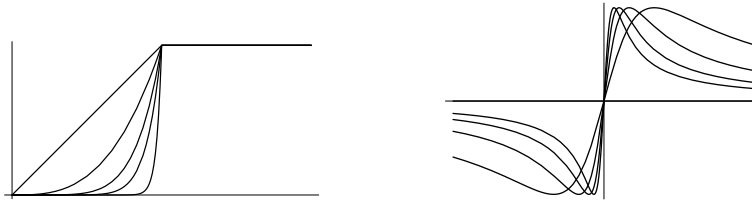


Figura A.1. Gráficas de $\min\{x^n, 1\}$ en $[0, 2]$ y $nx/(1 + n^2x^2)$ en $[-1, 1]$ para varios valores de n .

Una observación útil es que la condición de Cauchy uniforme equivale a la convergencia uniforme, es decir, f_n converge uniformemente a f en D si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe N_0 tal que si $n, m \geq N_0$, entonces

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon, \text{ para todo } x \in D.$$

A.3.3. Continuidad y convergencia uniforme.

Teorema A.15. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas que converge uniformemente en D a una función f . Entonces f es continua.*

Si escribimos

$$(A.3) \quad |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|,$$

por la convergencia uniforme podemos hacer $|f_n(x) - f(x)|$ tan pequeño como queramos para todo $x \in D$ eligiendo n suficientemente grande. Fijado este valor de n , la continuidad en a de la función f_n permite hacer pequeño $|f_n(x) - f_n(a)|$ cuando x está cerca de a .

Es un argumento sencillo, que conviene entender bien: para acotar (o para hacer pequeña) una expresión la hemos descompuesto en varios trozos y hemos razonado con cada uno de ellos por separado. Esto obliga a elegir los trozos en forma adecuada para poder aplicar las hipótesis.

La falta de convergencia uniforme puede hacer perder la continuidad de la función límite; el primer ejemplo de la figura anterior es una muestra. Pero conviene darse cuenta de que el teorema da sólo una condición suficiente para la continuidad de la función límite y que ésta puede ser continua sin que la convergencia sea uniforme. Así ocurre en el segundo ejemplo de la figura.

La noción de convergencia uniforme apareció a mediados del siglo XIX, después de que se observase la falta de continuidad del límite en algunos casos. Las primeras referencias publicadas se deben a Stokes (1847) y a Seidel (1848), quienes llegaron al concepto de forma independiente. Sin embargo, se suele atribuir a Weierstrass y sus discípulos la comprensión de la importancia del concepto y su desarrollo.

A.3.4. Integración y sucesiones.

¿Cuándo se puede decir que la integral del límite de una sucesión coincide con el límite de las integrales de las funciones de la sucesión? Es una pregunta clave, que ha tenido repercusiones en las teorías de la integración, y las ventajas de la integral de Lebesgue sobre la de Riemann son enormes en este punto, como se puede comprobar consultando el apéndice siguiente. A veces es útil tener una respuesta sencilla, como la que da el siguiente teorema (que vale para la integral de Riemann).

Teorema A.16. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones integrables en un intervalo $[a, b]$ que converge uniformemente a una función f en ese intervalo. Entonces f es integrable y*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Si supiésemos que f es integrable (lo que ocurre, por ejemplo, cuando las f_n son continuas, según el teorema anterior) la prueba sería tan sencilla como observar que

$$\left| \int_a^b f_n(t) dt - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b-a) \sup_{a \leq t \leq b} |f_n(t) - f(t)|.$$

El miembro de la derecha tiende a cero a causa de la convergencia uniforme. En general, la integrabilidad Riemann de f hay que deducirla de las hipótesis (trabajando con la integral de Lebesgue, la integrabilidad es inmediata).

A.3.5. Derivación y sucesiones.

Es más difícil dar resultados sobre derivación de sucesiones de funciones. El siguiente utiliza el teorema fundamental del Cálculo para basarse después en el teorema anterior.

Teorema A.17. *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definida en el intervalo $[a, b]$ y sea x_0 un punto de $[a, b]$ en el que la sucesión es convergente. Supongamos que las funciones f_n son derivables, que sus derivadas son continuas y que la sucesión de derivadas $\{f'_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$ a una función g . Entonces,*

- (i) *el límite de $\{f_n(x)\}$ existe en todo $x \in [a, b]$;*
- (ii) *la convergencia de la sucesión $\{f_n\}$ es uniforme, y*
- (iii) *la función límite es derivable y su derivada es g .*

Las condiciones en las que habitualmente se prueba el teorema fundamental del Cálculo en los cursos elementales se basan en la hipótesis de continuidad de la derivada. Ésa es la razón para haber incluido la hipótesis en el enunciado.

A.4. Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, la serie de funciones correspondiente $\sum f_n$ se estudia a partir de la sucesión de sumas parciales, igual que en el caso de las series numéricas. La convergencia uniforme de la serie se refiere a la convergencia uniforme de la sucesión de sumas parciales.

Los resultados de continuidad, integrabilidad y derivabilidad de la suma de una serie de funciones a partir de las hipótesis hechas sobre las funciones de la serie se enuncian igual que los teoremas anteriores para sucesiones ya que las sumas parciales son sumas finitas y conservan las propiedades.

Es interesante disponer de un criterio sencillo que permita demostrar la convergencia uniforme y en el caso de las series de funciones tenemos el siguiente, debido a Weierstrass.

Teorema A.18 (Criterio M de Weierstrass). *Sea $\sum f_n$ una serie de funciones y sea $\sum M_n$ una serie numérica convergente de términos positivos; si*

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{para todo } x \in D,$$

la serie de funciones converge absoluta y uniformemente en D .

La demostración no es más que una aplicación de la desigualdad

$$\left| \sum_{k=m}^n f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m}^n |f_k(x)| \leq \sum_{k=m}^n M_k.$$

En efecto, si la serie $\sum M_n$ converge, satisface la condición de Cauchy y la desigualdad implica que también la satisface la sucesión de funciones, uniformemente en $x \in D$, además. (La condición de Cauchy se refiere a las sumas parciales, por supuesto.)

A.4.1. Series de potencias.

Se llaman series de potencias las de la forma $\sum_n a_n(x - x_0)^n$. Para estudiar sus propiedades podemos suponer $x_0 = 0$; basta hacer una traslación para considerar el caso general.

La primera propiedad interesante se deduce del criterio de comparación: si la serie $\sum_n a_n x^n$ converge para un valor x_1 de la variable, converge para todos los valores x tales que $|x| < |x_1|$. Por tanto, si diverge para x_2 , diverge para todo x tal que $|x| > |x_2|$. Entonces, tiene que existir un R máximo tal que la serie converge si $|x| < R$ y diverge si $|x| > R$ (hay que admitir que R puede ser 0 y, en ese caso, la serie sólo convergerá en el origen, o puede ser ∞ y la serie convergerá para todo x). Este valor de R se llama *radio de convergencia* de la serie.

Para calcular el valor del radio de convergencia se puede aplicar el criterio de la raíz y resulta que

$$R^{-1} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

(A la hora de calcular conviene recordar que si $\lim |a_{n+1}/a_n|$ existe, coincide con $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ y, por tanto, con el límite superior.)

El criterio de Weierstrass asegura que si $r < R$, la serie converge uniformemente en $[-r, r]$, de modo que la suma es una función continua y se puede integrar término a término. Por otra parte, si derivamos término a término, la serie resultante también es de potencias y tiene el mismo radio de convergencia (¿por qué?). La suma de esta serie de derivadas será la derivada de la suma de la serie original.

Este último argumento se puede aplicar tantas veces como se quiera, de lo que se deduce que la suma de una serie de potencias es indefinidamente derivable. El valor de los coeficientes se puede obtener a partir de los valores de la función y sus derivadas, concretamente, si $\sum_n a_n x^n = f(x)$, entonces

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Se puede pensar en este proceso a la inversa: si f es una función indefinidamente derivable en x_0 , podemos construir la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

que se llama *serie de Taylor de f en x_0* . Parece razonable pensar que esta serie de potencias tendrá como suma en un entorno de x_0 a la función f de la que proviene, pero puede ocurrir que no sea así. Cuando la respuesta es positiva la función se dice que es *analítica*. La suma de una serie de potencias es analítica en el intervalo de convergencia.

A.4.2. Sucesiones y series como definición y aproximación de números y funciones.

Es interesante hacer una reflexión sobre el papel de las sucesiones y series como elementos de definición de números. Por ejemplo, constituyen la manera de entender los números irracionales. Éstos no se pueden dar de forma exacta y nuestro conocimiento práctico pasa por aproximarlos a través de sucesiones. Un ejemplo muy claro es el número e que se suele definir a menudo de una de las dos maneras siguientes:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad \text{o bien} \quad e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Se puede definir π como la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro o, como se hace modernamente, como el doble del primer cero positivo de una cierta función (la función coseno). Sin embargo, esas definiciones no permiten conocer el valor (aproximado) de π y, con este fin, se recurre a sucesiones y series. Así ha sido desde la Antigüedad: Arquímedes utilizaba una sucesión de perímetros de polígonos inscritos en la circunferencia; Wallis dio la fórmula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \dots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots},$$

cuya prueba se puede ver en el problema A.7 y se debe a Leibniz y Gregory la serie obtenida a partir de la del arco tangente

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Otro número con nombre propio es la *constante de Euler* cuya definición se hace también como límite de sucesión (problema A.5):

$$(A.4) \quad \gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right).$$

(Un problema abierto: todavía no se sabe si γ es un número racional o irracional.)

Tampoco conviene olvidar que el desarrollo decimal de un número real no es otra cosa que la suma de una serie de la forma

$$N + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

donde N es un número entero y a_n es un entero entre 0 y 9.

Además, ver los números como límites de sucesiones apropiadas es una manera de entender sus propiedades. Por ejemplo, la representación de e a través de la serie mencionada más arriba permite probar fácilmente que es irracional (problema A.8).

No olvidemos tampoco que en la *construcción* de los números reales a partir de los racionales a la manera de Cantor, cada número real no es otra cosa que una sucesión

de Cauchy de números racionales (más concretamente, una clase de sucesiones porque todas las que van a converger al mismo número tienen que ser equivalentes).

También se pueden definir funciones a partir de sucesiones y series. El tratar de escribir una función en forma de serie de potencias era ya común entre los analistas del siglo XVIII, que aceptaban la serie como expresión de la función. Así solemos hacer también ahora cuando definimos la función exponencial como

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

La serie converge para todo x real (e incluso complejo) y aplicando las propiedades de las series de potencias se deduce que la función es indefinidamente diferenciable y que su derivada es la misma función.

El ejemplo de Weierstrass de una función continua que no es diferenciable en ningún punto viene dado por una función definida a través de una serie trigonométrica (sección 4.3).

También hay métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que dan la solución como suma de una serie (sin que exista otra fórmula explícita), o bien como límite de una sucesión de problemas aproximados. Precisamente el papel de las series de Fourier en la resolución de ecuaciones en derivadas parciales es el de proporcionar la solución en forma de serie; en la mayoría de los casos no seremos capaces de dar su suma.

A.5. Problemas

- A.1** Probar la proposición A.1. ¿Qué se puede decir en el segundo caso si $\lim a_n < \lim c_n$? ¿Cómo se adapta al caso de límites infinitos?
- A.2** (i) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$ y f es continua en ℓ , probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\ell)$.
 (ii) Si f no es continua en ℓ , probar que existe una sucesión $\{a_n\}$ que converge a ℓ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) \neq f(\ell)$.
- A.3** Probar el corolario A.6. Cuando el límite es 0 ó ∞ el resultado sólo vale en parte, ¿cómo hay que modificarlo?
- A.4** Probar que si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ell$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} = \ell.$$

Este resultado es el que origina el método de sumabilidad de Fejér, del capítulo 7. Comprobar con la sucesión $a_n = (-1)^n$ que el límite de los promedios puede existir para sucesiones no convergentes.

- A.5** Probar que la sucesión que define la constante de Euler en (A.4) es convergente. Este resultado indica cuál es el tamaño de las sumas parciales de la serie armónica $\sum 1/n$. *Sugerencia:* usar la integral de $y = 1/x$ entre 1 y n y sus sumas superior e inferior.

A.6 Probar que si $\sum a_n$ es absolutamente convergente, las series $\sum a_n \sin nx$ y $\sum a_n \cos nx$ son convergentes para todo x y definen funciones continuas. Probar que son derivables si $\sum na_n$ es absolutamente convergente.

A.7 *Fórmula de Wallis.*

Se considera la integral $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$.

1. Probar que $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ y obtener a partir de esa fórmula:

$$I_{2n+1} = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1} \quad \text{y} \quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

2. De la desigualdad $\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$ para $0 \leq x \leq \pi/2$ se deduce la correspondiente a las integrales: $I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$.

3. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n-1}}$ a partir de esta desigualdad.

Se obtiene así la fórmula

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdots}$$

que se llama producto de Wallis y es la primera expresión conocida de π como límite de números racionales. Apareció en la *Arithmetica infinitorum* de John Wallis en 1656.

La primera manera en que Fourier dedujo los coeficientes de la serie que lleva su nombre no utilizaba la ortogonalidad como hacemos en el capítulo 1, sino un argumento con sistemas lineales infinitos que concluía en una expresión cuyo valor reconocía por la fórmula de Wallis.

A.8 La prueba de que e es irracional se puede hacer como sigue. Supongamos que $e = p/q$ donde p y q son enteros. Entonces,

$$0 = q!(e - \frac{p}{q}) = q! \left(\sum_{k=0}^q \frac{1}{k!} - \frac{p}{q} \right) + q! \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Como el primer sumando del término de la derecha es un número entero, también el segundo sumando debe serlo. Probar que

$$0 < \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + \cdots < 1$$

y llegar así a una contradicción.

A.9 Probar que si la sucesión $\{f_n\}$ tiende uniformemente a f en el intervalo (a, b) y las funciones f_n son continuas en $[a, b]$, las sucesiones $\{f_n(a)\}$ y $\{f_n(b)\}$ son convergentes (y, por tanto, $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, b]$).

A.10 Estudiar la convergencia puntual y uniforme de las sucesiones de funciones:

(a) $\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$ en \mathbf{R} ; (b) $x^2 e^{-nx}$ en $[0, \infty)$; (c) $n^2 x^2 e^{-nx}$ en $[0, \infty)$.

- A.11** La serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ converge uniformemente para $|x| \leq r$ si $r < 1$. Por tanto, se puede integrar término a término para obtener la serie de Taylor de $\log(1+x)$, que será válida en $|x| < 1$.

Se puede obtener la serie de Taylor de $\log(1+x)$ sin necesidad de conocer resultados de series de potencias ni de integrabilidad término a término. Para ello, utilizaremos la suma de n términos de una progresión geométrica,

$$1 - t + t^2 - t^3 \dots + (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{1+t},$$

e integraremos entre 0 y x todos los sumandos de esta igualdad. Para el último sumando, en lugar de buscar una integración explícita, escribiremos una cota minorando el denominador. Conseguiremos así la serie de $\log(1+x)$ y quedará probada su validez en $(-1, 1]$.

- A.12** Adaptar el proceso anterior para obtener la serie de $\arctan x$.

- A.13** Probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos \frac{x}{n}$$

converge uniformemente en $[-\pi/4, \pi/4]$.

- A.14** *Fórmula de sumación por partes de Abel.* Sean $\{a_k\}$ y $\{b_k\}$ dos sucesiones y $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ (ponemos $A_0 = 0$). Probar la fórmula

$$\sum_{k=m}^n a_k b_k = \sum_{k=m}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n b_n - A_{m-1} b_m.$$

Sugerencia: Escribir $a_k = A_k - A_{k-1}$ en el primer miembro y reorganizar la suma.

- A.15** Probar que si $\sum a_k = s$, la función $S(r) = \sum r^k a_k$ está bien definida para $0 \leq r \leq 1$ y se tiene $\lim_{r \rightarrow 1^-} S(r) = s$. Es decir, S es una función continua en $[0, 1]$. *Sugerencia:* Utilizar la fórmula del problema anterior.

Comprobar con la sucesión $a_k = (-1)^k$ que puede existir el límite de $S(r)$ sin que la serie $\sum a_k$ sea convergente.

En este *teorema de Abel* se basa el método de sumabilidad de Abel-Poisson del capítulo 7.

- A.16** Probar el siguiente *test de Dirichlet para la convergencia uniforme*. Sean $\{f_k\}$ y $\{g_k\}$ sucesiones de funciones en D tales que:

- (i) existe una constante M tal que $|\sum_{k=1}^n f_k(x)| \leq M$ para cada n y todo $x \in D$;
- (ii) $g_{k+1}(x) \leq g_k(x)$ para cada k y todo $x \in D$;
- (iii) g_k tiende a 0 uniformemente en D .

Entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k g_k$ converge uniformemente en D .

Sugerencia: Probar que se cumple la condición de Cauchy uniforme; utilizar para ello la fórmula de sumación de Abel.

A.17 Utilizar el test de Dirichlet del problema anterior para probar que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos kx$$

converge uniformemente en el intervalo $[\delta, \pi - \delta]$ para $0 < \delta < \pi/2$. Deducir que la suma de la serie es continua en $(0, \pi)$.

En el problema 5.3 se pide probar un resultado análogo para otra serie.

Integral de Riemann e integral de Lebesgue

B.1. Integral de Riemann

B.1.1. Definición y caracterización.

Sea f una función acotada en un intervalo $[a, b]$. Se considera la partición P del intervalo definida por los puntos $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$; llamando M_j y m_j al supremo y al ínfimo de f en $[t_{j-1}, t_j]$, respectivamente, construimos las sumas superior e inferior de f en $[a, b]$ con respecto a P del modo siguiente:

$$U(f, P) = \sum_{j=1}^n M_j(t_j - t_{j-1}), \quad L(f, P) = \sum_{j=1}^n m_j(t_j - t_{j-1}).$$

Se observa que $L(f, P) \leq U(f, P)$ y se comprueba que al añadir puntos a una partición la suma superior disminuye y la inferior aumenta. De aquí se deduce que $L(f, P_1) \leq U(f, P_2)$ para cualquier par de particiones P_1 y P_2 (pasando por la partición obtenida tomando todos los puntos de P_1 y P_2).

Existen entonces el supremo de $L(f, P)$ y el ínfimo de $U(f, P)$ cuando se hace recorrer a P el conjunto de todas las particiones del intervalo. A estos valores se les llama, respectivamente, *integral inferior* e *integral superior* de f en $[a, b]$ y se dice que f es integrable en $[a, b]$ cuando ambos valores coinciden. El valor común es la integral de f en el intervalo $[a, b]$. De esta construcción podemos deducir una caracterización.

Proposición B.1. *f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ existe una partición P tal que*

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

En lugar de las sumas superiores e inferiores, que fueron introducidas posteriormente, la versión de Riemann utilizaba sumas del tipo

$$\sum_{j=1}^n f(x_j)(t_j - t_{j-1}),$$

donde x_j es un punto cualquiera del intervalo $[t_{j-1}, t_j]$. Se suelen llamar *sumas de Riemann*. Decir que A es el límite de las sumas de Riemann significa que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si una partición satisface $\sup_j(t_j - t_{j-1}) < \delta$, cualquier suma de Riemann asociada a ella dista de A menos que ϵ . Una función es integrable en un intervalo si y sólo si el límite de las sumas de Riemann existe (y entonces coincide con el valor de la integral).

Riemann produjo una caracterización en términos de la oscilación de la función. Dada una partición P la oscilación de f en el intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ se define como $M_j - m_j$; llamando $S(P, \sigma)$ a la suma de longitudes de los intervalos de la partición P en los que la oscilación de f es mayor que σ el resultado de Riemann se enuncia como sigue.

Proposición B.2. *f es integrable en $[a, b]$ si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda partición P con $\max_{1 \leq j \leq n}(t_j - t_{j-1}) < \delta$ se cumple $S(P, \sigma) < \epsilon$.*

B.1.2. Funciones escalonadas.

Una función escalonada es una función del tipo $\sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{I_j}$ donde los α_j son números reales y los I_j intervalos disjuntos, en cantidad finita.

Las funciones escalonadas son integrables y su integral vale $\sum_j \alpha_j l(I_j)$, donde $l(I)$ es la longitud del intervalo I . Dada una partición P de $[a, b]$ se pueden definir funciones escalonadas que sobre los intervalos de la partición valgan M_j o m_j . Las funciones escalonadas resultantes tienen como integrales $U(f, P)$ y $L(f, P)$, respectivamente. Tenemos entonces el siguiente resultado:

Proposición B.3. *Si f es integrable, dado $\epsilon > 0$, existen funciones escalonadas g y h tales que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, para todo $x \in [a, b]$, y*

$$\int_a^b (f(x) - g(x)) dx < \epsilon, \int_a^b (h(x) - f(x)) dx < \epsilon.$$

Igualmente se puede construir una sucesión de funciones escalonadas cuyas integrales en $[a, b]$ convergen a la integral de f .

B.1.3. Algunas propiedades.

1. *Linealidad*: $\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$ (α y β reales).
2. Si $a \leq c \leq b$, entonces $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in (a, b)$, entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

4. *Teorema del valor medio*: si f es continua en (a, b) , existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

5. *Segundo teorema del valor medio*: Si f es continua y h monótona en $[a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b fh = h(b-) \int_c^b f + h(a+) \int_a^c f.$$

Las primeras propiedades son sencillas de probar. Sobre la última véanse el problema B.1 y el lema 2.6.

B.1.4. Integrales impropias.

La construcción de la integral de Riemann es para funciones acotadas en intervalos acotados. Cuando la función o el intervalo no están acotados se suele recurrir al concepto de integral impropia.

B.1.4.1. *Integral impropia de una función no acotada*. Si f es una función acotada e integrable en $[a + \delta, b]$, para todo $\delta > 0$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty$, se define la *integral (impropia) de f en $[a, b]$* como

$$\int_a^b f = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{a+\delta}^b f,$$

cuando este límite existe. (Comprobar que si la función es acotada y este límite existe, la función es integrable en $[a, b]$ y esta igualdad es cierta.)

Se define del mismo modo la integral cuando el límite infinito ocurre en b . Si $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ para $c \in (a, b)$, se aplican las definiciones en $[a, c]$ y $[c, b]$ y en caso de que ambas integrales impropias existan, la integral en $[a, b]$ es la suma de ambas. Cuando hay varios puntos en los que la función tiende a infinito, se divide el intervalo original en varios subintervalos de modo que en cada uno de ellos haya una sola singularidad y se exige la existencia de integral impropia en cada uno de ellos.

Existe una condición de tipo Cauchy que garantiza la existencia de integral impropia.

Proposición B.4. Sea f una función acotada en $[a + \delta, b]$ para todo $\delta > 0$. La integral impropia de f en $[a, b]$ existe si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que para todos $t, t' \in (a, a + \eta)$ se tiene

$$\left| \int_t^{t'} f(x) dx \right| < \epsilon.$$

Existen resultados de comparación semejantes a los de las series para el caso de funciones positivas: una mayorante con integral convergente es suficiente para la convergencia y una minorante con integral divergente implica divergencia.

Se dice que la integral impropia *converge absolutamente* si existe el límite al sustituir f por $|f|$. Además, a través de la condición de Cauchy se ve que la convergencia absoluta de la integral implica la convergencia. Por ser más fácil el estudio en el caso de funciones positivas, es conveniente comenzar estudiando la existencia de la integral tomando el valor absoluto de la función.

En el curso utilizamos a veces argumentos de aproximación. La proposición B.3 muestra que se puede aproximar tanto como se quiera (en el sentido de la integral) una función integrable por una función escalonada. De la definición de integral impropia se deduce el siguiente resultado.

Proposición B.5. Si la integral impropia de f en $[a, b]$ es convergente, dado $\epsilon > 0$ existe g integrable y acotada tal que

$$\left| \int_a^b (f - g) \right| < \epsilon.$$

Si la integral converge absolutamente, se puede elegir g de modo que

$$\int_a^b |f - g| < \epsilon.$$

Si, por ejemplo, estamos en la situación en que el único punto en que f tiende a infinito es a , podemos elegir $g(x) = f(x)$ en $[a + \delta, b]$ con δ adecuado y $g(x) = 0$ en el resto.

B.1.4.2. *Integral impropia en un intervalo no acotado.* Si f es una función acotada e integrable en $[a, R]$ para todo $R > a$ se define la *integral (impropia)* de f en $[a, \infty)$ como

$$\int_a^\infty f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f,$$

cuando este límite existe. Una definición semejante vale para la integral en $(-\infty, b]$. Para definir la integral en todo \mathbf{R} se divide en dos partes $(-\infty, a]$ y $[a, \infty)$, se pide que cada integral impropia exista y se suman.

Igual que en el caso anterior se puede dar una condición de tipo Cauchy, resultados de comparación para funciones positivas e introducir el concepto de integral absolutamente convergente. El resultado de aproximación por funciones integrables se puede enunciar así (lo hacemos en toda la recta):

Proposición B.6. *Si la integral impropia de f en \mathbf{R} es convergente, dado $\epsilon > 0$ existe $M > 0$ y una función g que se anula fuera de $[-M, M]$ y es integrable en ese intervalo, tal que*

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} (f - g) \right| < \epsilon.$$

Si la integral converge absolutamente, el valor absoluto se puede poner dentro de la integral.

B.1.4.3. Valor principal. Un concepto algo diferente es el de *valor principal* (de Cauchy) de una integral.

Cuando una función f es integrable en $(a, c - \delta)$ y $(c + \delta, b)$ para todo $\delta > 0$, el valor principal de la integral de f en (a, b) es

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right),$$

cuando este límite existe. La diferencia con la integral impropia es que allí pedíamos la existencia por separado de cada una de las integrales; el valor principal de la integral de $f(x) = 1/x$ en $(-1, 1)$ es 0, pero la integral impropia no existe.

Existe una formulación análoga en toda la recta: si f es integrable en $(-R, R)$ para todo $R > 0$ el valor principal de su integral en \mathbf{R} se define como

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx,$$

cuando el límite existe. Por ejemplo, el valor principal de la integral de $f(x) = x$ en \mathbf{R} es 0, pero la integral impropia no existe.

B.2. Integral de Lebesgue

Henri Lebesgue explica cómo mejorar la definición de la integral de Riemann con estas palabras:

Cuando se forma la suma $S = \sum f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ para una función continua $f(x)$, se agrupan valores de x que dan valores poco diferentes de $f(x)$ y es porque estos valores difieren poco que se pueden sustituir en S por uno de ellos $f(\xi_i)$. Pero, si $f(x)$ es discontinua, no hay ninguna razón para que las elecciones de intervalos (x_i, x_{i+1}) cada vez más pequeños conduzcan a agrupar valores $f(x)$ cada vez menos diferentes. Es por lo que el procedimiento de Riemann sólo tiene éxito raramente y, en cierto modo, por azar. Puesto que queremos agrupar valores poco diferentes de $f(x)$, está claro que debemos subdividir el intervalo de variación de $f(x)$ y no el intervalo de variación de x . (H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, pág. 130.)

Agrupar valores poco diferentes de $f(x)$ quiere decir sustituir $f(x)$ por a siempre que $a \leq f(x) < a + h$. Esto requerirá sustituir las funciones escalonadas de la integral de Riemann por otras en las que los “escalones” pueden ser conjuntos arbitrarios y habrá que asignar a estos conjuntos una “longitud”, que llamaremos *medida* del conjunto.

Describiremos la integral en \mathbf{R} , aunque la teoría en \mathbf{R}^n es la misma cambiando al principio los intervalos por bolas o por cubos.

B.2.1. Medida de conjuntos de \mathbf{R} .

Lebesgue construyó una medida para conjuntos de \mathbf{R} . A cada conjunto acotado A le asoció una *medida exterior*, $m^*(A)$, del modo siguiente:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^N l(I_j) : A \subset \bigcup_{j=1}^N I_j \right\},$$

donde los I_j son intervalos y $l(I_j)$ sus longitudes. Si I es un intervalo que contiene a A , Lebesgue define la medida interior de A como $m_*(A) = l(I) - m^*(I \setminus A)$ y dice que un conjunto acotado es *medible* si sus medidas exterior e interior coinciden¹. Representamos la medida de A por $m(A)$. Si A no es acotado, decimos que es medible si lo son todos los $A_n = A \cap [n, n+1)$ y la medida de A es la suma de las medidas $m(A_n)$ (que puede ser infinita).

Los conjuntos medibles tienen una estructura de σ -álgebra: (i) \emptyset y \mathbf{R} son medibles; (ii) si A es medible, $\mathbf{R} \setminus A$ también; (iii) si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles, la unión $\cup_n A_n$ es medible.

¹Éste es el camino utilizado por Lebesgue, pero actualmente también hay otras presentaciones de la teoría, que no utilizan el concepto de medida interior.

Los conjuntos abiertos y los cerrados son medibles y las propiedades anteriores permiten deducir que otros muchos conjuntos también lo son. Se puede demostrar que hay conjuntos no medibles, pero los medibles son suficientes para las necesidades que nos aparezcan.

- Propiedades.**
1. La medida de un intervalo es su longitud.
 2. *Monotonía:* si $A \subset B$ y son medibles, entonces $m(A) \leq m(B)$.
 3. *Aditividad numerable:* si $\{A_n\}$ es una sucesión de conjuntos medibles disjuntos dos a dos, $m(\cup_n A_n) = \sum_n m(A_n)$.
 4. *Invarianza por traslación:* si A es medible, $x \in \mathbf{R}$ y $A + x = \{y + x : y \in A\}$, entonces $m(A + x) = m(A)$.
 5. Si A es medible y $\epsilon > 0$, existen un abierto V y un compacto K tales que $K \subset A \subset V$ y $m(V \setminus A) < \epsilon$ y $m(A \setminus K) < \epsilon$.

B.2.2. Conjuntos de medida nula.

Son especialmente importantes los conjuntos de medida nula. Es un concepto que se puede introducir en términos sencillos: un conjunto es de medida nula si para cada $\epsilon > 0$ se puede recubrir por una unión numerable de intervalos cuya suma de longitudes es menor que ϵ . (En realidad, esta definición equivale a decir que el conjunto es de medida exterior nula; lo que ocurre es que todos los conjuntos de medida exterior nula son medibles.)

Una propiedad se dice que se cumple *en casi todo punto* (en el texto lo abreviamos como c.t.p.) si el conjunto de puntos en que no se cumple tiene medida nula. Por ejemplo, f y g coinciden en casi todo punto si $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ tiene medida nula.

B.2.3. Funciones medibles.

Una función f de un subconjunto D de \mathbf{R} en $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ se dice que es *medible* si los conjuntos $\{x : f(x) > \alpha\}$ son medibles para todo $\alpha \in \mathbf{R}$.

Las funciones continuas son medibles porque los abiertos son medibles.

Proposición B.7. *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles, las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ y $\liminf_n f_n$ son medibles (y, por tanto, $\lim_n f_n$ cuando está definida).*

Teorema B.8 (Teorema de Lusin). *Si f es medible y se anula fuera de un conjunto de medida finita y si $\epsilon > 0$, existe g continua de soporte compacto tal que $m(\{x : f(x) \neq g(x)\}) < \epsilon$.*

B.2.4. Funciones simples.

Se llaman funciones *simples* a las que son combinación lineal de funciones características, es decir, se escriben en la forma

$$(B.1) \quad \sum_{j=1}^N \alpha_j \chi_{A_j}$$

donde los α_j son números reales y los A_j , conjuntos medibles.

Proposición B.9. *Si f es medible y no negativa, existe una sucesión de funciones simples $\{s_n\}$ tales que: (i) $s_n \leq s_{n+1}$ para todo n ; (ii) $\lim_n s_n(x) = f(x)$ c.t.p.*

B.2.5. Definición de la integral.

B.2.5.1. *Integración de funciones simples.* Si s es una función simple que se escribe como en (B.1), su integral se define como

$$\int_{\mathbf{R}} s = \sum_{j=1}^N \alpha_j m(A_j).$$

B.2.5.2. *Integración de funciones positivas.* Si f es una función medible positiva, se define

$$\int_{\mathbf{R}} f = \sup \left\{ \int_{\mathbf{R}} s : s \text{ es simple y } s \leq f \right\}.$$

B.2.5.3. *Funciones integrables.* Si f es una función medible, escribimos $f^+(x) = \max(f(x), 0)$ y $f^-(x) = \max(-f(x), 0)$ de modo que f^+ y f^- son positivas y $f = f^+ - f^-$; si f^+ y f^- tienen integrales finitas, se dice que f es *integrable* y se define

$$\int_{\mathbf{R}} f = \int_{\mathbf{R}} f^+ - \int_{\mathbf{R}} f^-.$$

Equivale a que $|f|$ sea integrable con integral finita.

B.2.5.4. *Integral sobre un conjunto cualquiera.* Si f es una función medible y E es un conjunto medible, la integral de f sobre E se define como

$$\int_E f = \int_{\mathbf{R}} f \chi_E$$

(vale siempre si f es positiva y sólo si $f \chi_E$ es integrable en el caso general). Si f está definida en E , equivale a extenderla por 0 a todo \mathbf{R} e integrar en \mathbf{R} .

Cuando hagamos explícita la variable escribiremos $\int_E f(x) dx$.

B.2.6. Propiedades de la integral.

1. Si $f = g$ en casi todo punto de E , $\int_E f = \int_E g$.
2. *Linealidad*: $\int_E (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_E f + \beta \int_E g$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$).
3. Si $m(E) = 0$, $\int_E f = 0$.
4. Si $f \geq 0$ y $\int_E f = 0$, entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in E$.
5. $|\int_E f| \leq \int_E |f|$.
6. *Continuidad de la integral respecto a traslaciones*:

$$(B.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$$

B.2.7. Teoremas de convergencia.

Teorema B.10 (Teorema de convergencia monótona). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión creciente ($f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ para casi todo x de E) de funciones medibles positivas,*

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

El resultado es válido para una sucesión decreciente ($f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$) si suponemos que f_1 es integrable; basta aplicar el teorema a $g_n = f_1 - f_n$.

Una consecuencia inmediata del teorema de convergencia monótona es que si las funciones f_n son medibles y positivas se tiene

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_n f_n = \sum_n \int_E f_n,$$

ya que las sumas parciales forman una sucesión creciente.

Teorema B.11 (Teorema de convergencia dominada). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles, g es una función integrable tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para casi todo x de E y $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ existe en casi todo punto,*

$$\int_E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

Cuando la sucesión f_n no tiene límite puntual suele ser útil el siguiente resultado, que da una desigualdad.

Teorema B.12 (Lema de Fatou). *Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones medibles positivas,*

$$\int_E \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n.$$

B.2.8. Continuidad y derivabilidad de integrales con parámetros.

A partir del teorema de convergencia dominada se pueden deducir los siguientes resultados.

Teorema B.13. *Sea $f(x, t)$ una función definida en $E \times (a, b)$ (donde E es un subconjunto medible de \mathbf{R}). Supongamos que para cada t la función $f(\cdot, t)$ es integrable en E y definimos*

$$F(t) = \int_E f(x, t) dx.$$

1. *Si la función $t \rightarrow f(x, t)$ es continua en t_0 para cada $x \in E$ y existe g integrable en E tal que $|f(x, t)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E para t en un entorno de t_0 , entonces F es continua en t_0 .*
2. *Si la función $t \rightarrow f(x, t)$ es derivable en un entorno de t_0 y existe g integrable en E tal que $|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)| \leq g(x)$ en casi todo punto de E para t en un entorno de t_0 , entonces F es derivable en t_0 y*

$$F'(t_0) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0) dx.$$

Cuando decimos “en casi todo punto” estamos aceptando que la hipótesis no se cumpla en un conjunto de medida nula; hay que entender que ese conjunto es independiente de t .

B.2.9. Teorema de Fubini.

La construcción anterior de la medida de Lebesgue en \mathbf{R} se adapta a más dimensiones como hemos indicado. Las definiciones de función medible, integral de una función o función integrable son semejantes. El teorema de Fubini-Tonelli relaciona una integral en \mathbf{R}^2 con integrales iteradas de una variable (más generalmente podríamos darlo para funciones en $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$).

Teorema B.14. *Sea f una función medible definida en $E \times F$ donde E y F son subconjuntos medibles de \mathbf{R} .*

1. *Si f es integrable en $E \times F$, se cumple:*

(B.3)

$$\int_{E \times F} f(x, y) dx dy = \int_E \left(\int_F f(x, y) dy \right) dx = \int_F \left(\int_E f(x, y) dx \right) dy.$$

2. *Si $\phi(x) = \int_F |f(x, y)| dy$ es integrable en E , entonces f es integrable en $E \times F$ y se satisface (B.3).*

También se cumple (B.3) siempre que f sea no negativa; en ese caso, todos los términos pueden ser $+\infty$.

B.2.10. Relación con la integral de Riemann.

Si una función es integrable Riemann, es integrable Lebesgue y la integral en ambos sentidos es la misma. Esto no se aplica a integrales impropias. Por ejemplo, la integral de $\sin x/x$ en \mathbf{R} está bien definida como integral impropia, pero no es una función integrable en el sentido de Lebesgue.

Un teorema demostrado por Lebesgue afirma: *una función es integrable Riemann si su conjunto de discontinuidades tiene medida nula.*

B.2.11. Los espacios L^p .

En este apartado consideraremos que dos funciones que coinciden en casi todo punto son la misma, lo que equivale a definir una relación de equivalencia y hablar de clases de funciones.

Se define el espacio $L^p(E)$, $p > 0$, como el espacio de funciones medibles definidas en E tales que $|f|^p$ es integrable; en particular, $L^1(E)$ es el conjunto de funciones integrables. Tiene estructura de espacio vectorial por la linealidad de la integral. Si $1 \leq p < \infty$, la expresión

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p \right)^{1/p}$$

define una norma en $L^p(E)$. (Obsérvese que hay que identificar las funciones que coinciden en casi todo punto para que $\|f\|_p = 0$ implique $f = 0$.)

La sucesión $\{f_n\}$ converge a f en la norma de L^p si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$, y es de Cauchy si $\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$.

Teorema B.15. *El espacio $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$, es un espacio de Banach.*

Recuérdese que un espacio de Banach es un espacio vectorial normado y completo, y que completo significa que toda sucesión de Cauchy converge a una función del espacio.

Teorema B.16. *Si la sucesión $\{f_n\}$ converge a f en L^p , existe una subsucesión que converge a f en casi todo punto.*

En $L^p(\mathbf{R})$ hay un resultado de continuidad respecto a las traslaciones, que para $p = 1$ hemos mencionado entre las propiedades de la integral.

Teorema B.17. *Si f está en $L^p(\mathbf{R})$, $1 \leq p < \infty$,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int |f(x+h) - f(x)|^p dx = 0$$

También se define el espacio $L^\infty(E)$, pero por otro camino. Una función medible definida en E está en $L^\infty(E)$ si existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para casi todo x de E . El mínimo de los posibles valores M en la desigualdad anterior es la norma de f en L^∞ . También es un espacio de Banach.

El espacio L^2 el único de los espacios L^p que es espacio de Hilbert; su producto escalar viene definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_E fg.$$

Esta definición vale si las funciones toman valores reales; si toman valores complejos hay que poner $f\bar{g}$ en el segundo miembro.

Teorema B.18 (Desigualdad de Hölder). *Si $f \in L^p$ y $g \in L^q$ con $1/p + 1/q = 1$ (cuando uno de ellos es 1, el otro es ∞), entonces fg es integrable y se cumple*

$$\left| \int_E fg \right| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

El caso $p = q = 2$ corresponde a la desigualdad de Cauchy-Schwarz (teorema 10.1) del espacio de Hilbert $L^2(E)$.

B.3. Problemas

B.1 El segundo teorema del valor medio para integrales que aparece en B.1.3 tiene la siguiente variante, que se prueba por integración por partes: si h es monótona y tiene derivada continua en $[a, b]$ y f es integrable en $[a, b]$, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(t)h(t) dt = h(a) \int_a^c f(t) dt + h(b) \int_c^b f(t) dt.$$

B.2 Probar que si una función es integrable en $(a + \delta, b)$ para todo $\delta > 0$ y está acotada en un entorno de a , es integrable en (a, b) .

B.3 Probar que una función monótona y acotada en un intervalo $[a, b]$ es integrable Riemann.

B.4 Probar que la integral impropia de $\sin t/t$ existe en $(0, \infty)$, pero que la función no es integrable (es decir, la integral de $|\sin t/t|$ es ∞). *Observación:* Sólo se pide probar que la integral impropia existe, lo que es más fácil que determinar su valor exacto, cosa que hacemos en el problema 2.7, por ejemplo.

B.5 Demostrar que si f es integrable con respecto a la medida de Lebesgue en \mathbf{R} se tienen los resultados siguientes:

1. $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\{x: |x| > N\}} |f(x)| dx = 0.$
2. Para todo $\epsilon > 0$ existe una función escalonada e tal que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x) - e(x)| dx < \epsilon.$$

(Aproximar las funciones simples por escalonadas.)

3. Para todo $\epsilon > 0$ existe una función φ continua y de soporte compacto (nula fuera de un intervalo) tal que

$$\int_{\mathbf{R}} |f(x) - \varphi(x)| dx < \epsilon.$$

4. $\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbf{R}} |f(x+h) - f(x)| dx = 0.$

B.6 1. Probar que si la medida de E es finita (por ejemplo, si es un intervalo $[a, b]$), una función que esté en $L^p(E)$ está también en $L^1(E)$. Dar un contraejemplo que muestre que el recíproco no es cierto.

2. Dar una función de $L^2(\mathbf{R})$ que no sea integrable.

B.7 Probar que si la medida de E es finita se tiene:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p = \|f\|_{\infty}.$$

Algunas notas históricas y galería de personajes

C.1. Fourier

En diciembre de 1807 Fourier presentó a la Academia de Ciencias de París un manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*. Los miembros de la Academia encargados de juzgarlo no emitieron un informe y expresaron sus dudas sobre el trabajo¹. Pero el tema era suficientemente interesante para que la Academia propusiese como tema del gran premio de 1812, “dar la teoría matemática de las leyes de propagación del calor y comparar los resultados de esta teoría con los de experiencias exactas”. Fourier mejoró su manuscrito anterior y presentó al concurso uno nuevo titulado *Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*. Ganó el premio², pero los académicos añadieron a sus elogios ciertas reservas, indicando que “deja algo que desear, sea en cuanto a la generalidad, sea incluso del lado del rigor”. Ninguna de las memorias fue publicada en esos años, pero Fourier culminó su trabajo con un libro titulado *Théorie analytique de la chaleur* y publicado en 1822, que el físico Arnold Sommerfeld

¹Riemann escribió que “esta afirmación [la de que una función arbitraria se puede representar en serie trigonométrica] resultó tan inesperada para el viejo Lagrange, que se opuso a ella de la forma más decidida”.

²Hay que valorar más el trabajo de Fourier por sí mismo que por haber ganado el premio. La otra memoria que se presentó no tenía ecuaciones ni términos científicos y, en cambio, contenía frases como: “El fuego ha recibido su principio del autor de todas las cosas y se propaga como todo lo que existe en la naturaleza según el orden inmutable del creador”.

calificó como “la Biblia de la Física Matemática”³ y James Clerk Maxwell de “gran poema matemático”⁴.

El problema de la representación de una función en serie trigonométrica tenía precedentes en el siglo XVIII, como veremos en la siguiente sección. Sin embargo, las aportaciones de Fourier fueron cruciales para clarificar una situación que las discusiones del siglo anterior mantenían demasiado oscura; esta dificultad para superar los conceptos heredados del siglo XVIII hizo dudar de la validez del trabajo de Fourier a los ilustres matemáticos franceses de la época. Fourier encontró la expresión de los coeficientes⁵ e interpretó las integrales como áreas bajo curvas, lo que le permitía hacerlos válidos para funciones bastante generales y desprovistas de una expresión analítica. Vio claramente que la igualdad entre la serie y la función ocurre en un intervalo, no necesariamente fuera de él, y que en intervalos más pequeños que un periodo series trigonométricas distintas pueden coincidir con la misma función. Cuestiones que hoy nos pueden parecer elementales con un concepto moderno de función eran realmente avanzadas en esa época y fueron decisivas para clarificar las ideas.

Desde el punto de vista físico, Fourier fue el primero en deducir la ecuación diferencial que describe la difusión del calor e inventó el método de separación de variables para su resolución, reconoció la potencia de este método y lo aplicó a otras ecuaciones.

La integral, ahora *transformada de Fourier*, aparece por primera vez en su trabajo de 1811 como un paso al límite y fue incorporada también al libro.

Joseph Fourier nació en Auxerre (Francia) en 1768 y siendo aún joven le tocó vivir la Revolución Francesa. Parece que estaba dispuesto a tomar votos religiosos, pero precisamente la Revolución impidió que siguiese el camino eclesiástico.

Fue profesor de la Escuela Politécnica de París, creada en 1795, donde coincidió con Monge, Lagrange, y otros. Duró poco tiempo ya que en 1798 fue llamado a participar en la campaña de Egipto de Napoleón junto a gran número de

científicos. Tuvo una destacada actividad tanto científica como administrativa (fue nombrado gobernador del Bajo Egipto). La expedición volvió a Francia en 1801, militarmente derrotada, pero fruto de su trabajo científico y cultural fue la monumental obra *Description de l’Egypte*, comenzada a publicar en 1809. Fourier se encargó de escribir la introducción histórica además de algún otro artículo.

En 1802 fue nombrado prefecto (gobernador) del departamento de Isère, cuya

³En el prólogo del libro *Partial Differential Equations in Physics* de 1949.

⁴Según se menciona en el artículo *History of Mathematics* de la Encyclopaedia Britannica.

⁵Es verdad que aparecen parcialmente en un texto de Euler de 1777 e incluso en un trabajo de Clairaut de 1757, pero Fourier los dedujo directamente y los situó como claves para escribir la serie trigonométrica.

capital es Grenoble. No volvió a ser profesor, pero siguió trabajando en investigaciones científicas mientras ocupaba su cargo: las memorias sobre la propagación del calor que presentó a la Academia de Ciencias en 1807 y 1811 las elaboró siendo prefecto.

Dejó la prefectura de Isère en 1814 y fue prefecto del departamento de Rhône durante unos meses, pero los cambios políticos le hicieron abandonar sus cargos y se trasladó a París. Allí trabajó

como director de la Oficina Estadística del Sena. En 1817 fue elegido miembro de la Academia de Ciencias en la sección de Física y en 1822, el mismo año en que publicó su famoso libro, fue nombrado Secretario perpetuo de la Academia, lo que le permitió hacer publicar su memoria premiada de 1811. Su influencia en el mundo científico francés había crecido notablemente. En 1826 fue elegido miembro de la Academia Francesa (de la lengua) y murió en París en 1830.

La crítica de falta de rigor ha acompañado al trabajo de Fourier durante mucho tiempo, a pesar de los elogios de matemáticos posteriores, y ha retrasado el reconocimiento de su labor. Actualmente se suele presentar el trabajo de Fourier como paradigma de actuación en Física matemática, ya que escribió la ecuación matemática que sirve de modelo a un fenómeno físico y ofreció un camino para su resolución. En su mentalidad la matemática se debía ocupar de resolver problemas de la naturaleza y en ese sentido es notable el siguiente párrafo que incluyó en el *Discurso preliminar* de su libro:

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos. Este estudio, al ofrecer un objetivo determinado, no solamente tiene la ventaja de excluir las cuestiones vagas y los cálculos sin salida; es también un medio seguro de formar el propio análisis, y de descubrir los elementos que más nos interesa conocer, y que esta ciencia debe conservar siempre: estos elementos fundamentales son los que se reproducen en todos los efectos naturales.

C.2. Los precursores

A mediados del siglo XVIII, es decir, unos cincuenta años antes de los trabajos de Fourier, ya se había planteado el problema de la representación de una función por medio de una serie trigonométrica. Fue con ocasión de los intentos de resolver el problema de la cuerda vibrante, del que hemos hablado en el capítulo 8. La parte histórica del trabajo de Riemann que mencionaremos más adelante resume estupendamente la discusión sobre el tema, en la que se involucraron d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli y Lagrange. En términos aún más resumidos es la siguiente.

En 1747 un trabajo de d'Alembert muestra que la solución general de la ecuación de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

se escribe en la forma

$$u(x, t) = \varphi(x + \alpha t) + \psi(x - \alpha t).$$

A continuación impone la condición de que los extremos de la cuerda en $x = 0$ y $x = l$ estén fijos y deduce que

$$u(x, t) = \varphi(\alpha t + x) - \varphi(\alpha t - x) \quad \text{y} \quad \varphi(x) = \varphi(2l + x).$$

En 1748, Euler publicó una memoria en la que indicó que el movimiento queda completamente determinado si se conocen la posición y la velocidad iniciales (u y su derivada respecto a t en $t = 0$) y mostró cómo determinar φ en este caso. D'Alembert protestó en un trabajo de 1750 alegando que esto presupondría que u se puede expresar analíticamente en t y x .

Sin que Euler hubiera respondido a d'Alembert apareció en 1753 un tratamiento del tema completamente distinto, debido a Daniel Bernoulli. Taylor había observado ya en 1715 que las funciones $\sin n\pi x/l \cos n\pi \alpha t/l$ con n entero son soluciones de la ecuación y se anulan en $x = 0$ y $x = l$, lo que explica que una cuerda, además de su tono fundamental, puede dar también el tono fundamental de las cuerdas de longitud $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ de la original. Esto llevó a Bernoulli a considerar que la cuerda podía vibrar según la expresión

$$u(x, t) = \sum_n a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi \alpha}{l} (t - \beta_n),$$

y como todas las modificaciones observadas del fenómeno se podían explicar partiendo de esta ecuación, consideró que daba la solución general.

El trabajo siguiente al de Bernoulli en las Memorias de la Academia de Ciencias de Berlín era de Euler, quien aseguraba frente a d'Alembert que la función φ puede ser completamente arbitraria entre $-l$ y l y señalaba que la solución de Bernoulli era general si y sólo si cualquier curva arbitraria entre 0 y l podía ser representada por una serie trigonométrica. Dice Riemann: "en aquel tiempo nadie puso en duda que todas las transformaciones que pueden efectuarse sobre una expresión analítica –ya sea finita o infinita– son válidas para cualesquiera valores de las magnitudes indeterminadas, o cuando menos sólo son inaplicables en casos sumamente especiales. De ahí que pareciera imposible representar mediante la expresión anterior una curva algebraica, o, en general, una curva no periódica dada analíticamente, y, por ello, Euler creyó tener que decidir la cuestión en contra de Bernoulli".

Lagrange, joven aún, entró en escena en 1759. Estudió las vibraciones de un hilo sin masa al que se coloca una cantidad finita de masas de igual magnitud equidistribuidas y vio cómo variaban las vibraciones al tender el número de masas a infinito; tras largas manipulaciones analíticas decidió que la solución de Euler era correcta, pero (citando de nuevo a Riemann)

“la transición de lo finito a lo infinito dejaba, sin embargo, mucho que desear, de modo que d’Alembert pudo continuar vindicando para su solución la gloria de máxima generalidad, en un escrito que situó al frente de sus *Opuscules mathématiques*”. Y termina sus comentarios sobre esta parte de la historia diciendo que “en lo tocante a la solución de Bernoulli, los tres coincidieron en no considerarla general; mas si bien d’Alembert, para poder declarar la solución de Bernoulli menos general que la suya propia, hubo de afirmar que una función periódica dada analíticamente no siempre puede ser representada mediante una serie trigonométrica, Lagrange creyó poder demostrar esa posibilidad”.

En el fondo de la discusión de estos personajes estaba la poca claridad de los conceptos de función, continuidad, dominio de definición, etc. La influencia de la teoría de las series trigonométricas en la clarificación de estos conceptos fue determinante.

Leonhard Euler es la figura culminante de la matemática en el siglo XVIII, uno de los matemáticos más brillantes de la historia y, sin duda, el más prolífico. Nacido en Basilea (Suiza) en 1707, hijo de un pastor protestante, estudió ciencias y no teología, contra el deseo de su padre, quien fue finalmente convencido por Johann Bernoulli, que ejerció gran influencia en la formación de Euler.

En 1727 se incorporó a la Academia de Ciencias de San Petersburgo en Rusia, a propuesta de su amigo Daniel Bernoulli, y a la marcha de éste en 1733, Euler ocupó la cátedra principal de matemáticas. Permaneció allí hasta 1741, cuando se trasladó a Berlín a petición de Federico II de Prusia para impulsar la Academia de Ciencias que iba a sustituir a la Sociedad de Ciencias que Leibniz fundó en 1700. En 1766 volvió a San Petersburgo y allí permaneció hasta su muerte en 1783. Tuvo problemas con la vista desde 1740 y casi todo su último periodo en San Petersburgo estuvo ciego; ayudado de su excelente memoria y de colaboradores que redactaban sus trabajos pudo escribir cientos de artículos de los que muchos aparecieron tras su muerte.

La presencia de Euler en todos los campos de la matemática es abrumadora y no se puede dejar de mencionar su enorme aportación a la física (mecánica, fluidos, astronomía). Si el siglo anterior había visto el nacimiento del cálculo infinitesimal de Newton y Leibniz, Euler lo llevó a la categoría de análisis matemático y le dio en sus libros una forma muy parecida a la actual (salvo por el rigor). Precisamente su dominio del análisis le permitió aplicarlo con éxito en problemas físicos. Muchos aspectos hoy elementales de las ecuaciones diferenciales ordinarias tienen su origen en Euler: ecuaciones lineales de coeficientes constantes, soluciones en series de potencias, factores integrantes, un método de aproximación de soluciones, etc. Creó el cálculo de variaciones y se le debe la condición necesaria de existencia de extremo (ahora *ecuación de Euler*).

La teoría de números recibió un impulso decisivo con Euler, quien continuó la obra iniciada por Fermat; además relacionó la función $\zeta(s) = \sum n^{-s}$ con los números primos y calculó sus valores cuando s es un entero par, y concibió la noción de número trascendente, entre otras aportaciones. Definió y demostró

propiedades de las funciones *beta* y *gamma* y trabajó con funciones de variable compleja; se le debe la fórmula básica

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Aplicó el cálculo diferencial e integral al estudio de superficies (geometría diferencial), fue precursor de la teoría de grafos con su famoso resultado sobre el recorrido de los puentes de Königsberg y de la topología, donde ahora se le recuerda en el concepto de *característica de Euler*.

Jean le Rond d'Alembert nació en París en 1717. Estudió derecho, medicina y matemáticas y fue aceptado en la Academia de Ciencias en 1741. Ocupó un lugar destacado en la actividad intelectual parisina del siglo de las luces y Diderot le eligió como colaborador para la edición de la *Enciclopedia*, también llamada *Diccionario razonado de las ciencias, las artes y los oficios*, que se publicó en 28 volúmenes entre 1751 y 1772. Aunque en principio se iba a ocupar de la parte matemática y astronómica, la labor de d'Alembert fue mucho más extensa y ya en el primer volumen se encargó de escribir el prefacio. Es habitual referirse a ella como la "Enciclopedia de Diderot y d'Alembert". Fue miembro de la Academia francesa (de la lengua) desde 1754 y su secretario perpetuo desde 1772. Murió en París en 1783, sólo un mes más tarde que Euler.

Daniel Bernoulli nació en 1700 en Groningen (Holanda), donde su padre Johann ocupaba la cátedra de matemáticas. En 1805 Johann volvió a su ciudad natal, Basilea, a ocupar la cátedra que dejó vacante su hermano Jakob al morir. Aunque su padre intentó que Daniel se dedicase a una carrera de negocios, el interés del hijo por la ciencia le condujo a estudiar medicina. Aplicó sus conocimientos de matemáticas y física a la realización de una

Ganador de 12 premios de la Academia de Ciencias de París, es autor de una docena de libros de álgebra, análisis, mecánica, etc. Notaciones que ahora son habituales en matemáticas tienen su origen en Euler: $f(x)$ para las funciones, e y π para los números correspondientes, i para la raíz cuadrada de -1 , \sum para el sumatorio, Δ para las diferencias finitas, entre otras.

Fue el autor de la mayoría de los artículos matemáticos de la Enciclopedia, lo que le obligó a reflexionar sobre conceptos todavía imprecisos en la época. Pensó que había que dotar al cálculo infinitesimal de una estructura más firme: en el artículo "límite" escribió que "la teoría de límites es la base de la verdadera metafísica del cálculo diferencial" y presentó la derivada como un límite de incrementos.

En 1743 publicó su *Traité de dynamique* donde aparece el principio de la cantidad de movimiento que se llama *principio de d'Alembert*. También lleva su nombre el criterio del cociente para series numéricas positivas (teorema A.8) y el teorema fundamental del álgebra según el cual todo polinomio de grado n tiene n raíces (complejas), cuya primera demostración dio Gauss en 1799.

tesis doctoral sobre la mecánica de la respiración.

Después fue a Venecia a estudiar medicina práctica, pero poco a poco fue interesándose más por las matemáticas y en 1725 se incorporó a la recién creada Academia de Ciencias de San Petersburgo como matemático. Permaneció en ese puesto hasta 1733 en que volvió a Basilea donde primero fue profesor de botánica,

después de fisiología (1743) y finalmente de física (1750); enseñó hasta 1776 y murió en Basilea en 1782.

Conocido como físico más que como matemático, sus trabajos son verdadera matemática aplicada ya que aplicó métodos matemáticos al estudio de la hidrodinámica, la elasticidad y la teoría de oscilaciones. Su libro *Hydrodynamica*, publicado en 1738, contiene el primer

análisis correcto del flujo de agua por un agujero de un recipiente e incluso dio las leyes básicas de una teoría cinética de gases, completadas mucho más tarde. Ganó 10 premios de la Academia de Ciencias de París, con trabajos de astronomía y navegación. Produjo un importante trabajo en teoría de probabilidades en la que introdujo el uso del cálculo integral.

C.3. Dirichlet

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de la serie de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas. Fue Dirichlet quien en 1829 inauguró una nueva época ya que publicó el primer resultado correcto de convergencia: *si una función acotada tiene un número finito de discontinuidades y un número finito de máximos y mínimos, su serie de Fourier converge en cada punto a la semisuma de los límites laterales*. El artículo de Dirichlet comienza indicando las razones por las que la prueba de Cauchy no era válida.

Dirichlet tuvo el acierto de buscar condiciones suficientes y no plantearse el problema en más generalidad de la que podía tratar. Su prueba era estrictamente rigurosa y, aunque he elegido para el texto una versión posterior, que utiliza el segundo teorema del valor medio, la demostración original se sigue sin gran dificultad. En ella introdujo Dirichlet la representación integral de la suma parcial a través del núcleo que hoy llamamos con su nombre. La continuidad a trozos de las funciones no se usa en realidad en ningún lugar de la prueba, pero Dirichlet la incorpora porque las integrales que dan los coeficientes de Fourier están bien definidas para esas funciones por el método introducido por Cauchy (publicado en 1823). Al final de su artículo sugirió una condición más amplia de integrabilidad y mostró las dificultades para extenderla a “todas” las funciones:

Tenemos un ejemplo de una función que no cumple esta condición [de integrabilidad] si suponemos $\varphi(x)$ igual a una constante determinada c cuando la variable x tiene un valor racional e igual a otra constante d cuando esta variable es irracional. La función así definida tiene valores finitos y determinados para todo valor de x y, sin embargo, no se puede sustituir en la serie [de Fourier], puesto que las diferentes integrales que entran en esta serie perderían todo su sentido en este caso.

Aquí la referencia a la pérdida de sentido la podemos entender no sólo como la no validez de la definición de Cauchy (o sea, la no integrabilidad Riemann) sino que incluso la interpretación geométrica de área dada por Fourier queda en entredicho. Mencionemos de paso que el concepto de función de Dirichlet es más amplio que el de autores anteriores y que es habitual señalarle como el punto de partida del concepto moderno de función.

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), alemán de Düren, fue enviado por su padre a París en 1822 para que estudiase matemáticas en el lugar que mejores matemáticos reunía en aquel momento. Allí se encontró con Fourier de quien recogió el interés por las series trigonométricas. Además, en esos años se publicaron los cursos de Análisis de Cauchy con los que éste pretendía instaurar métodos rigurosos. Dirichlet fue capaz de poner en común ambas cosas y así demostró la convergencia de las series de Fourier para una cierta clase de funciones. La publicación de este trabajo en 1829 fue un gran aliciente para las series de Fourier. En ese momento Dirichlet era ya profesor en la universidad de Berlín. Permaneció en ella hasta

1855, en que murió Gauss y le fue ofrecida la cátedra de Gotinga, que ocupó hasta su muerte en 1859.

Dirichlet suele ser considerado como el fundador de la teoría analítica de números con sus trabajos sobre las series que hoy llamamos de Dirichlet; también es muy conocido su resultado sobre la infinitud de primos en sucesiones aritméticas. Sus trabajos en mecánica y teoría del potencial le llevaron al problema de valores de contorno para funciones armónicas que también ha quedado ligado a su nombre como *problema de Dirichlet*. Fue uno de los responsables de que la matemática alemana se convirtiese en la más destacada del mundo en la segunda mitad del siglo XIX.

Trabajos posteriores de Dirksen y Bessel no aportaron nada nuevo al tema de las series de Fourier y en 1854 Riemann consideraba que el resultado de Dirichlet era el único digno de mención.

C.4. Riemann

Continuador de la obra de Dirichlet, Riemann presentó en 1855 su trabajo de habilitación titulado *Sobre la desarrollabilidad de una función en serie trigonométrica* que, sin duda, es uno de los varios con que su autor merece pasar a la historia de las matemáticas. No fue publicado hasta 1867, un año después de su muerte. En el trabajo se distinguen tres partes: comienza con un repaso histórico, sigue con la generalización de la integral de Cauchy y finalmente se ocupa de las propiedades de las sumas de series trigonométricas.

La parte histórica es un excelente repaso a la situación del problema a lo largo de los cien años anteriores y de ahí hemos sacado las citas incluidas en las secciones anteriores⁶. Termina diciendo:

La cuestión de la representabilidad de una función mediante una serie trigonométrica sólo ha sido resuelta hasta ahora bajo los dos supuestos de que la función admita integración en todo el recorrido, y que no posea infinitos máximos y mínimos. Si no se hace la última presuposición, entonces los dos teoremas integrales de Dirichlet son insuficientes para decidir la cuestión; mas si se suprime la primera, ya no es aplicable la propia determinación de los coeficientes de Fourier.

Antes ha indicado que todas las funciones que intervienen en los fenómenos naturales caen en el teorema de Dirichlet pero que la extensión merece la pena por dos motivos:

En primer lugar, como Dirichlet mismo señala al final de su memoria, este asunto está en la más estrecha conexión con los principios del cálculo infinitesimal, y puede servir para traer dichos principios a una mayor claridad y precisión. En este sentido su consideración tiene un interés inmediato.

Mas, en segundo lugar, la aplicabilidad de las series de Fourier no se limita a investigaciones físicas; hoy se han aplicado con éxito también a un campo de la matemática pura, la teoría de números, y aquí parecen ser de importancia precisamente aquellas funciones cuya representabilidad mediante series trigonométricas no ha investigado Dirichlet.

La integral, que hoy conocemos como *de Riemann*, modifica ligeramente la definición de Cauchy, pero a diferencia de éste, que sólo se ocupa de funciones continuas (a trozos), Riemann se interesa en el estudio de la clase máxima de funciones a las que se puede aplicar, las funciones integrables (Riemann). Fue capaz de dar una caracterización en términos de la oscilación (proposición B.2) y, con ello, de construir funciones integrables con un conjunto denso de discontinuidades.

En la parte final de la memoria aborda el estudio de las series trigonométricas. Al fijar los coeficientes de éstas por la fórmula de Fourier estamos dejando fuera la posibilidad de representar una función por otra serie trigonométrica que no sea la de Fourier. Riemann pretende recuperar esta posibilidad y busca propiedades de las sumas de series trigonométricas generales, es decir, condiciones necesarias para que una función sea representable⁷. Con

⁶Las traducciones están tomadas del libro *Riemanniana selecta*, editado y comentado por José Ferreirós y publicado por el Consejo Superior de Investigaciones Científicas (Madrid, 2000).

⁷Hoy sabemos que si una serie trigonométrica converge a una función integrable es la serie de Fourier de ésta, pero también que hay series trigonométricas que convergen a funciones no integrables.

respecto a las series de Fourier aparecen dos resultados importantes que hemos presentado en el capítulo 2: el lema de Riemann-Lebesgue y el teorema de localización. Se preocupó del problema de la unicidad: ¿pueden dos series trigonométricas distintas converger a la misma función? Este problema equivale a saber si cuando una serie trigonométrica converge a cero en todos los puntos, sus coeficientes tienen que ser necesariamente nulos. Para ello ingenió una manera de asignar un valor a la suma de una serie trigonométrica, que es otra forma de sumabilidad, e incluye una noción de derivada generalizada.

Bernhard Riemann ha sido uno de los matemáticos más geniales de todos los tiempos. Nació en Breselenz (Hannover, Alemania) en 1826 y murió de una enfermedad pulmonar cerca del lago Maggiore (Italia) en 1866, sin llegar a cumplir 40 años. Su producción matemática no es abundante (sus obras completas publicadas caben en un tomo) y, sin embargo, varios trabajos de Riemann se pueden mencionar como merecedores de otorgar a su autor un alto lugar en distintos campos de la matemática: series trigonométricas, funciones complejas, funciones abelianas, geometría, distribución de números primos y problema de valores iniciales con un salto.

Aun siendo un brillante estudiante su decisión de estudiar matemáticas la tomó en 1846, matriculado ya en la universidad de Gotinga como estudiante de filología y teología. Al año siguiente fue a Berlín donde estaban los profesores más destacados (Dirichlet y Jacobi, entre otros). En 1851 presentó en Gotinga su tesis *Fundamentos para una teoría general de las funciones de una variable compleja*, bajo la supervisión de Gauss, quien elogió un trabajo que según él iba mucho más allá de los requisitos de una tesis. Junto con Cauchy y Weierstrass crearon un campo nuevo en el análisis matemático.

En 1854 se presentó a la *habilitación* para ejercer como profesor de la universidad. Como trabajo escrito elaboró el referido a las series trigonométricas, antes mencionado; para el oral, Gauss eligió entre los tres temas propuestos por Riemann el referido a la geometría, cuyo texto *Sobre las hipótesis en que se funda la geometría* es el punto de partida de la geometría que ahora llamamos riemanniana.

Cuando Dirichlet murió en 1859, la fama de Riemann era ya tan grande que la universidad de Gotinga no tuvo duda en nombrarle su sucesor, completando así una rápida carrera académica. A partir de 1862 sus problemas de salud le llevaron a Italia y vivió los años siguientes compartiendo su tiempo entre este país y Alemania, sin recuperarse del todo de sus enfermedades.

Actualmente el nombre de Riemann está asociado al problema más famoso de los que la matemática tiene pendientes desde hace mucho tiempo. Se le llama *hipótesis de Riemann*, está relacionada con los ceros de la función de variable compleja $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ (llamada *zeta de Riemann*) y aparece en su artículo *Sobre el número de primos menores que una magnitud dada*.

El trabajo de Riemann sobre resultados de unicidad para series trigonométricas fue continuado por Heine y Cantor. Una vez que sabemos que si una serie

trigonométrica converge a cero en todos los puntos, la serie tiene coeficientes nulos, la misma pregunta se plantea si sabemos que la convergencia a cero es en todos los puntos excepto los de un conjunto E ; si los coeficientes son necesariamente nulos, E se dice *conjunto de unicidad*. La caracterización de estos conjuntos de unicidad está todavía abierta. Los resultados de Cantor le llevaron a estudiar propiedades de conjuntos de puntos de la recta real que están en el origen de las ideas que le llevaron a construir la teoría de conjuntos y a definir conceptos topológicos básicos.

C.5. Convergencia y divergencia

Dirichlet marcó una pauta: los resultados de convergencia deben buscar condiciones suficientes. En 1864 Lipschitz publicó el resultado que hemos mencionado en el teorema 2.9, extendido por Dini en 1880 a la forma dada en el teorema 2.8. En cuanto al teorema original de Dirichet, Jordan lo llevó en 1881 a su mayor generalidad, con la introducción de las funciones de variación acotada. Al final de su escrito Jordan menciona la existencia del criterio de Lipschitz, independiente del suyo, y apunta la posibilidad de que no exista una condición necesaria y suficiente que permita describir las funciones cuya serie de Fourier converge. Es notable que las funciones (hoy llamadas *lipschitzianas*) del trabajo de Lipschitz y las de variación acotada de Jordan hayan trascendido de sus orígenes en el marco de las series de Fourier para constituir espacios de funciones de gran interés y aplicaciones en el análisis actual.

Heine señaló en un artículo de 1871 las dificultades para deducir ciertos resultados a partir de las sumas de series de Fourier si éstas no convergen uniformemente. En ese trabajo indica que hay convergencia uniforme en las hipótesis del teorema de Dirichlet (monotonía a trozos) si la función es continua, pero que no se sabe si sólo la continuidad será suficiente y añade: “lo que se supone tácitamente”. Parece pues que no había duda de que la serie de Fourier de una función continua tenía que ser convergente pero no pasó mucho tiempo hasta que du Bois-Reymond echó por tierra esta esperanza: una función continua puede tener serie de Fourier divergente en un punto (1873).

Paul du Bois Reymond nació en Berlín en 1831 y murió en Friburgo en 1889. Estudió medicina, pero fue convencido por Neumann para cambiar a las matemáticas. Se doctoró en Berlín, y fue profesor en Heidelberg, Friburgo and Tubinga antes de conseguir una cátedra en Berlín.

Sus trabajos matemáticos se encuadran en el entorno de Weierstrass y son sobre todo de análisis. Su más famoso resultado es precisamente el de la divergencia de la serie de Fourier de una función continua.

C.6. La sumabilidad

La solución al problema de representación de funciones continuas creado por du Bois-Reymond vino de cambiar la manera de sumar la serie. En 1900, Fejér publicó un trabajo en el que mostraba que la función continua se recupera siempre si antes de pasar al límite se toman los promedios de las sumas parciales (capítulo 7). A la vez, el resultado de Fejér vino a mostrar que otros resultados sobre series de Fourier eran en realidad métodos de sumabilidad, modos de asignar a una serie divergente un valor suma adecuado. El que aparece en la sección 7.2 es una adaptación del método con el que Poisson pretendió en 1820 probar la convergencia de las series de Fourier. De hecho, al final de su artículo, Fejér indica que a partir de su teorema “se puede dar una teoría general y nueva de la integral de Poisson” (que no veía como sumabilidad sino como solución del problema de Dirichlet para funciones armónicas en un círculo, como en el problema 8.4). Puesto que Frobenius había probado que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} r^n a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_N}{N}$$

siempre que el segundo miembro exista (s_n son las sumas parciales de la serie $\sum a_n$), esta aplicación pudo ser la causa del interés de Fejér en el tema; en su artículo, sin embargo, da la mayor importancia al resultado para series de Fourier y la mención a la integral de Poisson queda reducida a la frase anterior.

Lipót Fejér nació en Pécs (Hungría) en 1880 y cambió su nombre (Leopold Weiss) hacia 1900 a la forma húngara por la que le conocemos. Publicó su importante resultado sobre la sumabilidad de las series de Fourier por el método de Cesàro en 1900, siendo aún estudiante. Estudió en Budapest y Berlín y enseñó la mayor parte de su vida en la Universidad de Budapest. Fejér y Frygies Riesz eran los dos matemáticos húngaros

más brillantes de principios del siglo XX y consiguieron crear en su país una escuela que dio como fruto grandes matemáticos, analistas sobre todo. Las guerras y los problemas políticos que afectaron al país y a Europa hicieron emigrar a muchos de ellos. Después de la segunda guerra mundial sólo Fejér y Riesz, los más veteranos, permanecieron en Hungría. Murió en Budapest en 1959.

El resultado de Fejér vino a reforzar el interés por las series divergentes, que las críticas de Cauchy y Abel habían arrinconado en el primer tercio del siglo. Mostraba que tenía sentido e interés el asignar una suma por un procedimiento distinto del habitual a una serie, ya que ahora había algo con lo que comparar, la función original. Un año después (1901) se publicó uno de los grandes libros sobre el tema, *Leçons sur les séries divergentes* de E. Borel.

C.7. Los primeros años del siglo XX

En 1902 apareció la teoría de integración de Lebesgue en su tesis *Integral, longitud, área*. La nueva integral trajo más funciones integrables, pero no sólo eso: la identificación de funciones que coinciden en casi todo punto sugiere una nueva manera de comparar la suma de la serie y la función de partida, podrían no coincidir en todos los puntos pero quizá la discrepancia es sólo en un conjunto “pequeño”, es decir, de medida nula.

El propio Lebesgue estudió las series de Fourier con la nueva herramienta. En un trabajo de 1903 indicaba:

Voy a aplicar la noción de integral al estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones no integrables en el sentido de Riemann.

Tras varios artículos sobre el tema y un curso en el Collège de France, en 1906 publicó un libro titulado *Leçons sur les séries trigonométriques*.

Además de la extensión de lo que llamamos el lema de Riemann-Lebesgue al nuevo contexto mencionaremos dos de los resultados de Lebesgue que no hemos probado en el texto:

1. *Si una serie trigonométrica converge a una función integrable, es la serie de Fourier de su suma* (pero Fatou encontró series trigonométricas que convergen a funciones no integrables).
2. *Si f es integrable, los promedios de las sumas parciales de su serie de Fourier convergen a f en casi todo punto.*

Junto con la integral de Lebesgue, los primeros años del siglo XX vieron nacer el análisis funcional abstracto: espacios métricos, espacios L^p , espacios de Hilbert y de Banach, teoría de operadores lineales... Algunos nombres ilustres asociados al desarrollo de estos conceptos son los de Volterra, Hilbert, Schmidt, Fréchet, F. Riesz, Fischer, Banach, por ejemplo.

La influencia en la teoría de las series (e integrales) de Fourier fue muy grande y se extendió en diversas direcciones. Por ejemplo, los espacios de Hilbert permitieron ver el sistema trigonométrico como un ejemplo de base ortogonal hilbertiana en L^2 y el análisis de series de Fourier como un caso particular de una teoría abstracta. Por otro lado, los problemas que se habían estudiado para series trigonométricas se podían plantear ahora también para otras bases.

Henri Lebesgue nació en Beauvais (Francia) en 1875. Fue profesor de liceo en Nancy mientras trabajó en los resultados que constituyeron su tesis, presentada en la Sorbona (Universidad de París) en 1902. Aunque hoy la integral de Lebesgue está universalmente aceptada, en los primeros años no dejaba de parecer una construcción matemática sofisticada; sin embargo, el estudio de los espacios de funciones y el desarrollo del

análisis funcional –a partir de los trabajos de F. Riesz, sobre todo– le dieron un lugar relevante, ampliado posteriormente con la formulación de la teoría de probabilidades a partir de la teoría de la medida por Kolmogorov.

Después fue profesor en las universidades de Rennes (1902-1906) y Poitiers (1906-1910), hasta que en 1910 pasó a la Sorbona; desde 1921 ocupó una de las cátedras de matemáticas del Collège de France. Le tocó vivir una época muy

brillante de la matemática francesa, junto a ilustres matemáticos como Baire, Borel, Fréchet, Hadamard, Picard, Poincaré, entre otros. Además de completar sus resultados de teoría de la integral y utilizarlos en el estudio de las series trigonométricas, Lebesgue trabajó en temas de topología y teoría del potencial; se preocupó también de cuestiones relacionadas con la enseñanza de las matemáticas y escribió libros sobre temas “elementales”. Murió en París en 1941.

C.8. La convergencia en L^p

Limitándonos al caso de las series de Fourier clásicas, es decir, al sistema trigonométrico que hemos estudiado en el curso, los nuevos marcos funcionales dieron lugar a dos problemas destacados para funciones f de L^p :

1. ¿Es cierto que $\lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N f - f\|_p = 0$?
2. ¿Es cierto que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f$ coincide con f en casi todo punto?

El análisis funcional permite ver que la primera pregunta se reduce a probar la desigualdad

$$\|S_N f\|_p \leq C_p \|f\|_p,$$

donde la constante C_p puede depender de p , pero no debe depender de f ni de N . Aparte del caso $p = \infty$ que, por ser convergencia uniforme, ya sabemos que tiene respuesta negativa, el caso $p = 1$ se excluye por un argumento similar al de la sección 4.2. Fue Marcel Riesz (el hermano menor de Frigyes Riesz) quien en 1923 respondió afirmativamente a la primera pregunta para $1 < p < \infty$.

En cuanto a la segunda, en 1923 A. Kolmogorov demostró que existe una función integrable cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto y poco después, en 1926, fue capaz de llevar la divergencia a todo punto. La respuesta para $p = 1$ es pues falsa. Lusin conjeturó en 1915 que la respuesta para $p = 2$ era afirmativa y este problema duró 50 años, hasta que en 1965 L. Carleson probó la conjetura de Lusin⁸. De este teorema de Carleson se deduce que la serie de Fourier de una función continua converge en casi todo punto a la función y no tenemos actualmente ningún método de demostración que no siga este camino. En 1967, R. Hunt mostró que el resultado de Carleson era válido para todo $p > 1$.

⁸Durante estos 50 años la conjetura pasó por fases de duda sobre su veracidad; Carleson relata que Zygmund estaba convencido de que era falsa y que él mismo estuvo trabajando muchos años en la búsqueda de un contraejemplo antes de conseguir probar el teorema.

Bibliografía

- [1] G. Bachman, L. Narici y E. Beckenstein, *Fourier and wavelet analysis*, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [2] J. J. Benedetto, *Harmonic analysis and applications*, CRC Press, Boca Raton, 1997.
- [3] B. Burke-Hubbard, *The world according to wavelets*, A K Peters, 1996; en francés, *Ondes et ondelettes: La saga d'un outil mathématique*, Pour la Science, 1995.
- [4] H. S. Carslaw, *An introduction to the theory of Fourier's series and integrals*, tercera edición, Dover, 1950.
- [5] R. W. Churchill, *Series de Fourier y problemas de contorno*, McGraw-Hill, México, 1979.
- [6] H. Dym y H. P. McKean, *Fourier series and integrals*, Academic Press, New York, 1972.
- [7] R. E. Edwards, *Fourier series: A modern introduction*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1979.
- [8] G. B. Folland, *Fourier analysis and its applications*, Brooks/Cole, 1992.
- [9] J. Fourier, *Théorie analytique de la chaleur*, Jacques Gabay, París, 1988.
- [10] C. Gasquet y P. Witomski, *Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*, Springer-Verlag, 1999.
- [11] E. González-Velasco, *Fourier analysis and boundary value problems*, Academic Press, San Diego, 1995.
- [12] J. P. Kahane and P. G. Lemarié-Rieusset, *Fourier series and wavelets*, Gordon and Breach, Amsterdam, 1995.
- [13] D. W. Kammler, *A first course in Fourier analysis*, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000.
- [14] Y. Katznelson, *An introduction to harmonic analysis*, Dover, New York, 1976.
- [15] T. W. Körner, *Fourier analysis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988.
- [16] H. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, Albert Blanchard, 1975 (original de 1906).
- [17] R. Seeley, *Introducción a las series e integrales de Fourier*, Reverté, 1970.

- [18] G. P. Tolstov, *Fourier series*, Dover, New York, 1962.
- [19] J. S. Walker, *Fourier analysis*, Oxford University Press, 1988.
- [20] N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications*, Dover, New York, 1958 (original de 1933).
- [21] M. Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, Paris, 1995.
- [22] A. Zygmund, *Trigonometric series*, vol. I y II, Cambridge Univ. Press, London, 1959.

Índice de términos

- amplitud, 5, 78
- análisis, 3, 78

- base de Haar, 72
- base hilbertiana, 71

- clase de Schwartz, 91
- coeficientes de Fourier, 2, 70
- condición de Lipschitz, 19
- conjunto de unicidad, 165
- conjunto medible, 146
- conjuntos de medida nula, 147
- constante de Euler, 136
- convergencia absoluta, 144
- convergencia en media, 51
- convergencia en media cuadrática, 53
- convergencia puntual, 11, 131
- convergencia uniforme, 23, 131
- convolución, 85
- correlación, 85
- criterio de comparación, 128
- criterio de condensación de Cauchy, 128
- criterio de la raíz, 129
- criterio de Leibniz, 130
- criterio del cociente, 129
- criterio M de Weierstrass, 134
- cuerda vibrante, 57

- densidad de probabilidad, 106
- derivación de series de Fourier, 38
- desigualdad de Bessel, 5, 70
- desigualdad de Cauchy-Schwarz, 68
- desigualdad de Hausdorff-Young, 99
- desigualdad de Wirtinger, 63
- desigualdad isoperimétrica, 64
- desviación típica, 106
- difusión del calor, 59

- ecuación de ondas, 58, 113

- ecuación de Schrödinger, 105
- ecuación del calor, 59, 105
- ecuación del potencial, 60, 113
- equidistribución de sucesiones aritméticas, 65
- espacio de Hilbert, 70
- espacios L^p , 151

- fase, 5, 78
- fenómeno de Gibbs, 41, 91
- funciones armónicas, 60
- funciones de Hermite, 99
- función absolutamente continua, 36
- función característica, 106
- función de banda limitada, 108
- función de tiempo limitado, 110
- función de variación acotada, 19
- función escalonada, 142
- función integrable, 148
- función medible, 147
- función simple, 147
- función theta de Jacobi, 113
- fórmula de sumación de Poisson, 104, 119
- fórmula de Wallis, 138

- igualdad de Parseval, 53
- igualdad de Plancherel, 4, 53, 71, 93, 118
- integración de series de Fourier, 35
- integral de Riemann, 141
- integral impropia, 143
- integral inferior, 141
- integral superior, 141
- intervalo de Nyquist, 109
- inversión de la transformada de Fourier, 82

- lema de Fatou, 149
- lema de Riemann-Lebesgue, 13, 79
- localización uniforme, 25
- límite de una sucesión, 125

- límite inferior, 127
 límite puntual, 131
 límite superior, 127
- media, 106
 medida, 146
 medida exterior, 146
 modulación, 78, 116
 método de separación de variables, 57
 módulo de continuidad, 26
- norma, 69
 núcleo de de la Vallée-Poussin, 56
 núcleo de Dirichlet, 11, 83
 núcleo de Fejér, 46, 86
 núcleo de Poisson, 49, 86
 núcleo de sumabilidad, 55, 92
- ortonormalización de Gram-Schmidt, 74
- polinomio trigonométrico, 1
 polinomios de Hermite, 99
 polinomios de Legendre, 75
 principio de incertidumbre, 103
 principio de localización de Riemann, 14
 problema isoperimétrico, 63
 producto escalar, 67
 propiedad de ortogonalidad, 2
- radio de convergencia, 135
 razón de Nyquist, 109
- seno cardinal, 80
 serie absolutamente convergente, 130
 serie alternada, 130
 serie condicionalmente convergente, 130
 serie de Fourier, 3
 serie de Fourier compleja, 6, 9
 serie de Fourier de cosenos, 6
 serie de Fourier de senos, 6
 serie de potencias, 135
 serie de Taylor, 136
 serie de términos positivos, 128
 serie geométrica, 129
 serie trigonométrica, 1
 sistema ortogonal, 69
 sistema ortonormal, 69
 sistema ortonormal completo, 71
 sucesión convergente, 125
 sucesión de Cauchy, 126
 sucesión divergente, 125
 suma de Riemann, 142
 sumabilidad Abel-Poisson, 49, 86
 sumabilidad Cesàro, 45, 86
 sumabilidad de series de Fourier, 45
 sumabilidad de transformadas de Fourier,
- síntesis, 3, 78
- teorema central del límite, 107
 teorema de convergencia dominada, 149
 teorema de convergencia monótona, 149
 teorema de Dini, 18
 teorema de Dirichlet, 16
 teorema de Dirichlet-Jordan, 20
 teorema de Fubini, 150
 teorema de Lipschitz, 19
 teorema de Lusin, 147
 teorema de Pitágoras, 69
 teorema de Riesz-Fischer, 72
 teorema de Shannon, 109
 teorema de Weierstrass, 55
 teorema integral de Fourier, 90
 teoremas del valor medio, 143
 transformada de Fourier, 78
 transformada de Fourier en L^2 , 93
 transformada de Fourier en L^p , 98
 transformada de Fourier en cosenos, 89
 transformada de Fourier en senos, 89
 transformada discreta de Fourier, 115
 transformada rápida de Fourier, 116, 119
- valor principal, 145
 variación total, 20
 varianza, 106