

A.M.II, Grado en Matemáticas, 19/junio/2024, M. Herrer

① Probar que

$\Sigma = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ es numerable } \text{ ó } \mathbb{R} \setminus A \text{ es numerable}\}$
es una σ -álgebra en $\mathbb{R}$.

Encuentra $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. f no es medible respecto de la anterior σ -álgebra.

② Encuentra el valor de

$$\int_0^4 \left[\frac{1}{2} - \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \right]^2 dx$$

③ Sea $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n = \frac{1}{n} \chi_{[n, +\infty)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Demuestra que $f_n \rightarrow 0$ uniformemente en $\mathbb{R}$
y que, sin embargo $\int_{\mathbb{R}} f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comentarios.