

Análisis Matemático II, Grado en Matemáticas, 17/07/2024

① Sea $\mathcal{A}$ una σ -álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$, que contiene todos los intervalos abiertos (tanto acotados como no acotados). Demuestra que $\mathcal{A}$ contiene también todos los intervalos cerrados (acotados o no).

② Sea $E \subset \mathbb{R}^m$. Define, rigurosamente la propiedad $\mu(E) = 0$.
Si $A = \{(x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_i = 0 \text{ para algún } i, 1 \leq i \leq m\}$, demuestra que $\mu(A) = 0$.

③ Considera la sucesión de funciones $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$,
 $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ (1 - e^{-\frac{x^2}{n}}) \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Enuncia y usa el T.C.D. de Lebesgue para probar que
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = 0.$$

④ Enuncia y usa el Teorema de Fubini para calcular

$$\int_E (x^2 + y^2) d(x, y, z), \text{ donde}$$

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 2, |y| \leq \sqrt{4 - x^2}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\}$$