ANÁLISIS CONVEXO Y OPTIMIZACIÓN, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 15/02/2011.

1. Sea $C \subset \mathrm{R}^n$ un subconjunto convexo con interior no vacío. Pruébese que

   (a) La clausura del conjunto C coincide con la clausura del interior de C.

   (b) El interior del conjunto C coincide con el interior de la clausura de C.

   Sugerencia: si es necesario, puede usarse que para cada punto x perteneciente al interior de C y para cada punto y perteneciente a la clausura de C, se tiene que el segmento $[x, y)$ está contenido en el interior de C.

2. Mediante un ejemplo apropiado, pruébese que si $C \subset \mathrm{R}^n$ es no convexo y tiene interior no vacío, entonces las anteriores afirmaciones no son necesariamente ciertas.

3. Sea $C \subset \mathrm{R}^n$ convexo y $f : C \to \mathrm{R}$ una función convexa. Demuéstrese que si $x_0 \in C$ es mínimo local de f en C, entonces x_0 es mínimo global de f en C.

4. Sea $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ una función convexa y continua y $\lambda \in \mathrm{R}$.

   (a) Si $A = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$, $B = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) < \lambda\}$, pruébese que no se cumple necesariamente que $B = int(A)$.

   (b) Pruébese que si B es no vacío, entonces $B = int(A)$.

5. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado real y $C \subset E$ un subconjunto convexo no vacío. Demuéstrese que la aplicación $f : E \to \mathrm{R}$, definida como $f(x) = dist(x, C)$, es convexa.