

ANÁLISIS MATEMÁTICO II, GRADO EN MATEMÁTICAS

Prueba Parcial, 11/Abril/2024

2p. 0'5

① a) Define el concepto de σ -álgebra (en $\mathbb{R}^n$)

0'5

b) Demuestra que $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n) = \{A: A \subset \mathbb{R}^n\}$ es una σ -álgebra.

0'5

c) Prueba que si $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, B no es necesariamente una σ -álgebra.

0'5

d) Prueba que si $B \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, existe alguna σ -álgebra $\mathcal{A}$, cumpliendo

d.1) $B \subset \mathcal{A}$.

d.2) si $B \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ σ -álgebra, entonces $\mathcal{A} \subset \mathcal{G}$

2p.

② ¿Es verdadera o falsa la afirmación siguiente?

$A \subset \mathbb{R}$, $\mu(A) > 0 \Rightarrow \exists I$, intervalo no trivial t.q. $I \subset A$.

3p.

③ Sean p, q dos polinomios distintos y $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} p(x), & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ q(x), & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$

Prueba que $f \notin R[0,1]$.

3p.

④ Sea C el conjunto de Cantor y $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in C \\ \sin(x), & x \in [0,1] \setminus C \end{cases}$

Demuestra que $f \in L^1(0,1)$ y calcula $\int_0^1 f(x) dx$.