ANÁLISIS CONVEXO Y OPTIMIZACIÓN, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen para subir nota, 03/02/2012.

1. Sean Ω un subconjunto abierto de R^n, C un subconjunto convexo de Ω, $f : \Omega \to \mathrm{R}$ derivable y $u_0 \in C$.

   Se dice que u_0 es un punto de mínimo local de f, relativo a C, sii existe alguna bola abierta centrada en u_0 y de radio $\delta > 0$, $B(u_0;\delta)$, tal que

   $$f(v) \geq f(u_0),\ \forall\ v \in B(u_0;\delta) \cap C. \tag{1}$$

   (a) Póngase algún ejemplo para mostrar que (1) no implica necesariamente que $f'(u_0) = 0$.

   (b) Demuéstrese que (1) implica

   $$f'(u_0)(v - u_0) = \langle \nabla f(u_0), v - u_0 \rangle \geq 0,\ \forall\ v \in C. \tag{2}$$

   (c) Demuéstrese que, si además, C es un subespacio vectorial, entonces

   $$f'(u_0)(w) = 0,\ \forall\ w \in C. \tag{3}$$

   (d) Demuéstrese que si $\Omega = C$ y f es convexa, entonces (2) es no sólo necesario, sino también suficiente para que u_0 sea un punto de mínimo global de f en C.

2. Sean A una matriz $n \times n$, simétrica real y $b \in \mathrm{R}^n$. Consideremos el funcional cuadrático

   $$J : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R},\ J(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v\rangle - \langle b, v\rangle,\ \forall\ v \in \mathrm{R}^n.$$

   (a) Demuéstrese que $\exists u \in \mathrm{R}^n$ verificando $J(u) < J(v),\ \forall\ v \in \mathrm{R}^n \setminus \{0\}$ sii A es definida positiva.

   (b) Demuéstrese que $\exists u \in \mathrm{R}^n$ verificando $J(u) \leq J(v),\ \forall\ v \in \mathrm{R}^n$ sii A es semidefinida positiva y el conjunto $\{w \in \mathrm{R}^n : Aw = b\}$ es no vacío.

   (c) Si A es semidefinida positiva y el conjunto $\{w \in \mathrm{R}^n : Aw = b\}$ es vacío, entonces $\inf_{\mathrm{R}^n} J = -\infty$.

   (d) Si $\inf_{\mathrm{R}^n} J \in \mathrm{R}$, entonces A es semidefinida positiva y el conjunto $\{w \in \mathrm{R}^n : Aw = b\}$ es no vacío.

3. Sea $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ una función convexa (por lo tanto continua) y $\lambda \in \mathrm{R}$.

   (a) Si $A = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) \leq \lambda\},\ B = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) < \lambda\}$, pruébese que no se cumple necesariamente que $B = int(A)$.

   (b) Pruébese que si B es no vacío, entonces $B = int(A)$.

   (c) ¿Es cierto el resultado del apartado anterior para funciones $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ continuas, no necesariamente convexas?