ANÁLISIS CONVEXO Y OPTIMIZACIÓN, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 03/02/2012.

1. Sea $C \subset \mathrm{R}^n$ convexo y $f : C \to \mathrm{R}$ una función convexa. Demuéstrese que si $x_0 \in C$ es mínimo local de f en C, entonces x_0 es mínimo global de f en C.

2. Sea $\Gamma \subset \mathrm{R}^n$ y $x \in conv(\Gamma)$. Demuéstrese que x puede escribirse como combinación lineal convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos de Γ (Teorema de Caratheodory).

3. Sea C un subconjunto de R^n, abierto y convexo y $f : C \to \mathrm{R}$, derivable. Demuéstrese que son equivalentes:

   (a) f es una función convexa en C.

   (b)
   $$f(u) - f(v) \geq \langle \nabla f(v), u - v \rangle, \ \forall\ u, v \in C.$$

   (c)
   $$\langle \nabla f(u) - \nabla f(v), u - v \rangle \geq 0, \ \forall\ u, v \in C.$$

4. Sea $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ una función convexa (por lo tanto continua) y $\lambda \in \mathrm{R}$.

   (a) Si $A = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) \leq \lambda\}$, $B = \{x \in \mathrm{R}^n : f(x) < \lambda\}$, pruébese que no se cumple necesariamente que $B = int(A)$.

   (b) Pruébese que si B es no vacío, entonces $B = int(A)$.

   (c) ¿Es cierto el resultado del apartado anterior para funciones $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ continuas, no necesariamente convexas?