UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Facultad de Ciencias

Grado en Matemáticas

TRABAJO DE FIN DE GRADO

# DIMENSIÓN FINITA - DIMENSIÓN INFINITA: UN ESTUDIO COMPARATIVO DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

Presentado por:
VÍCTOR MANUEL LÓPEZ DE LA PAZ

Tutor:
ANTONIO CAÑADA VILLAR
*Departamento de Análisis Matemático*

Curso académico 2022-2023

# DIMENSIÓN FINITA - DIMENSIÓN INFINITA: UN ESTUDIO COMPARATIVO DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

VÍCTOR MANUEL LÓPEZ DE LA PAZ

VÍCTOR MANUEL LÓPEZ DE LA PAZ

*DIMENSIÓN FINITA - DIMENSIÓN INFINITA: UN ESTUDIO COMPARATIVO DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL ANÁLISIS FUNCIONAL*.

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2022-2023.

**Responsable de tutorización**

ANTONIO CAÑADA VILLAR
*Departamento de Análisis Matemático*

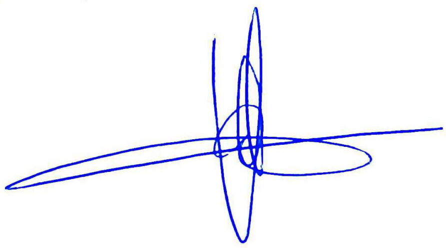
Grado en Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Granada

Declaración de originalidad

D. VÍCTOR MANUEL LÓPEZ DE LA PAZ

DECLARO explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, en el sentido de que no se han utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada, a 10 de julio de 2023



Fdo: VÍCTOR MANUEL LÓPEZ DE LA PAZ

# Índice general

**Summary** ix

**Introducción** xii

**1 Origen de los espacios vectoriales de dimensión infinita. Bases algebraicas.** 1

1.1 Origen histórico del concepto de infinito y de los espacios vectoriales de dimensión infinita. . . . . . . 1

1.2 Preliminares. . . . . . . 3

1.3 Ejemplos de bases algebraicas. . . . . . . 5

**2 Diferencias fundamentales en espacios normados. Bases Hilbertianas.** 9

2.1 Espacios normados de dimensión infinita. . . . . . . 9

2.2 Diferencias topológicas fundamentales con los espacios normados de dimensión finita. . . . . . . 13

2.3 Implicaciones del Teorema de Baire. . . . . . . 25

2.4 Bases Hilbertianas. . . . . . . 30

2.4.1 Entendiendo la necesidad e importancia de las bases Hilbertianas. . . 31

2.4.2 Existencia y ejemplos de bases Hilbertianas. . . . . . . 33

**3 Aplicaciones: Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales.** 44

3.1 Propagación del calor: problema con extremos de la varilla a $0^{\circ}$ centígrados. . 45

3.2 Propagación del calor: problema con extremos de la varilla aislados. . . . . . 52

**Bibliografía** 57

# Summary

In this Final Degree Project, entitled Finite-Infinite Dimensions: a comparative analysis from the point of view of functional analysis, the covered topics and main objectives to achieve, in accordance with the original proposal, have been:

- Examples of some vector spaces of infinite dimension, as opposed to some others of finite dimension, and presentation of the concept of algebraic basis for these spaces.
- Presentation of some of the fundamental differences between normed spaces of infinite dimension and those of finite dimension, and presentation of the concept of Hilbertian basis.
- Application of the Hilbertian basis concept to the solution of a classic problem of equations in partial derivatives: the mixed problem for the heat equation.

With this purpose, the work will be divided into three chapters dedicated, respectively, to each one of these points.

Next, we will give a somewhat more detailed description of what we will find and of the corresponding chapters.

### Chapter 1.

This first chapter, mainly based on texts such as [11], [12], [1], [9] and [7], begins with a short historical introduction about the concept of infinity which has been so present in the mathematician's mind for centuries. It is then when, after some necessary preliminaries, we present the concept of algebraic basis that will allow us to talk about the concept of dimension of a vector space with which to be able to put our first examples of vector spaces of infinite dimension in opposition to some other already known examples of finite-dimensional vector spaces.

### Chapter 2.

In this chapter, with the help of [4], [19], [15], [10], [1] and [14] our main objective will be, once the vector spaces of infinite dimension have been presented in the previous chapter, to present the concept of norm (and therefore of normed space) in order to, through normed spaces, begin to collect some of the many and fundamental

differences between finite-dimensional and infinite-dimensional normed spaces.

The differences that we will show will be multiple. We will start with a first difference that emphazises the value of the concept of norm, characterizing the finiteness of the dimension of the normed space using the behavior of its norm. More precisely, we will prove that all norms being equivalent in a normed space is something that characterizes finite dimension normed spaces. Then we will go through the Banach spaces, where it will be clear that if the normed space is of finite dimension, it will be a Banach space while for the case of infinite dimension we will present examples in which this does not necessarily have to be true. Also along this line, we will prove that every finite-dimensional subspace in a normed space is closed, while if the subspace has infinite dimension this can not be true. Later, and entering in a more topological point (thanks to the metric that derives from the norm we can see our normed space as a metric one), we will present the concept of compactness, which thanks to classical results such as the *Heine-Borel's Theorem* and certain characterizations of the concept of compactness will allow us to arrive at *Riesz's Theorem*, which will be neither more nor less than another elegant characterization of the finiteness or not of the dimension of a normed space through the compactness of the closed unit ball. In addition, from this theorem we will extract a corollary that will tell us about the interior of compact subsets in infinite-dimensional spaces, which, as we will see, will mark one more difference with finite-dimensional normed spaces.

Finally, in this chapter we will also introduce ourselves to Hilbert spaces, where with the help of texts such as [3], [6] and [7] we will start with a brief historical motivation that will make us understand the need of defining a new concept of base with some specific properties (Hilbertian bases). Then, keeping in mind some classical results of Hilbert spaces such as the *Orthogonal Projection Theorem*, we will be able to prove that with a simple hypothesis on the given Hilbert space we can ensure the existence of these Hilbertian bases. In addition, we will give some examples of Hilbertian bases that we will use later in the next chapter dedicated to applications.

### Chapter 3.

In this last chapter, using information extracted from books such as [17], [4] and [18], what it is sought is for the reader to end up to understand the concept of the Hilbertian base and, above all, to understand its practical utility. With this objective, we will present a problem studied by Fourier in the XIX century (the mixed problem for the heat equation for some given initial conditions) which will make it clear that solving this problem is closely linked to obtaining an appropriated Hilbertian base for the space of functions $L^2$. More specifically, we will present two variants of this mixed problem and we will see that the resolution of each of them is possible thanks to precisely the two examples of Hilbertian bases given in the previous chapter,

making the utility of this concept more than clear.

To conclude, with these threes chapters, I strongly believe that thanks to my tutor Antonio Cañada and the mentioned bibliography, the objectives proposed above have been successfully achieved.

# Introducción

En este Trabajo fin de grado, llamado Dimensión finita-Dimensión infinita: un análisis comparativo desde el punto de vista del análisis funcional, los temas tratados y al mismo tiempo principales objetivos, de acuerdo con la propuesta original, han sido los siguientes:

- Ejemplos de algunos espacios vectoriales de dimensión infinita, en contraposición con algunos otros de dimensión finita, y presentación y discusión del concepto de base algebraica para estos espacios.
- Exposición de algunas de las diferencias topológicas fundamentales entre espacios normados de dimensión infinita y de dimensión finita, y presentación del concepto de base Hilbertiana.
- Aplicación del concepto de base Hilbertiana a la solución de un problema clásico de ecuaciones en derivadas parciales: el problema mixto para la ecuación del calor.

Con este propósito, el trabajo será dividido en tres capítulos donde cada uno de ellos será dedicado a cada uno de estos puntos.

A continuación daremos una descripción algo más detallada de lo que encontraremos y lo que tendremos por objetivo en cada uno de los capítulos.

**Capítulo 1.**

Este primer capítulo, elaborado principalmente con la ayuda de textos como [11], [12], [1], [9] y [7], comienza con una pequeña introducción histórica donde conseguimos empaparnos del concepto de infinito que tan presente ha estado desde hace siglos en la mente del matemático. Es entonces cuando, tras unos preliminares necesarios, presentamos el concepto de base algebraica que nos permitirá hablar del concepto de dimensión de un espacio vectorial con el que así poder poner nuestros primeros ejemplos de espacios vectoriales de dimensión infinita en contraposición con algunos otros ejemplos ya conocidos de espacios vectoriales de dimensión finita.

**Capítulo 2.**

En este capítulo, con la ayuda de [4], [19], [15], [10], [1] y [14], nuestro objetivo principal será el de, una vez ya presentados los espacios vectoriales de dimensión infinita en el capítulo anterior, presentar el concepto de norma (y por tanto de espacio normado) para, a través de los espacios normados, comenzar a recopilar algunas de las muchas y fundamentales diferencias existentes entre los espacios normados de dimensión finita y los de dimensión infinita.

Las diferencias que probaremos serán múltiples. Comenzaremos con una primera diferencia que ponga en valor el concepto de norma y que nos caracterizará ya desde dicho momento la finitud o no de un espacio normado a través del comportamiento de su norma; más concretamente, probaremos que el hecho de que todas las normas sean equivalentes o no en un espacio normado caracteriza, de hecho, si la dimensión del espacio normado es finita o infinita, respectivamente. Después pasaremos por los espacios de Banach, donde quedará de manifiesto que si el espacio normado es de dimensión finita, éste será de Banach mientras que para el caso de la dimensión infinita presentaremos ejemplos en los que esto no ha de ser necesariamente cierto. También en esta línea, demostraremos que todo subespacio de dimensión finita en un espacio normado es cerrado necesariamente, mientras que si el subespacio tiene dimensión infinita esto no ha de ser cierto. Más tarde, y entrando en un terreno más topológico (gracias a la métrica que deriva de la norma podemos ver a nuestro espacio normado como uno métrico), presentaremos el concepto de compacidad, que gracias a resultados clásicos como el *Teorema de Heine-Borel* y ciertas caracterizaciones del concepto de compacidad, nos permitirán llegar en primer lugar al *Teorema de Riesz*, que no será ni más ni menos que una elegante caracterización más de la finitud o no de la dimensión de un espacio normado a través de la compacidad de la bola unidad cerrada. Además, de este teorema extraeremos un corolario que nos hablará del interior de los subconjuntos compactos en espacios de dimensión infinita, que como veremos marcará una diferencia más con los espacios normados de dimensión finita.

Por último, en este capítulo nos introduciremos también en los espacios de Hilbert, donde con ayuda de textos como [3], [6] y [7], comenzaremos con una breve motivación histórica que nos hará entender la necesidad por definir un nuevo concepto de base con algunas propiedades en específico: las bases Hilbertianas. Después, teniendo en mente algunos resultados clásicos de espacios de Hilbert como el *Teorema de la Proyección Ortogonal*, lograremos demostrar que con una simple hipótesis adicional sobre el espacio de Hilbert dado, podremos asegurar la existencia de estas bases Hilbertianas. Además, daremos algunos ejemplos de bases Hilbertianas que nos servirán en el siguiente capítulo dedicado a las aplicaciones.

**Capítulo 3.**

En este último capítulo, usando principalmente información extraida de [17], [4] y [18], lo que se busca es que el lector acabe por interiorizar el concepto de base Hilbertiana y sobre todo que entienda su utilidad práctica. Con este objetivo, presentaremos un problema estudiado por Fourier en el siglo XIX (el problema mixto para la ecuación del calor para unas condiciones iniciales dadas) con el que quedará de manifiesto que la resolución de este problema está íntimamente ligada con la obtención de una base Hilbertiana adecuada para el espacio de funciones $L^2$. De forma más concreta, presentaremos dos variantes de este problema mixto y veremos que la resolución de cada uno de ellos es posible gracias a justamente los dos ejemplos de bases Hilbertianas dados en el capítulo 2, quedando así más que claro la practicidad de este concepto.

Para concluir, mediante la confección de estos tres capítulos y gracias a la imprescindible ayuda otorgada por mi tutor Antonio Cañada junto con la bibliografía citada, creo que los objetivos de este trabajo pueden considerarse satisfechos.

# Capítulo 1

# Origen de los espacios vectoriales de dimensión infinita. Bases algebraicas.

## 1.1 Origen histórico del concepto de infinito y de los espacios vectoriales de dimensión infinita.

Si uno busca la definición de *infinito* en la RAE, obtiene el siguiente resultado:

1. *adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.*
2. *adj. Muy numeroso o enorme.*
3. *m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad.*
4. *m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.*
5. *m. Mat. Valor mayor que cualquier cantidad asignable.*
6. *m. Mat. Signo (∞) con que se expresa ese valor.*
7. *adv. m. Excesivamente, muchísimo.*

Pero es probable que aquel que sienta la suficiente intriga por este concepto no quede satisfecho con ella pues, aunque precisa, es una definición que no refleja la profundidad detrás de este concepto que atrapa al mínimamente curioso desde decenas de siglos atrás.

Por citar a algunos de estos curiosos, ya en la Grecia Clásica, el filósofo Zenón de

Elea, con sus paradojas como la de Aquiles y la tortuga, planteaba cuestionamientos metafísicos sobre la relación entre lo finito y lo infinito. También Aristóteles junto con la escuela socrática, amantes del orden y la perfección, veían en el infinito la idea negativa de desorden, de caos, de imperfección, etc., hasta el punto de que filósofos y matemáticos posteriores como Euclides evitaban la palabra "infinito", reemplazándola por expresiones del tipo "lo que no tiene fin" o "una cantidad mayor que cualquier otra dada".

Años más tarde, y con una perspectiva cada vez más matemática, Arquímedes también trabajó sobre dicho concepto, existiendo documentos suyos en los que él ya hablaba de sumas infinitas y de algo parecido a lo que hoy entendemos por convergencia. No obstante, no sería hasta los siglos XVIII y XIX que este concepto empezaría a volverse cotidiano entre los matemáticos. Hasta entonces, en álgebra lineal se acostumbraba a trabajar en la mayoría de casos con sistemas con tantas ecuaciones como incógnitas, que resolvemos con la fórmula de Cramer cuando el determinante del sistema era distinto de 0. Pero fue justo cuando Fourier comenzó su desarrollo de la teoría del calor que las Matemáticas tuvieron que enfrentarse de forma clara con el infinito.

Más concretamente, Fourier trataba de determinar una secuencia infinita, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, de coeficientes tal que

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(2n-1)y.$$

La idea de Fourier fue derivar infinitas veces a ambos lados de la expresión para así obtener algo parecido a un sistema de ecuaciones (infinitas de ellas, de hecho) con el que determinar dichos coeficientes. Procedió mediante la resolución de las $k$ primeras ecuaciones con la fórmula de Cramer y la fórmula de Vandermonde y, haciendo tender a infinito la $k$, acabó intuyendo la forma general de dichos coeficientes $a_n$, (aunque no fue muy bien visto por el resto de la comunidad matemática por su falta de rigor). Véase [5, pág. 125-148] para más detalles.

Paralelamente, cada vez más matemáticos investigaron sobre el infinito, destacando así el trabajo de Cantor. Éste no sólo sentó las bases de lo que aún hoy en día tenemos para enfrentarnos a la incertidumbre de lo infinito, sino que demostró que no todos los infinitos eran iguales, habiendo así conjuntos infinitos "mucho más grandes" que otros que ya de por sí eran infinitos: lo que hoy conocemos como infinito numerable e infinito no numerable. Un ejemplo de infinto numerable serían los números naturales y un ejemplo de infinito no numerable serían los numeros reales. Todos estos avances hicieron que, al mismo tiempo, los matemáticos (quienes ya empezaban a hablar con rigor del concepto de espacio vectorial gracias a Giuseppe Peano) fuesen poniendo el foco también en los espacios vectoriales de dimensión infinita. ¿Cómo son estos espacios?, ¿qué similitudes guardarán estos con los de dimensión finita?, ¿y diferencias? Tuvieron que pasar cientos de años hasta que se pudo responder con propiedad a estas preguntas, y de este modo, este trabajo pretende también responder a ellas. No obstante, para que todo esto sea posible, unos preliminares necesarios para entender el marco en el que nos moveremos.

## 1.2 Preliminares.

Comenzaremos con algunos conceptos previos extraídos de [7], [8] y de [16].

**Definición 1.** Sea $X$ un conjunto y $\preccurlyeq$ una relación binaria definida en $X$. Decimos que $\preccurlyeq$ es una relación de orden si cumple:

1. *(Propiedad reflexiva).*
$$\forall x \in X, \quad x \preccurlyeq x.$$

2. *(Propiedad antisimétrica).*
$$\forall x, y \in X, \quad x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq x \Longrightarrow x = y.$$

3. *(Propiedad transitiva).*
$$\forall x, y, z \in X, \quad x \preccurlyeq y, y \preccurlyeq z \Longrightarrow x \preccurlyeq z.$$

Además, al par $(X, \preccurlyeq)$ lo denominaremos **conjunto parcialmente ordenado**.

**Definición 2.** Sea $(X, \preccurlyeq)$ un conjunto ordenado. Definimos los siguientes tres conceptos:

- Un subconjunto $A$ de $X$ es una **cadena** si para cualesquiera dos elementos $x, y \in Y$, ocurre que $x \preccurlyeq y$ o que $y \preccurlyeq x$.
- Un subconjunto $A$ de $X$ se dice **superiormente acotado** si existe $x \in X$ tal que $y \preccurlyeq x$ para todo $y \in A$.
- Un elemento $x \in X$ se dice **maximal** si para todo $y \in X$ se tiene que
$$x \preccurlyeq y \Longrightarrow x = y.$$

**Lema 1.** ***(Lema de Zorn).*** *Todo conjunto no vacío parcialmente ordenado en el que toda* *cadena está superiormente acotada, tiene al menos un elemento maximal.*

**Definición 3. (Espacio vectorial).**
Un **espacio vectorial**, $V$, sobre un cuerpo $K$, es un conjunto no vacío que cuenta con dos operaciones que cumplen ciertas propiedades. En primer lugar, una operación cerrada que cumple:

$$\begin{aligned} + :& V \times V \longrightarrow V \\ &(u, v) \longmapsto u + v \end{aligned}$$

1. *Propiedad conmutativa.*

$$u + v = v + u, \quad \forall u, v \in V.$$

2. *Propiedad asociativa.*

$$u + (v + w) = (u + v) + w, \quad \forall u, v, w \in V.$$

3. *Existencia de elemento neutro.*

$$\exists e \in V : u + e = u, \quad \forall u \in V.$$

4. *Existencia de elemento opuesto.*

$$\forall u \in V, \exists - u \in V : u + (-u) = e.$$

En segundo lugar, una operación producto por escalar que cumple:

$$\begin{aligned} \cdot :& K \times V \longrightarrow V \\ &(a, u) \longmapsto a \cdot u \end{aligned}$$

1. *Propiedad pseudoasociativa.*

$$a \cdot (b \cdot u) = (ab) \cdot u, \quad \forall a, b \in K, \forall u \in V.$$

2. *Elemento neutro.*

$$\exists e \in K : e \cdot u = u, \quad \forall u \in V.$$

3. *Propiedad distributiva respecto la suma vectorial.*

$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v, \quad \forall a \in K, \forall u, v \in V.$$

4. *Propiedad distributiva respecto la suma escalar.*

$$(a+b)\cdot u = a\cdot u + b\cdot u, \quad \forall a,b\in K, \forall u\in V.$$

## 1.3 Ejemplos de bases algebraicas.

Tras estos preliminares, comenzaremos con el estudio de los espacios vectoriales de dimensión infinita de los que hablamos antes, para lo que es necesario presentar varias conceptos (entre ellos el de base algebraica) extraídos de [11] y [2].

*Nota* 1. Cabe destacar que aunque resultados análogos podrían demostrarse para el caso complejo, por un ahorro de notación, de ahora en adelante, cuando hablemos de un espacio vectorial, $V$, estaremos haciendo referencia a un espacio vectorial real.

**Definición 4. (Dependencia e independencia lineal).**

Dado un espacio vectorial $V$, un conjunto finito $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subset V$ decimos que es **linealmente independiente** si la ecuación:

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0, \quad a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R},$$

únicamente se satisface cuando

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

Además, si el conjunto a considerar no es necesariamente finito, diremos que es **linealmente independiente** cuando cualquier subconjunto finito del mismo lo sea.

En caso contrario, se dice que el conjunto es **linealmente dependiente**.

**Definición 5. (Sistema generador).**

Dado un espacio vectorial $V$, un subconjunto $A \subset V$ es **sistema generador de** $V$ cuando todo elemento en $V$ puede expresarse como combinación lineal finita de elementos de $A$.

Esto es, para todo $v \in V$, $\exists\ a_1, a_2, \dots, a_n \in A$, $\exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \cdots + \lambda_na_n.$$

**Definición 6. (Base algebraica).**

Dado un espacio vectorial $V$, una **base algebraica**, $\mathcal{B}$, es un subconjunto de $V$ que cumple:

1. $\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente.
2. $\mathcal{B}$ es un sistema generador de $V$.

Además, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.** *Dado un espacio vectorial $V$, y $\mathcal{B}$ un subconjunto en $V$, equivalen:*

- *$\mathcal{B}$ es una base algebraica de $V$.*
- *$\mathcal{B}$ es un conjunto linealmente independiente maximal.*

*Demostración.* Consultar [2]. □

Notemos también que en un espacio vectorial podemos encontrar multitud de bases algebraicas distintas. Sin embargo, el número de elementos de las bases (o cardinal de dichos conjuntos) es el mismo. En efecto, tenemos la siguiente proposición.

**Proposición 2.** *Dado un espacio vectorial $V$, sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ dos bases algebraicas. Entonces,*

$$card(\mathcal{B}) = card(\mathcal{B}').$$

*Demostración.* Para el caso en que alguna de las bases tiene cardinal finito consultar [11, pág.78], y para el caso de que ninguna de las dos bases tenga cardinal finito consultar [12]. □

Lo que motiva la siguiente definición:

**Definición 7.** Dado un espacio vectorial $V$, llamamos **dimensión de** $V$, $dim(V)$, al cardinal de cualquier base algebraica.

Asimismo, diremos que $V$ es un **espacio vectorial de dimensión finita** cuando $dim(V) = n$, mientras que diremos que $V$ es un **espacio vectorial de dimensión infinita** cuando $dim(V) = \infty$.

En este punto ya entendemos qué significa que un espacio vectorial sea de dimensión finita o infinita, pero para poder hablar de dimensión en cualquier espacio vectorial presentamos el siguiente resultado.

**Teorema 1.** *Todo espacio vectorial real posee una base algebraica.*

*Demostración.* Haciendo uso del *Lema de Zorn* (Lema (1)) y de la Proposición (1) se demuestra el resultado. Consultar [16] para más detalles. □

Por tanto, gracias al *Lema de Zorn* tiene sentido que cada vez que nos encontremos con un espacio vectorial nos hagamos la pregunta de qué dimensión tiene. O si es de dimensión finita o infinita, que como el título de este trabajo adelanta, será un prisma habitual desde el que se visualizarán distintos espacios vectoriales en este trabajo.

Presentamos a continuación algunos ejemplos representativos de espacios vectoriales de dimensiones finita e infinita.

**Ejemplo 1.** Tomemos $V = \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{R}$.

Este constituye el ejemplo más trivial de espacio vectorial de dimensión $n$, pues una base algebraica de este espacio es:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),\dots,(0,0,\dots,1)\}.$$

**Ejemplo 2.** Tomemos $V = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales.

Estamos frente a nuestro primer ejemplo de espacio vectorial de dimensión infinita. En efecto, para probar esto basta con encontrar una base algebraica infinita como es:

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}.$$

Ahora bien, viendo dicha base podemos decir incluso algo más: es un espacio vectorial de dimensión infinita numerable.

**Ejemplo 3.** Tomemos $V = \mathbb{R}^\infty$, el espacio vectorial de todas las sucesiones reales,

$$\mathbb{R}^\infty = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots) : \alpha_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}.$$

La estrategia de demostrar que es un espacio de dimensión infinita dando una base algebraica infinita no parece la mejor, pues parece complicado dar con un conjunto con el que expresar cualquier elemento de $\mathbb{R}^\infty$ mediante combinación lineal finita. La estretegia que escogeremos será otra.

En efecto, con el conjunto siguiente:

$$\begin{cases} e_1 = (1,0,0,0\dots), \\ e_2 = (0,1,0,0\dots), \\ \dots \\ e_n = (\underbrace{0,\dots,0,1}_{n},0,\dots), \\ \dots \end{cases}$$

tenemos un conjunto linealmente independiente formado por infinitos elementos, lo que nos asegura gracias a la Proposición (1), que la base algebraica de este espacio, sea como sea, tendrá infinitos elementos también.

Un razonamiento análogo nos dice también que los espacios vectoriales $l_p, 1 \leq p < \infty$, donde

$$l_p = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\},$$

$$l_\infty = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada} \right\},$$

y los espacios vectoriales $c$, de las sucesiones convergentes, $c_0$, de las sucesiones convergentes a 0, y $c_{00}$, de las sucesiones cuyos términos son todos nulos salvo un número finito, son también espacios vectoriales de dimensión infinita.

**Ejemplo 4.** Tomemos $V = L^p(a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$, donde

$$L^p(a,b) = \left\{ x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \textit{ es medible }, \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\}.$$

Al igual que en el caso anterior, encontrando un subconjunto infinito linealmente independiente como lo es $\{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$, demostramos que se trata de un espacio vectorial de dimensión infinita.

**Ejemplo 5.** Tomemos $V = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, el espacio vectorial de las funciones continuas definidas en $[0,1]$ y valores reales.

Pues bien, aún no estamos preparados para demostrarlo, pues necesitamos el *Teorema de Categoría de Baire*, pero más tarde se demostrará que este espacio vectorial es un espacio de dimensión infinita no numerable. Esto es, las bases algebraicas no tendrán el aspecto que tuvo la base del anterior ejemplo, sino que más bien serán algo así:

$$\mathcal{B} = \{v_\lambda : \lambda \in \Lambda\}.$$

# Capítulo 2

# Diferencias fundamentales en espacios normados. Bases Hilbertianas.

## 2.1 Espacios normados de dimensión infinita.

En esta sección, después de haber presentado los fundamentales conceptos de base algebraica, de dimensión y de haber mostrado los primeros ejemplos de espacios vectoriales de dimensión infinita en contraposición con algunos de dimensión finita, iremos un paso más alla e introduciremos los espacios normados y los espacios métricos para seguir avanzando desde esa perspectiva.

Dicho esto,

**Definición 8.** Dado $X$ un espacio vectorial, una **norma** en $X$ es una aplicación

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \ X &\longrightarrow [0,+\infty) \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

que satisface:

1. $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X \quad \text{y} \quad \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in X.$
3. *(Desigualdad Triangular)*

   $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X.$

En tal caso, al par $(X, \|\cdot\|)$ lo denominaremos **espacio normado**.

**Definición 9.** Sea $X$ un conjunto. Una **métrica** o **distancia** en $X$ es una aplicación $d : X \times X \longrightarrow [0,+\infty)$, que satisface:

1. $d(x,y) \geq 0, \quad d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y, \quad \forall x, y \in X.$

2. $d(x,y) = d(y,x), \quad \forall x, y \in X.$
3. *(Desigualdad Triangular)*

   $$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \quad \forall x, y, z \in X.$$

En tal caso, al par $(X,d)$ lo denominaremos **espacio métrico**.

*Observación 1.* Cabe destacar que siempre que contemos con un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, podemos definir una distancia o métrica, inducida a través de la norma, del siguiente modo:

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow [0, +\infty) \\ (x,y) &\longmapsto d(x,y) = \|x-y\|, \end{aligned}$$

con lo cual, teniendo un espacio normado, podemos considerar también el espacio métrico $(X,d)$. Este hecho, lejos de ser trivial, nos dará mucho juego. Pues, al tener ya una distancia, nos permitirá hablar de topología en espacios normados. Tema que nos ocupará en lo que sigue.

No obstante, si por la cabeza del lector pasa la pregunta de si el recíproco es cierto, esto es, ¿ocurrirá que toda distancia proviene de una norma?, puede consultarse [7] para encontrar un ejemplo donde esto no se cumple.

Presentaremos a continuación ejemplos fundamentales de espacios normados.

**Ejemplo 1.** En el espacio vectorial de dimensión n, $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, podemos definir las siguientes normas:

- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$,
- $\|x\|_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \ p \geq 1,$

para todo $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Entonces, $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathbb{R}, \|\cdot\|_p)$, $p \geq 1$, son espacios normados de dimensión finita.

**Ejemplo 2.** En el espacio vectorial de dimensión infinita $\mathcal{C}([0,1]\mathbb{R})$, podemos definir las siguientes normas:

- $\|x\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$,
- $\|x\|_p = \left( \int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \ p \geq 1,$

para todo $x(t) \in \mathcal{C}([0,1]\mathbb{R})$.

Entonces, $(\mathcal{C}([0,1]\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ y $(\mathcal{C}([0,1]\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ son espacios normados de dimensión infinita.

**Ejemplo 3.** En el espacio vectorial de dimensión infinita $l_p$, con $1 \leq p < \infty$,

$$l_p = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\},$$

podemos definir la siguiente norma:

$$\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_p = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}.$$

Por tanto, $(l_p, \|\cdot\|_p)$, $1 \leq p < \infty$, es un espacio normado de dimensión infinita.

Análogamente, $(l_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ con

$$l_\infty = \left\{ \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada} \right\},$$

y la norma

$$\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|,$$

es también un espacio normado de dimensión infinita.

**Ejemplo 4.** En el espacio vectorial de dimensión infinita $L^p(a,b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, donde

$$L^p(a,b) = \left\{ x : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} : x \textit{ es medible }, \int_a^b |x(t)|^p dt < \infty \right\},$$

se puede definir la norma

$$\|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p \right)^{1/p},$$

para todo $x \in L^p(a,b)$. (Ver [3, pág. 93]).

Entonces, $(L^p(a,b), \|\cdot\|_p)$, $p \in \mathbb{N}$, es un espacio normado de dimensión infinita.

*Observación* 2. Tras estos ejemplos, ha quedado claro que en un mismo espacio normado pueden definirse distintas normas. No obstante, también es fácil intuir que habrá normas que induzcan la misma topología (podemos hablar de ella gracias a la distancia inducida por la norma). Por ejemplo, si tenemos $X$ un espacio vectorial junto con una norma $\|\cdot\|$ arbitraria, si consideramos la aplicación $|||\cdot||| = 2\|\cdot\|$ también será una norma, pero efectivamente inducirá la misma topología.

Cuando ocurra esto, diremos que las dos normas son equivalentes. Sobre este tema profundizaremos en el siguiente punto.

## 2.2 Diferencias topológicas fundamentales con los espacios normados de dimensión finita.

Ahora que hemos presentado a los espacios normados de dimensión infinita, lo que haremos será una recopilación de algunas diferencias fundamentales entre los espacios normados de dimensión finita y los de dimensión infinita.

1. **Equivalencia de normas.**

   En primer lugar, ya que hablamos de espacios normados, con qué mejor diferencia empezar que con una que pondrá en valor, más si cabe, el concepto de norma. En efecto, obtendremos un resultado que caracteriza si un espacio normado es de dimensión finita o infinita a través del comportamiento que tienen entre sí las posibles normas que uno puede definir en dicho espacio.

   Pero antes de ir con el resultado, demos rigor a este concepto de normas equivalentes del que llevamos ya hablando un rato.

   **Definición 10. (Normas equivalentes).**

   Sea $X$ un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas definidas en él. Decimos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son **equivalentes** cuando:

   $$\exists\; m, M > 0, \text{ tal que } m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \text{ para todo } x \in X.$$

   Ahora sí, presentamos el resultado.

   **Teorema 2.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces,*

   $$X \textit{ es de dimensión finita} \iff \textit{Todas las normas son equivalentes en } X.$$

   *Demostración.*
   $\boxed{\Longrightarrow}$
   Supongamos que $X$ es de dimensión finita.
   Así, consideremos $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ una base de $X$, que fijamos. De modo que dado un $x \in X$, éste puede expresarse $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots x_ne_n$ de manera única.

   La estrategia será demostrar que cualquier norma arbitraria, $\|\cdot\|$, es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$, que recordamos que se define como sigue:

   $$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X.$$

Dicho esto, usando la desigualdad triangular que ha de cumplir $\|\cdot\|$ y la definición que acabamos de dar,

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \|e_i\| \leq \|x\|_1 \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|.$$

De modo que definiendo $M := \max_{1 \leq i \leq n} \|e_i\|$ llegamos a que:

$$\|x\| \leq M\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Por otro lado, considero el conjunto siguiente:

$$S = \{x \in X : \|x\|_1 = 1\},$$

conocido como la esfera unidad para la norma $\|\cdot\|_1$ y que, por el *Teorema de Heine-Borel* (lo veremos más adelante en el Teorema (4)), es compacto por ser cerrado y acotado en X, un espacio de dimensión finita.

Ahora, el hecho de que $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ sea una norma nos dice, en particular, que es una aplicación continua. Luego, podemos asegurar que la norma $\|\cdot\|$ alcanza un mínimo en $S$. Esto es,

$$\exists x_0 \in S, \text{ tal que } \|x_0\| \leq \|x\|, \quad \forall x \in S.$$

Con esto en mente, $\forall x \in X \setminus \{0\}$,

$$\frac{x}{\|x\|_1} \in S \Longrightarrow \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| \geq \|x_0\| \Longrightarrow \|x\| \geq \|x_0\| \|x\|_1.$$

Así que de nuevo con solo definir $m := \|x_0\|$ y unirlo con la desigualdad que obtuvimos al principio, obtenemos:

$$m\|x\|_1 \leq \|x\| \leq M\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

Demostrando que cualquier norma es equivalente a la norma $\|\cdot\|_1$.

$\boxed{\Longleftarrow}$

A continuación, demostraremos que si en un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ todas las normas son equivalentes, entonces el espacio $X$ es necesariamente de dimensión finita.

Para esto, procederemos probando el contrarrecíproco; esto es, negaremos la tesis que queremos demostrar e intentaremos deducir mediante distintos razonamientos lógicos que, entonces, se da la negación de la hipótesis original. En nuestro caso: supondremos la negación del hecho de que $X$ sea de dimensión finita (es decir, supondremos que $X$ es de dimensión infinita) y llegaremos a la negación de que todas las normas son equivalentes (es decir, que existen al menos dos normas que no son equivalentes).

Dicho esto, comenzamos con la demostración suponiendo $X$ de dimensión infinita.

Sea $\{e_i : i \in I\}$ una base de $X$, que asumimos normalizada, esto es, $\|e_i\| = 1, \forall i \in I$. Además, para cada $x \in X$, éste tiene una única representación $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$ con una cantidad finita de coeficientes no nulos.

Ahora, escogemos un subconjunto numerable $I_0 = \{i_1, i_2, \dots\}$ de $I$, y consideramos la aplicación $\phi$, definida como $\phi(x) = 0$ si en la representación de $x$ en $\{e_i : i \in I\}$, todos los coeficientes correspondientes a $\{e_i : i \in I_0\}$ son nulos, y $\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot x_{i_k}$ en caso contrario; siendo estos $x_{i_k}$ dichos coeficientes no nulos.

Es fácil comprobar que se trata de una aplicación lineal, pero no continua; pues

$$\frac{1}{\sqrt{k}} e_{i_k} \xrightarrow{k \longrightarrow +\infty} 0, \text{ pero } \phi\left(\frac{1}{\sqrt{k}} e_{i_k}\right) = \sqrt{k} \xrightarrow{k \longrightarrow +\infty} \infty \tag{2.1}$$

En este punto, consideramos la siguiente aplicación:

$$\|x\|_\phi := \|x\| + |\phi(x)|, \ \forall x \in X,$$

de la que puede comprobarse fácilmente que también es una norma en $X$.

Con esta nueva norma que acabamos de introducir, queda claro que no puede existir una constante $C > 0$ de modo que

$$\|x\|_\phi = \|x\| + |\phi(x)| \leq C\|x\|,$$

pues en ese caso, tomando $x = \frac{1}{\sqrt{k}} e_{i_k}$, $C\|x\| \longrightarrow 0$, e implicaría que $|\phi(x)| \longrightarrow 0$ también; contradiciendo así (2.1).

De este modo, vemos que $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_\phi$ son dos normas que no pueden ser equivalentes y, por el comentario que hicimos al principio, esto concluye la demostración. $\square$

2. **Espacios de Banach. Una diferencia más.** En este apartado buscaremos otra diferencia más desde el punto de vista de los Espacios de Banach, esto es, aquellos espacio normados que, además, son completos (toda sucesión de Cauchy es convergente a un elemento del espacio).

   Para el caso de espacios normados de dimensión finita ya se demostró en las etapas iniciales del grado el siguiente resultado:

   **Teorema 3.** *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach.*

   *Demostración.* Ver [15, pág. 54]. □

   Será justamente aquí donde encontraremos una nueva diferencia, pues para los espacios normados de dimensión infinita no tenemos un resultado análogo y podemos encontrar entre ellos sendos ejemplos de espacios normados de dimensión infinita que sí son espacios de Banach y otros que no.

   **Ejemplo 1. Espacio normado de dimensión infinita que SÍ es espacio de Banach.**

   Consideraremos el conocido espacio normado de dimensión infinita $(l_2, \|\cdot\|_2)$ y nuestro objetivo será demostrar que es un espacio de Banach.

   En primer lugar recordemos:

$$l_2 = \left\{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$
$$\|\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}.$$

   Sea $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $l_2$. El objetivo será conseguir demostrar que $\exists x \in l_2 : \{x_k\} \xrightarrow{k\to\infty} x$, pero primero vamos a tratar de comprender la naturaleza de nuestra sucesión, pues, por estar trabajando con elementos de $l_2$, la sucesión $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es, en realidad, una sucesión de sucesiones y tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} x_1 = \{x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n, \dots\} \\ x_2 = \{x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n, \dots\} \\ \dots \\ \dots \\ x_k = \{x_k^1, x_k^2, \dots, x_k^n, \dots\} \\ \dots \end{cases} \tag{2.2}$$

Ahora que ya visualizamos, de algún modo, nuestra $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, vamos a exprimir el hecho de que sea una sucesión de Cauchy.

En primer lugar, por ser $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy, ésta cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \|x_{k+p} - x_k\|_2 \leq \varepsilon, \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}.$$

Luego,

$$\|x_{k+p} - x_k\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_{k+p}^n - x_k^n|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon.$$

Lo cual implica

$$\left.\begin{array}{l} \forall k \geq k_0(\varepsilon), \\ \forall p \in \mathbb{N}, \\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{array}\right\}, |x_{k+p}^n - x_k^n| \leq \varepsilon.$$

Observemos que esta última desigualdad es uniforme con respecto a $p \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{N}$. Luego, para un $n \in \mathbb{N}$ fijado, esta última desigualdad nos dice que la sucesión $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy de números reales. Esto es, cada una de las columnas de (2.2) puede ser vista como una sucesión de Cauchy de números reales.

La conclusión es que, dado $n \in \mathbb{N}$ fijo, $\{x_k^n\} \xrightarrow{k\to\infty} x_n$.

De este modo, repitiendo esta idea, consideraremos el elemento conformado por cada uno de los límites de cada una de las columnas de (2.2). Esto es, consideramos el elemento $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Y ahora, como el lector se estará temiendo, nos gustaría probar que el elemento al que converge nuestra sucesión de sucesiones original, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, es justo este $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que acabamos de construir. En efecto, como cada una de las sucesiones de las $n$ columnas de (2.2), $\{x_k^n\}_{k\in\mathbb{N}}$, es de Cauchy, entonces

$$\underline{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}} : \begin{cases} \forall k \geq k_0(\varepsilon), \\ \forall p \in \mathbb{N}. \end{cases}, \text{ tenemos que } \|x_{k+p} - x_k\|_2 \leq \varepsilon.$$

$$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} |x_{k+p}^n - x_k^n|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0(\varepsilon).$$

$$\overset{p\to\infty}{\Longrightarrow} \sum_{n=1}^{N} |x_n - x_k^n|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0(\varepsilon).$$

$$\Longrightarrow \underline{\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_k^n|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon).} \Longrightarrow x - x_k \in l_2.$$

$$\Longrightarrow x = x_k + (x - x_k) \in l_2.$$

Y entonces, releyendo únicamente las partes subrayadas de esto último, llegamos a que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0(\varepsilon) \Longrightarrow \|x - x^k\|_2 \leq \varepsilon.$$

Así damos por terminada la demostración de que $(l_2, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach. Queda puesto de manifiesto que la prueba radica en tratar con delicadeza las sucesiones de Cauchy y los pasos al límite, así como la uniformidad de las desigualdades.

**Ejemplo 2. Espacio normado de dimensión infinita que NO es espacio de Banach.**

A continuación daremos un ejemplo de espacio normado de dimension infinita que, a diferencia del ejemplo anterior, no es un espacio de Banach. Dicho esto, consideremos $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ el espacio normado de funciones polinomiales con coeficientes reales restringidas al intervalo [0,1], junto con la norma:

$$\|f\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |f(t)|, \quad \forall f \in \mathcal{P}_{[0,1]}.$$

Pues bien, la idea básica que usaremos para demostrar que este espacio no es de Banach viene de un resultado visto en cursos anteriores de desarrollos de Taylor, que recordamos a continuación:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

uniformemente en subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$. (Ver [14, pág. 606]).

Teniendo esto en cuenta, definiendo $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{[0,1]}$, la sucesión del polinomios siguiente:

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge a la funcion exponencial, $e^x$, en el espacio $(\mathcal{C}[0,1], \|\cdot\|)$. En particular, por ser una sucesión convergente será también una sucesión de Cauchy. (Consultar [13, pág. 37]).

Luego, hemos encontrado con $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en el espacio $\mathcal{P}_{[0,1]}$ que no converge en $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ (por la unicidad de límite). Por lo tanto, este espacio normado de dimensión infinita no es de Banach.

3. **Comportamiento de los subespacios vectoriales según la dimensión del subespacio.**

Ahora nos centraremos en cómo puede variar el comportamiento de los subespacios vectoriales de un espacio normado, en cuanto a si son cerrados o no, respecto de la finitud de su dimensión.

En primer lugar, consideraremos un espacio normado cualquiera, $(X, \|\cdot\|)$, y consideremos en él cualquier subespacio $F \subset X$ de dimensión finita.

Por el hecho de ser de dimensión finita, $F$ será un espacio de Banach, y por tanto, $F$ es cerrado.

En resumen, en un espacio normado cualquier subespacio de dimensión finita es cerrado.

En segundo lugar, veamos que, de nuevo, en el infinito vuelve a cambiar la situación haciendo que la casuística sea mucho más rica, pudiendo así encontrar ejemplos de subespacios de dimensión infinita que no son cerrados. Iremos con el caso particular del espacio normado de dimensión infinita $(l_2, \|\cdot\|_2)$. Demostremos que en él, el subespacio vectorial de las sucesiones *casi nulas*, $c_{00} \subset l_2$, que es un subespacio vectorial de dimensión infinita, no es un subespacio cerrado; esto es, $\overline{c_{00}} \neq c_{00}$. Conviene dar una definición formal de $c_{00}$:

$$c_{00} = \left\{ \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \{n \in \mathbb{N} : x^n \neq 0\} \text{ es finito} \right\}.$$

Para lograr nuestro objetivo, lo que haremos será probar que, de hecho, $\overline{c_{00}} = l_2$. Pongámonos manos a la obra. La primera inclusión $\overline{c_{00}} \subset l_2$ es clara. Estudiemos la recíproca más detenidamente.

Sea $x \in l_2$. Por definición de $l_2$, $x = \{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$ es convergente. Lo cual nos asegura que la serie de restos converge a cero. Es decir,

$$\left\{ \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2 \right\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2, \sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2, \ldots, \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2, \ldots \right\} \xrightarrow{k \longrightarrow +\infty} 0.$$

Por tanto,

$$\underline{\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0,} \text{ se tiene que } \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon.$$

Consideramos ahora el elemento $y^{k_0} = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k_0-1}, 0, 0, \ldots\} \in c_{00}$ y notamos que, entonces, $\underline{\|x - y^{k_0}\| = \left(\sum_{n=k_0}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2}}$.

Ahora, releyendo los fragmentos subrayados en estas últimas líneas, deducimos que $x \in \overline{c_{00}}$. Quedando así demostrado que $\overline{c_{00}} = l_2$. Lo que, en particular, nos dice que $c_{00}$ no es cerrado, como queríamos demostrar.

4. **Compacidad.**

Como ya sabemos, dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, sabemos que $X$ es también un espacio métrico (gracias a la métrica derivada de la norma) y, por tanto, un espacio topológico. Así que tiene sentido que, en este contexto, se hable de compacidad. Definamos este concepto formalmente.

**Definición 11.** Se llama **recubrimiento por abiertos** de un subconjunto, $A \subset X$, a una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{A} = \{A_j \subset X : j \in J\}$ cuya unión cubre a todo el subconjunto, $A \subset \bigcup_{j \in J} A_j$.

Dado $\mathcal{A}$ un recubrimiento de $A$, un **subrecubrimiento**, $\mathcal{B}$, es una subfamilia de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, que sigue siendo recubrimiento de $A$.

**Definición 12.** Dado $A \subset X$, se dirá que $A$ es **compacto** cuando para cualquier recubrimiento por abiertos de $A$, es posible extraer un subrecubrimiento finito del mismo.

No obstante, esta definición resulta manejable en verdaderamente pocas ocasiones (una de ellas la veremos más adelante). Es por esto que es común que, en lugar de la definición, en muchas ocasiones se usen algunas de las siguientes caracterizaciones que pueden encontrarse probadas en [1, pág. 37-38].

**Teorema 4.** ***(Teorema de Heine-Borel).***

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado de dimensión finita, y sea $B \subset X$. Entonces,*

$$B \text{ es compacto} \iff B \text{ es cerrado y acotado.}$$

**Teorema 5.** ***(Caracterización secuencial de la compacidad).***

*Sea $(X, d)$ un espacio métrico, y sea $B \subset X$. Entonces,*

$$B \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B,\ \exists \{x_{\sigma(n)}\} \longrightarrow x \in B.$$

Tras esto, ya estamos en situación de poder mostrar otra diferencia más entre los espacios de dimensión finita e infinita.

Lo primero, será notar que la bola cerrada unidad de cualquier espacio de dimensión finita (que evidentemente es cerrada y acotada) es compacta por el

Teorema (4). No obstante, veamos un ejemplo en dimensión infinita donde la bola cerrada unidad no es compacta.

**Ejemplo 3.** Consideremos el espacio normado de dimensión infinita $(l_2, \|\cdot\|_2)$.

La bola unidad cerrada en este espacio sería $\overline{B}_{l_2} = \{x \in l_2 : \|x\|_2 \leq 1\}$.

De este modo, queda claro que si consideramos la sucesión de vectores canónicos de $l_2$,

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\{1,0,0,\dots\},\{0,1,0,\dots\},\dots\},$$

esta es una sucesión que se encuentra dentro de $\overline{B}_{l_2}$.

Sin embargo, $\forall n \neq m$,

$$\|x_n - x_m\|_2 = \|\{\underbrace{\overbrace{0,\dots,0,1}^{n},0\dots,0,-1}_{m},0,\dots\}\|_2 = \left(|1|^2 + |-1|^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}.$$

Lo cual implica que es imposible construir ninguna sucesión parcial de Cauchy, que a su vez, asegura que tampoco podremos construir ninguna sucesión parcial convergente en $\overline{B}_{l_2}$.

Y, por último, basta recordar el Teorema (5) para asegurar que la bola cerrada unidad del espacio $l_2$ no es compacta.

Pero podemos ir más allá (y es lo que debemos hacer), pues este hecho no es una particularidad del espacio $(l_2, \|\cdot\|_2)$, ya que en realidad la compacidad de la bola unidad es algo que sirve para caracterizar la dimensión del espacio normado. En efecto, presentamos el siguiente teorema fundamental.

**Teorema 6.** ***(Teorema de Riesz).***

*Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Entonces,*

$$X \text{ es de dimensión finita} \iff \overline{B}_X(0,1) \text{ es compacto.}$$

*Demostración.*

$\boxed{\Longrightarrow}$

Supongamos que la dimensión de $X$ es finita. Ahora, como $\overline{B}_X(0,1)$ es cerrado y acotado, el Teorema (4) nos asegura que $\overline{B}_X(0,1)$ es compacto.

$\boxed{\Longleftarrow}$

La demostración de esta implicación es una de esas pocas cosas veces que comentábamos antes en las que la definición de compacidad es utilizada como tal, en lugar de sus caracterizaciones. De modo que tendremos a continuación una oportunidad para poner en valor el potencial que guarda dicha definición.

Dicho esto, consideremos $B = \overline{B}_X(0,1)$ que, por hipótesis, es compacto. Ahora, tomamos $\varepsilon \in (0,1)$ fijo pero arbitrario, y consideramos el conjunto

$$\{B_X(b,\varepsilon), b \in B\}.$$

Es claro que este conjunto es un recubrimiento por abiertos de $B$ y, como por hipótesis $B$ es compacto, debe existir algún subrecubrimiento finito, esto es,

$$\exists F = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\} \subset B : B \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_X(b_i,\varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{n}(b_i + \varepsilon B_X(0,1)). \tag{2.3}$$

Sea $M = Lin\{b_1, \ldots, b_n\} = \{\sum_{i=1}^{n} k_i b_i : k_i \in \mathbb{R}\}$, el subespacio de $X$ generado por $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$; entonces de (2.3) deducimos que

$$B \subset M + \varepsilon B.$$

Luego,

$$B \subset M + \varepsilon B \subset M + \varepsilon(M + \varepsilon B) = M + \varepsilon M + \varepsilon^2 B = M + \varepsilon^2 B,$$

ya que

$$\begin{aligned} M + \varepsilon M &= Lin\{b_1, \ldots, b_n\} + \varepsilon Lin\{b_1, \ldots, b_n\} = Lin\{b_1, \ldots, b_n\} + Lin\{\varepsilon b_1, \ldots, \varepsilon b_n\} \\ &= Lin\{b_1, \ldots, b_n\} = M, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Entonces, repitiendo esta idea $n$ veces, llegamos a que

$$B \subset M + \varepsilon^n B, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pero esto último nos dice que $\forall b \in B, \ \exists m_n \in M, b' \in B$ tal que $b = m_n + \varepsilon^n b'$, así que $\|b - m_n\| \leq \varepsilon^n \|b'\| = \varepsilon^n, \forall n \in \mathbb{N}$, ya que $b' \in B = \overline{B}_X(0,1)$.
Y, como $\varepsilon^n \longrightarrow 0$, entonces $m_n \longrightarrow b$. Así, $b \in \overline{M} = M$ ($M$ es un subespacio de dimensión finita, y por tanto es cerrado).

Concluyendo así que

$$B \subset M.$$

Merece la pena que hagamos un pausa para entender la potencia de esto, pues nos está diciendo que la bola unidad cerrada del espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, del que no sabemos nada sobre su dimensión, está estrictamente contenido en

$M$, ¡que es un espacio de dimensión finita! Increíble, ¿verdad? Pues justo esto será lo que nos permitirá concluir la demostración.

Dicho esto, tomando arbitrariamente un $x \in X \setminus \{0\}$,

$$\frac{x}{\|x\|} \in B \subset M \Longrightarrow \frac{x}{\|x\|} \in M \Longrightarrow x \in M.$$

Lo que nos asegura que

$$X = M.$$

Finalmente, basta con recordar que $M$ tiene dimensión finita, y por tanto, se demuestra así que $X$ es también de dimensión finita. Concluyendo así la que, si se me permite el chascarrillo, es una de las más elegantes demostraciones que conozco.

□

Este torema parece ya avanzarnos que las propiedades de los subconjuntos compactos es bastante sorprendente (en el sentido de poco intuitivo) en los espacios normados de dimensión infinita. No obstante, esto no queda aquí, y para seguir en esta línea y continuar intentando comprender la naturaleza de los compactos en este tipo de espacios, presentaremos un resultado a continuación que nos dirá algo muy sorprendente en lo relativo al interior de éstos.

Primero daremos una proposición que nos será útil y a continuación presentamos la definición de interior de un conjunto.

**Proposición 3.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ espacio normado. Consideremos $K \subset X$ compacto y $F \subset K$ cerrado.*

*Entonces, $F$ es compacto.*

*Demostración.* Consultar [11, pág. 263]

□

**Definición 13.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y consideremos $A \subset X$. Definimos entonces

$$int(A) = \{a \in A : \exists \varepsilon > 0, B(a, \varepsilon) \subset A\}.$$

Presentamos ahora sí el resultado que prometimos al principio.

**Corolario 1.** *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio normado de dimensión infinita. Consideremos* $K \subset X$ *un compacto.*
*Entonces,* $int(K) = \varnothing$.

*Demostración.* Supondremos, a modo de contradicción, que $int(K) \neq \varnothing$. Esto significa que existe $x \in K$ y $r > 0$ tal que $B(x, 2r) \subset K$.

En este punto, considero $\overline{B}(x,r) \subset B(x, 2r) \subset K$ y, como $\overline{B}(x,r)$ es cerrada y $K$ es compacto, entonces por la Proposición (3), $\overline{B}(x,r)$ es compacta.

Ahora, como $\overline{B}(x,r) = x + r\overline{B}(0,1)$, entonces la bola unidad cerrada $\overline{B}(0,1)$ también ha de ser compacta, lo cual es una contradicción gracias al *Teorema de Riesz* (Teorema (6)) y a que $X$ es de dimensión infinita.

Por tanto, la suposición inicial ha de ser falsa. Asegurando que $int(K) = \varnothing$. □

Tras este resultado, que claramente no se da en el caso de un espacio normado de dimensión finita, queda claro que, efectivamente, los compactos en espacios normados de dimensión infinita son, como mínimo, raros. Marcando así la compacidad más diferencias entre los espacios normados de dimensiones finita e infinita.

## 2.3 Implicaciones del Teorema de Baire.

En este apartado presentaremos el *Teorema de Baire* (o *Lema de Categoría de Baire* en algunos de los textos citados [3], [7] y [10]) con el objetivo de extraer una conclusión muy significativa en el tema que nos ocupa.

Sin embargo, el lector debe saber antes que dicho teorema puede verse formulado de una gran cantidad de formas distintas, pero equivalentes, dependiendo del contexto en el que se presente. En este trabajo, nos decantaremos por la versión que se expone a continuación, pues de este modo nos ahorraremos la presentación de nuevas definiciones y conceptos que harían más engorrosa esta sección.

Dicho esto, presentamos el teorema.

**Teorema 7.** ***(Teorema de Baire).***
*Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo y $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados tal que $int(M_n) = \varnothing$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*
*Entonces,*

$$int\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \varnothing.$$

*Demostración.* Consideremos $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados tal que

$$int(M_n) = \varnothing, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tomamos entonces, $O_n := X \setminus M_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, que es evidentemente abierto y ocurrirá que, además, $O_n$ es denso en $X$. Pues de no ser así, si existiese algún $O_n$ no denso en $X$, entonces

$$\begin{aligned} \exists y \in X \setminus \overline{O_n} \Longrightarrow y \notin \overline{O_n} \Longrightarrow \exists B(y,r) \text{ tal que } B(y,r) \cap O_n = \varnothing \\ \Longrightarrow B(y,r) \subset X \setminus O_n = M_n \Longrightarrow int(M_n) \neq \varnothing, \end{aligned}$$

que es una contradicción con nuestra hipótesis.

Nuestra estrategia a lo largo de la demostración será probar que

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \text{ es denso en } X, \tag{2.4}$$

pues esto ya implicaría inmediatamente que

$$int\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \varnothing,$$

que es justo lo que queremos demostrar. En efecto, de nuevo razonando por contradicción, si no fuese así, entonces

$$\begin{aligned}
&\exists B(z,r) \subset \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [X \setminus O_n] = X \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \\
&\Longrightarrow B(z,r) \subset X \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \Longrightarrow B(z,r) \cap \left[\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right] = \varnothing \\
&\Longrightarrow z \notin \overline{\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right)},
\end{aligned}$$

que contradice (2.4).

Tras estos comentarios, vamos a demostrar que $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$ es denso en $X$, lo cual probaremos a su vez viendo que $\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right) \cap W \neq \varnothing$ para $W$ un abierto no vacío cualquiera de $X$.

Dicho esto, supongamos $W$ un abierto no vacío cualquiera de $X$ y comencemos con la prueba de que $\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right) \cap W \neq \varnothing$.

Por un lado, notaremos que como $O_1$ es abierto y denso en $X$, entonces $W \cap O_1 \neq \varnothing$, de modo que podemos asegurar que:

$$\exists x_1, r_1 \text{ tal que } \overline{B}(x_1, r_1) \subset W \cap O_1, \text{ con } 0 < r_1 < 1. \tag{2.5}$$

Por otro lado, como $O_n$ también es denso en $X$ para cada $n \geq 2$, sabemos que $\exists x_{n-1} \in X, \exists r_{n-1} > 0$ tal que $O_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}) \neq \varnothing$. Por tanto, deducimos también que:

$$\exists x_n, r_n \text{ tal que } \overline{B}(x_n, r_n) \subset O_n \cap B(x_{n-1}, r_{n-1}), \text{ con } 0 < r_n < \frac{1}{n}, \forall n \geq 2. \tag{2.6}$$

Teniendo esto en cuenta, podemos considerar la sucesión de los centros de todas estas bolas cerradas, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que resulta ser una sucesión de Cauchy, pues si $i, j > n$, entonces $x_i, x_j \in B(x_n, r_n)$. Asegurándonos así que $d(x_i, x_j) < 2r_n < \frac{2}{n}$ (ya que $0 < r_n < \frac{1}{n}$).

Una vez probado que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, como $(X, d)$ es un espacio métrico completo, existe $\lim_{n\in\mathbb{N}} x_n = x \in X$ límite de esta sucesión.

En este punto, como $x_j \in \overline{B}(x_n, r_n)$, $\forall j > n$, entonces $x \in \overline{B}(x_n, r_n), \forall n \in \mathbb{N}$ de los que podemos extraer dos conclusiones:

- La primera es que como $x \in \overline{B}(x_n, r_n), \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow x \in O_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, (por (2.5) y (2.6)) $\Longrightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$.
- La segunda es que como $x \in \overline{B}(x_1, r_1) \Longrightarrow x \in W$, (por (2.5)).

Finalmente, uniendo estas dos conclusiones obtenemos que:

$$x \in \left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \right) \cap W.$$

Luego,

$$\left( \bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \right) \cap W \neq \varnothing,$$

como queríamos demostrar. □

**Corolario 2.** *Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, entonces la dimensión de $X$ es o finita o infinita no numerable.*

*Demostración.* La demostración la haremos suponiendo que $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de dimensión infinita numerable y llegaremos a una contradicción.

Dicho esto, consideremos $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$ una base numerable de $X$. Entonces,

$$M_n = Lin\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

son cerrados, por ser subespacios de dimensión finita, y también son de interior vacío como mostramos a continuación.

En efecto, si dado $n \in \mathbb{N}$, $E_n$ no fuese de interior vacío, entonces $\exists B(x_0, r) \subset M_n$, de lo cual deducimos que

$$\begin{aligned}
\forall x \in X \setminus \{0\}, \quad & \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} + x_0 \in B(x_0, r) \subset M_n, \\
& \Longrightarrow y := \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} + \underbrace{x_0}_{\in M_n} \in M_n \Longrightarrow z := \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} \in M_n, \\
& \Longrightarrow \frac{2\|x\|}{r} z \in M_n \Longrightarrow \frac{2\|x\|}{r} \cdot \frac{r}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|} = x \in M_n.
\end{aligned}$$

Y por tanto, $X = M_n$. Lo cual es una contradicción pues $X$ es de dimensión infinita y $M_n$ de dimensión finita.

Aplicando entonces el *Teorema de Baire* (Teorema (7)),

$$int\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = \varnothing.$$

No obstante, por cómo hemos definido $M_n, \forall n \in \mathbb{N}$, sabemos que $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = X$, y por tanto, $int\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n\right) = int(X) = X$.

Esta contradicción nos asegura que un espacio de Banach no puede ser de dimensión infinita numerable. □

*Observación* 3.
En este Corolario (2) la hipótesis de que el espacio que tengamos entre manos sea de Banach es fundamental, y de hecho, más allá de lo curioso del resultado, se le puede sacar bastante jugo a este resultado en el sentido práctico.

Una primera utilidad podría ser la de demostrar que un determinado espacio normado no es de Banach. Por ejemplo, considerando $(\mathcal{P}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, si queremos probar que no es de Banach "a las bravas", esto es, dando una sucesión de Cauchy que no sea convergente, puede que si no somos asiduos de las sucesiones nos cueste dar con ella. Sin embargo, con este corolario en mente, demostrar este hecho es tan sencillo como obtener una base algebraica infinita numerable del espacio. Considerando entonces la base algebraica canónica

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^n, \ldots\},$$

que claramente es infinita numerable, demostramos que $(\mathcal{P}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach.

Otra utilidad podrá ser demostrar la finitud o no de algunos espacios vectoriales. Por ejemplo, gracias a este corolario se deduce que el espacio vectorial $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ es de dimensión infinita (que lo dejamos pendiente de prueba cuando este espacio fue presentado).

En efecto, usando que dicho espacio, junto con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup |f(x)| : x \in [0,1],$$

es un espacio de Banach (consultar referencia [15]), por el corolario sabemos que tendrá dimensión finita o infinita no numerable. Ahora, como en este espacio podemos encontrar el siguiente conjunto infinito de elementos linealmente independientes:

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots\},$$

entonces queda claro que el espacio vectorial $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ es de dimensión infinita no numerable.

Quizás esto nos sugiera que el concepto de base algebraica, en espacios de Banach de dimensión infinita, puede ser "poco útil".

## 2.4 Bases Hilbertianas.

Cuando anteriormente presentamos el concepto de base algebraica de un espacio vectorial quedó claro que se trataba de un concepto más que útil. No obstante, en esta sección con ayuda de textos como [3], [6], y [7] nos sumergiremos en los espacios de Hilbert separables para entender por qué es necesaria la definición de un nuevo concepto de base para este tipo de espacios: las bases Hilbertianas.

Pero antes de esto, presentemos algunos conceptos necesarios para poder llegar a presentar este concepto.

**Definición 14.** Sea $H$ un espacio vectorial real. Un **producto escalar**, que notaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es una aplicación

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle \ :& H \times H \longrightarrow \mathbb{R} \\ &(u, v) \longmapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle u, u \rangle \geq 0, \quad \forall u \in H \quad ; \quad \langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$

2. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle, \quad \forall u, v \in H.$

3. $\langle \alpha u + \beta v, w \rangle = \alpha \langle u, w \rangle + \beta \langle v, w \rangle, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall u, v, w \in H.$

En tal caso, diremos que $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un **espacio prehilbertiano**.

**Proposición 4.** *Dado* $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *un espacio prehilbertiano,*

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}, \quad \forall u \in H,$$

*define una norma en* $H$.

**Definición 15. (Espacio de Hilbert).**

Dado un espacio prehilbertiano $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, decimos que $H$ es un **espacio de Hilbert** cuando la norma inducida por dicho producto escalar, $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$, es tal que el espacio $(H, \| \cdot \|)$ es completo.

**Definición 16.** Dado $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado, decimos que es **separable** si contiene algún subconjunto denso y numerable.

### 2.4.1 Entendiendo la necesidad e importancia de las bases Hilbertianas.

Todo comenzó con el estudio del problema de la cuerda vibrante:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & t \geq 0, \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

que modela el movimiento descrito por una cuerda sujeta en los puntos $(0,0)$ y $(0,\pi)$, velocidad inicial 0 y que inicialmente tiene la forma dada por $f$.

En un primer momento, D'Alembert y Euler estudiaron este problema y ambos llegaron a la conclusión de que una solución de (2.7) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)\right],$$

donde $\tilde{f}$ es una extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi$-periódica de $f$.

Pero, alternativamente, Daniel Bernouilli probablemente por sus conocimientos musicales y la superposición de armónicos del sonido, planteó que una solución de (2.7) sería una superposición de ondas sencillas del tipo $u_n(x,t) = sen(nx)cos(nt)$. Esto es,

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)cos(nt).$$

Idea completamente rachazada por Euler y D'Alembert pues si este resultado fuese cierto, implicaba que la función $f$ podía expresarse del siguiente modo:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx).$$

54 años más tarde, Jean Baptiste-Joseph Fourier se interesó por el problema de la conducción del calor en una varilla delgada de longitud $\pi$. En concreto, estudió el problema siguiente (que estudiaremos en detalle más tarde en la sección de Aplicaciones):

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\}$$

y llegó también mediante el método de variables separadas a una solución que de nuevo nos conducía a que $f$, en este caso la temperatura inicial de la varilla, podía ser expresada como:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx).$$

Análogamente, otros problemas nos acababan conduciendo también a la cuestión de si es posible expresar $f$ de la forma:

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx),$$

o, incluso de un modo más general aún,

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n sen(nx) + b_n cos(nx)\right).$$

Sin embargo, el avance que hizo Fourier fue, bajo ciertas hipótesis, decir cuáles eran explícitamente esos coeficientes. Su falta de rigor hizo que parte de la comunidad matemática no viera con buenos ojos su trabajo, pero años después Lebesgue ya con el rigor suficiente acabó demostrando que Fourier estaba en lo cierto. En concreto, Lebesgue probó que en el espacio de Hilbert $L^2(-\pi, \pi)$, junto con el producto escalar $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \forall f, g \in L^2([-\pi, \pi])$, todo elemento $f$ podía escribirse como:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n\rangle f_n,$$

donde $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ se correspondía con el subconjunto ortonormal (que tienen norma 1 y producto escalar 0 para cualesquiera dos elementos distintos) de $L^2(-\pi, \pi)$ siguiente:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(n(\cdot))}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen(n(\cdot))}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Además, ocurre que en $L^2(a, b)$ no existe ningún subconjunto $A$ ortonormal que sea base algebraica, (ver [4, pág. 57]). Por todos estos motivos, para un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable genérico, $H$, (pues sin la hipótesis de separabilidad no se sabía dar la expresión de los coeficientes) se definió un nuevo concepto de base, que llamaríamos base Hilbertiana, y que no serían más que aquellos subconjuntos, $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $H$, tal que:

- $\mathcal{B}$ es un subconjunto ortonormal,

- todo elemento $u \in H$ se puede escribir como

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n,$$

(aunque nosotros esta última condición la sustituiremos por una equivalente que nos será más útil a la hora de demostrar ciertos resultados).

También, otro motivo por el que las bases Hilbertianas se convirtieron en un concepto fundamental en dimensión infinita es que ninguna base algebraica es Hilbertiana en este contexto como consecuencia del *Teorema de Baire*, (recordar Corolario (2)). Ya que cualquier base algebraica de un espacio de Banach de dimensión infinita (en particular un espacio de Hilbert de dimensión infinita) es no numerable (y las bases Hilbertianas de espacios de Hilbert separables de dimensión infinita son siempre numerables, por definición).

### 2.4.2 Existencia y ejemplos de bases Hilbertianas.

Tras esta introducción al concepto de base Hilbertiana, nuestro objetivo será el de llegar a un resultado de existencia de tales bases en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita y presentar algunos ejemplos de dichas bases. Cabe destacar también que el motivo por el que no se hablará de bases Hilbertianas para espacios de Hilbert de dimensión finita y no se extenderá la definición a dicho caso es que, si se hiciese, dichas bases no serían más que unas bases algebraicas (que ya tenemos más que estudiadas) especiales (que además sean ortonormales). Por tanto, todo resultado de existencia sería más que evidente por lo ya conocido de bases algebraicas y el método de Gram-Schmidt. (Ver [11]).

Comenzaremos con algunos resultados necesarios ya conocidos de la asignatura Análisis Funcional, cuya demostración no incluiremos pues pueden ser encontrados en los textos [7] y [3] citados en la bibliografía.

**Teorema 8.** ***(Teorema de la Proyección Ortogonal).***

*Sea $H$ un espacio de Hilbert y consideremos $K \subset H$ un subespacio vectorial cerrado. Entonces,*

$$H = K \oplus K^{\perp},$$

*donde $K^{\perp} = \{h \in H : \langle h, x \rangle = 0, \forall x \in K\}$.*

*Esto es,*

$$\forall h \in H, \quad \exists! h_1 \in K, h_2 \in K^{\perp} \text{ tal que } h = h_1 + h_2.$$

*Además, las proyecciones*

$$\begin{aligned} P_K : & H \longrightarrow K \\ & h \longmapsto h_1 \end{aligned}$$

*y*

$$\begin{aligned} P_{K^\perp} : & H \longrightarrow K^\perp \\ & h \longmapsto h_2 \end{aligned}$$

*son lineales y continuas.*

*Demostración.* Ver [7]. □

A continuación, damos la definición de suma Hilbertiana, la cual será fundamental más adelante.

**Definición 17. (Suma Hilbertiana).**
Sea $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subespacios cerrados de $H$, un espacio de Hilbert separable. Diremos que $H$ es la **suma Hilbertiana** de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, que escribiremos $H = \oplus_{n=1}^{\infty} E_n$, si:

1. Los espacios $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente ortogonales, esto es,

$$\langle u, v\rangle = 0, \quad \forall u \in E_n,\ \forall v \in E_m,\ m \neq n.$$

2. El espacio linealmente generado por $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, esto es, el espacio de las combinaciones lineales finitas de los elementos de los $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es denso en $H$.

**Teorema 9.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert y supongamos que $H$ es la suma Hilbertiana de $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $u \in H$, fijamos:*

$$u_n = P_{E_n}(u) \quad \text{y} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

*Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = u \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|^2 = \|u\|^2.$$

*Demostración.* Ver [3]. □

Tras estos resultados de Análisis Funcional y tras la motivación histórica del comienzo del capítulo, llegó el momento de definir rigurosamente el concepto de base

Hilbertiana.

**Definición 18. (Base Hilbertiana).**

Dado $H$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita, decimos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un subconjunto ortonormal si cumple las siguientes propiedades:

1. $\langle e_i, e_j \rangle = 0, \quad \forall i \neq j,$
2. $\|e_i\| = 1, \quad \forall i \in I.$

Además, diremos que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una **base Hilbertiana de** $H$ si también cumple que

$$\overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})} = H.$$

A continuación un par de corolarios que nos hablan acerca del comportamiento de los elementos del espacio respecto de una base Hilbertiana.

**Corolario 3.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y consideremos un subconjunto $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que es una base Hilbertiana de $H$.*

*Entonces, para cada $u \in H$,*

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, e_k \rangle e_k \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, e_k \rangle|^2.$$

*Demostración.* Basta con notar que $H$ puede verse como la suma Hilbertiana de los espacios $E_n = \mathbb{R}e_n$, que $P_{E_n}(u) = \langle u, e_n \rangle e_n$ y usar el Teorema (9). □

**Corolario 4.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y consideremos un subconjunto $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto ortonormal.*

*Supongamos $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales tal que la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \longrightarrow u \in H.$$

*Entonces,*

$$\lambda_n = \langle u, e_n \rangle, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{y} \quad \|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

*Demostración.* En primer lugar probaremos que $\lambda_n = \langle u, e_n \rangle$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\langle u, e_n \rangle &= \left\langle \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_n, e_n \right\rangle = \lim_{k\to\infty} \left\langle \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_n, e_n \right\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty} \lambda_n = \lambda_n.\end{aligned}$$

Para demostrar el otro resultado, consideremos $k \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\begin{aligned}\left\| u - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n \right\|^2 &= \left\langle u - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n, u - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n \right\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2 \sum_{n=1}^{k} \lambda_n \langle u, e_n \rangle + \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \|u\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2.\end{aligned}$$

Ahora, como

$$\lim_{k\to\infty} \left\| u - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n e_n \right\|^2 = \left\| u - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n \right\|^2 = 0,$$

entonces,

$$\|u\|^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

□

Este corolario, en esencia, nos está diciendo que la representación de un elemento respecto de una base Hilbertiana es única. Y tras esto, demostraremos una caracterización para bases Hilbertianas en un espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable que, más tarde, nos permitirá demostrar el resultado fundamental de este capítulo.

**Teorema 10.** *Sea $H$ un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y supongamos $\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un subconjunto ortonormal.*

*Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\mathcal{B} = \{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana de $H$.*
2. *(Identidad de Parseval),*

$$\|u\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2, \quad \forall u \in H.$$

3. *$\mathcal{B}^\perp = \{0\}$.*

*Demostración.*
$\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Probado ya en el Corolario (3).

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Para esta implicación, lo que haremos será demostrar, supuesto que se da la Identidad de Parseval, que si existe un elemento $v \in H$ tal que $\langle v, e_n \rangle = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces ese elemento ha de ser necesariamente 0.

En efecto, supuesto tal $v$,

$$\|v\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle v, e_n \rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0 \Longrightarrow v = 0.$$

Luego, efectivamente, $\mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$.

$\boxed{2 \Longrightarrow 3}$
Como ya tenemos que $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un subconjunto ortonormal, entonces solo tenemos que ver también ocurre que $\overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})} = H$. Pues bien, como es típico lo probaremos por doble inclusión. Pero como la inclusión $\overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})} \subseteq H$ es evidente, concluimos que para demostrar esta implicación bastará con ver que $H \subseteq \overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})}$.

Para ello, tomemos $u \in H$ y veamos que $u \in \overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})}$. Lo cual demostraremos en dos pasos.

El primero de ellos será probar que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n \tag{2.8}$$

es convergente. Para lo cual bastará con ver que la sucesión de las sumas parciales de dicha serie, que tiene este aspecto

$$\{S_k\}_{k \in \mathbb{N}} = \left\{ \sum_{n=1}^{k} \langle u, e_n \rangle e_n \right\}_{k \in \mathbb{N}},$$

es una sucesión de Cauchy, pues $H$ es completo.

Dicho esto,

$$\|S_m - S_n\| = \langle S_m - S_n, S_m - S_n \rangle = \left\langle \sum_{k=n+1}^{m} \langle u, e_k \rangle e_k, \sum_{j=n+1}^{m} \langle u, e_n \rangle e_n \right\rangle$$
$$= \sum_{k=n+1}^{m} |\langle u, e_k \rangle|^2 \underbrace{\|e_k\|^2}_{1} = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle u, e_k \rangle|^2.$$

Ahora, considerando entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n \tag{2.9}$$

y su sucesión de sumas parciales,

$$\{H_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \left\{ \sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2 \right\}_{k\in\mathbb{N}},$$

tenemos del razonamiento anterior que

$$\|S_m - S_n\| = |H_m - H_n|.$$

Mientras que por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\| u - \sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2 \right\|^2 &= \left\langle u - \sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2, u - \sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2 \right\rangle \\ &= \|u\|^2 - 2\sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2 = \|u\|^2 - \underbrace{\sum_{n=1}^{k} |\langle u, e_n \rangle|^2}_{H_k}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$H_k \leq \|u\|^2, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

lo que nos dice que la serie (2.9) es convergente, pues ésta se trata de una serie de términos no negativos cuyas sumas parciales están acotadas para todo $k$, como acabamos de ver.

Recapitulando, tenemos que

$$\|S_m - S_n\| = |H_m - H_n| \xrightarrow{(n,m \longrightarrow \infty)} 0,$$

probando así que efectivamente la serie (2.8) es de Cauchy y, por lo comentado al comienzo de la demostración, nos demuestra también que es una serie convergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u, e_n \rangle|^2 \longrightarrow v.$$

Finalizamos así el primer paso.

En el segundo paso, nos gustaría probar que dicho límite es $u$. Es decir, queremos ver que $u = v$. Para esto, recordamos el Corolario (4), del que se deduce que

$$\langle u, e_n \rangle = \langle v, e_n \rangle \Longrightarrow \langle u - v, e_n \rangle = 0,$$

y como estamos suponiendo que $\mathcal{B}^\perp = \{0\}$, entonces,

$$u - v = 0,$$

o lo que es lo mismo,

$$u = v.$$

Por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle u, e_n \rangle e_n = u \Longrightarrow u \in \overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})}.$$

Lo que nos asegura, también por los comentarios que hicimos al principio, que $H = \overline{(Lin\{e_n : n \in \mathbb{N}\})}$, probando así que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base Hilbertiana.

□

Teniendo todos estos resultados en la chistera, estamos ya en condiciones de probar el resultado fundamental acerca de la existencia de bases Hilbertianas que prometimos anteriormente.

**Teorema 11.** *Todo espacio de Hilbert separable de dimensión infinita posee una base Hilbertiana.*

*Demostración.* Dado $H$ un espacio de Hilbert separable, consideramos el conjunto

$$C = \{c_1, c_2, \dots\}$$

numerable y denso en $H$.

Como $\overline{C} = H$, habrá algún elemento no nulo en $C$ y llamamos entonces $g_1$ a dicho elemento.

Definimos

$$e_1 = \frac{g_1}{\|g_1\|}.$$

Suponemos ahora que, dado $p \in \mathbb{N}$, ya tenemos un subconjunto ortonormal

$$\{e_1, \dots, e_p\},$$

La idea ahora es explicar cómo escoger $e_{p+1}$, el siguiente elemento, tal que $\{e_1, \dots, e_p, e_{p+1}\}$ sea subconjunto ortonormal también.

Lo primero será notar que existe algún $c_{n(p)}$ en $C$ que es linealmente independiente de $\{e_1, \dots, e_p\}$. En efecto, si no fuese así entonces $Lin(C)$ sería un espacio de dimensión finita, por tanto cerrado, y a su vez, por tanto,

$$\overline{C} \subset Lin(C) \neq H \Longrightarrow \overline{C} \neq H,$$

que es una contradicción pues dijimos al comienzo que $C$ era denso en $H$.

Entonces, considerando $M = Lin(\{e_1, \dots, e_p\})$, definimos

$$g_{p+1} = c_{n(p)} - P_M(c_{n(p)}),$$

que es ortogonal a $M = Lin(\{e_1, \dots, e_p\})$ puesto que aplicando el *Teorema de la Proyección Ortogonal* (Teorema (8)) al cerrado $M$ obtenemos que

$$H = M \oplus M^{\perp},$$

y por tanto,

$$\forall g \in H,\ g = g - P_M(g) + \underbrace{P_M(g)}_{\in M} \Longrightarrow g - P_M(g) \in M^{\perp}.$$

En este punto, definimos

$$e_{p+1} = \frac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|},$$

y así es como construimos $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots\}$ un subconjunto ortonormal.

No obstante, nosotros queremos demostrar que dicha $\mathcal{B}$ es, de hecho, una base Hilbertiana de $H$. Para esto, gracias al Teorema (10), bastará con ver que $\mathcal{B}^{\perp} = \{0\}$.

Dicho esto, sea $f \in \mathcal{B}^{\perp} \subset H$. Sin embargo, como cada elemento de $C$ puede ser visto como combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$, entonces $f \in C^{\perp}$.

Por otro lado, como $C$ es denso en $H$, existirá una sucesión de elementos en $C$ que converja a nuestra f:

$$f = \lim_{n \to \infty} c_{j(n)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} &\langle f, f \rangle = \langle f, \lim_{n\to\infty} c_{j(n)} \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, c_{j(n)} \rangle \overset{f \in C^{\perp}}{\Longrightarrow} \langle f, f \rangle = 0, \\ &\Longrightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Quedando así demostrado que $\mathcal{B}^{\perp} = 0$ que, por el Teorema anteiormente citado, nos asegura que, en efecto, $\mathcal{B}$ es una base Hilbertiana de $H$. □

Para concluir con este capítulo presentaremos algunos ejemplos de estas bases Hilbertianas.

**Ejemplo 1.** En este caso consideraremos el espacio $L^2([-\pi, \pi])$, que con la siguiente definición de producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2([-\pi, \pi]),$$

constituye un espacio de Hilbert de dimensión infinita (ver [4, pág. 43], *Teorema de Riesz-Fischer*). De hecho, como $L^2$ es un espacio de Banach, la dimensión será infinita no numerable como consecuencia del *Teorema de Baire* (recordar Corolario (2)).

En este contexto, consideremos

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

y veamos que efectivamente conforma una base Hilbertiana para $L^2([-\pi, \pi])$.
En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$, para la condición de ortonormalidad:

$$\langle 1, cos(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)dx = \left. \frac{sen(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$
$$\langle 1, sen(nx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)dx = - \left. \frac{cos(nx)}{n} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Si $n \neq m$, entonces

$$\langle cos(nx)cos(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx)dx = 0,$$

$$\langle sen(nx)sen(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx)dx = 0.$$

Y para todo $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\langle cos(nx)sen(mx) \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sen(mx)dx = 0.$$

Además,

$$\langle 1, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi,$$

$$\langle cos(nx), cos(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx)dx = \pi,$$
$$\langle sen(nx), sen(nx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} sen^2(nx)dx = \pi,$$

Demostrando así la ortonormalidad del conjunto.

Cabe destacar que para el cálculo de las integrales anteriores basta con aplicar las siguientes propiedades trigonométricas:

$$sen(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}sen(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}sen(\alpha-\beta),$$
$$sen(\alpha)sen(\beta) = \frac{1}{2}cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}cos(\alpha+\beta),$$
$$cos(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}cos(\alpha-\beta).$$

Por otro lado, en cuanto a la segunda condición a satisfacer para ser base Hilbertiana, se hace uso del resultado que nos dice que los polinomios trigonométricos reales, esto es, las funciones $P(x)$ definidas como:

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N} \left(a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

son densos en $L^2([-\pi, \pi])$. (Puede verse probado para un caso más general en [19]).

Por tanto, por el Corolario (3), para todo $f \in L^2([-\pi, \pi])$,

$$f = \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left\langle f, \frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + \left\langle f, \frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{sen(nx)}{\sqrt{\pi}} \right),$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)),$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx, \quad n \geq 0,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx) dx, \quad n \geq 1.$$

**Ejemplo 2.** Por si no había quedado claro, es importante recalcar que no se tiene la unicidad de base Hilbertiana (de hecho, en el momento que existe una, existirán infinitas). Por ejemplo, los conjuntos

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(nx) : n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

son bases Hilbertianas del espacio de Hilbert que conforma $L^2(0, \pi)$ junto con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(0, \pi).$$

La demostración es análoga al ejemplo anterior. (Ver [4, pág. 79]).

Como veremos, los dos conjuntos anteriores juegan un papel muy importante en el estudio de problemas de tipo mixto para la ecuación de ondas y la ecuación del calor.

# Capítulo 3

# Aplicaciones: Series de Fourier y Ecuaciones Diferenciales.

En la sección anterior, cuando motivábamos el concepto de base Hilbertiana, ya mencionamos algunos problemas que hicieron que la definición de un nuevo concepto de base fuese necesaria. En efecto, hicimos referencia al problema de la cuerda vibrante, estudiado por D'Alembert, Euler y Daniel Bernouilli, y, sobre todo, fue el problema de la conducción del calor en cuerpos sólidos, estudiado por Fourier, lo que acabó por hacernos intuir la necesidad del concepto de base Hilbertiana.

Por tanto, en esta sección a lo que nos dedicaremos será a comprender en profundidad este último problema y observar así cómo el concepto de base Hilbertiana juega un papel fundamental en el estudio de problemas de tipo mixto para ecuaciones en derivadas parciales.

Dicho esto, presentamos una de las ecuaciones en derivadas parciales más importantes de la Física Matemática: **la ecuación del calor**,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = k\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

No obstante, esta no será la versión de la ecuación del calor con la que trabajaremos; pues, por comodidad, introduciremos el cambio $u(x,t) = v(x,kt)$, obteniendo así esta nueva versión más manejable:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}.$$

Esta ecuación conforma el ejemplo más elemental del grupo de las ecuaciones parabólicas, y junto con unas condiciones iniciales y condiciones de contorno dadas, estudiaremos, de manera más concreta, los dos siguientes problemas:

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\} \tag{3.1}$$

y

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

El motivo por el que estos dos problemas son interesantes está en la Física. En este contexto, el problema (3.1) plantea una situación en la que tenemos una varilla delgada de longitud $\pi$, con su superficie lateral aislada térmicamente, donde sus extremos se mantienen constantemente a una temperatura de 0° centígrados y la temperatura del resto de puntos de la varilla en el instante inicial está dada por la funcion $f(x)$. Por tanto, una hipotética solución, $u(x,t)$, representa la temperatura de la varilla en el punto $x$ en el tiempo $t$.

Del mismo modo, el problema (3.2) representa una situación similar, salvo que en este caso los extremos de la varilla no han de mantenerse necesariamente a 0° centígrados, sino que en este caso la condición impuesta se interpreta como que también los extremos están aislados térmicamente, es decir, no hay ningún tipo de flujo de calor a través de estos extremos. (Ver [17] para más detalles de la interpretación y deducción de los problemas).

Tras este previo, comenzamos en primer lugar con el problema mixto (3.1).

## 3.1 Propagación del calor: problema con extremos de la varilla a 0° centígrados.

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{array}\right\}$$

Parece lógico, que lo primero que nos planteemos sea cómo definir una solución de (3.1), para lo cual, comenzamos definiendo el conjunto siguiente:

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T\},$$

conjunto que, de hecho, no es abierto ni cerrado pues

$$\mathring{\Omega} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < t < T\},$$
$$\overline{\Omega} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T\}.$$

Con esto en cuenta, damos la definición de solución de (3.1),

**Definición 19.** Una solución del problema mixto (3.1) es cualquier función

$$u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisface puntualmente (3.1) y que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2_x(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1_t(\overline{\Omega})$.

Esto es,

- $u$ es continua en $\overline{\Omega}$.
- Fijado cualquier $t \in (0, T]$, la función $u(x,t)$ vista como función de la variable $x$, definida en $[0, \pi]$ en $\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$. (En $x = 0$ y $x = \pi$, se entiende que estamos hablando de la derivada lateral por la derecha y la izquierda, respectivamente).
- Fijado cualquier $x \in [0, \pi]$, la función $u(x,t)$ vista como función de la variable $t$, definida en $(0, T]$ en $\mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$. (En $t = T$, se entiende que estamos hablando de la derivada lateral por la izquierda).

Una vez presentada esta definición, haremos un alto el camino para observar qué condiciones mínimas debería cumplir la $f$ supuesta la existencia de solución de (3.1), las conocidas como condiciones de compatibilidad.

En efecto, si suponemos $u$ dicha solución, ocurrirá que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Luego, $f(x) = u(x,0), \forall x \in [0,\pi]$ y, por tanto, $f \in \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R})$. Además, $f(0) = u(0,0) = 0$, $f(\pi) = u(\pi, 0) = 0$. En resumen,

$$f \in \mathcal{C}([0,\pi], \mathbb{R}), f(0) = 0, f(\pi) = 0, \tag{3.3}$$

serán las condiciones mínimas que $f$ ha de cumplir.

Tras este breve pero fundamental comentario acerca de las condiciones de compatibilidad, vamos con la unicidad y existencia de solución. Para la primera de ellas, la unicidad, recurriremos de nuevo a [4, pág. 146] donde se nos presenta el siguiente resultado sobre (3.1), basado en el principio del mínimo-máximo.

**Proposición 5.** *El problema (3.1) tiene, a lo sumo, una solución.*

A continuación, lo lógico parece ser preguntarse por la existencia de solución, pero a priori, podría ser atrevido aventurarse con el aspecto de alguna de ellas. Sin embargo, notamos que $u$ es una función de dos variables, por lo que probar con la forma más sencilla posible de solución puede parecer sensato, es decir, suponer que $u$ es una función en variables separadas del siguiente modo:

$$u(x,t) = X(x)Z(t),$$

para ciertas funciones $X : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Z : (0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dicho esto, que $u(x,t) = X(x)Z(t)$ sea solución de (3.1) significa que

$$X''(x)Z(t) = X(x)Z'(t), \quad 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \tag{3.4}$$

pero como nos interesan únicamente las soluciones no nulas, podemos suponer que $\exists x_0 \in [0, \pi]$, $t_0 \in (0, T]$ tal que $u(x_0, t_0) \neq 0$.

Entonces, definiendo

$$\frac{X''(x_0)}{X(x_0)} = \frac{Z'(t_0)}{Z(t_0)} = \lambda \in \mathbb{R},$$

haciendo $t = t_0$ en (3.4) y observando que las condiciones $u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0$, $0 < t \leq T$, se traducen en $X(0) = 0$ y $X(\pi) = 0$, llegamos al sistema

$$\begin{cases} X''(x) = \lambda X(x), \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Aquellos valores de $\lambda$ para los que este sistema tiene solución no trivial se llaman valores propios. En este caso son $\lambda_n = -n^2$, y así obtenemos la familia de funciones

$$X_n(x) = sen(nx), \quad 0 \leq x \leq \pi, \; n \in \mathbb{N}.$$

Análogamente para la función $Z(t)$ se llega a

$$Z'(t) = \lambda Z(t), \quad 0 < t \leq T,$$

que nos da como solución a la familia de funciones

$$Z_n(t) = e^{-n^2 t}, \quad 0 < t \leq T, \; n \in \mathbb{N}.$$

En resumen, obtenemos que la familia de funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)Z_n(t) = sen(nx) \cdot e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

es solución de

$$\left.\begin{array}{rc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T, \end{array}\right\}$$

pero, ¿y qué pasa con la condición $u(x,0) = f(x), 0 \le x \le \pi$? Pues bien, una primera obviedad será que si la función $f$, para un $n \in \mathbb{N}$ dado, es del siguiente modo:

$$f(x) = sen(nx),$$

entonces esa condición se cumplirá (pues justo ese es el valor de $u_n(x,0)$). Por tanto, dicho $u_n$ sería la única solución del problema (3.1) al completo. Lo dejamos recogido de modo más formal en la siguiente proposición.

**Proposición 6.** *Considerando el problema mixto*

$$\left.\begin{array}{rc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array}\right\}$$

*si para algún $n \in \mathbb{N}$, la función $f$ es de la forma*

$$f(x) = sen(nx),$$

*entonces, la función*

$$u_n(x,t) = sen(nx) \cdot e^{-n^2 t},$$

*es la única solución de dicho problema.*

Además, gracias a la linealidad de la ecuación del calor, si $f$ es una combinación lineal de $\{sen(nx) : n \in \mathbb{N}\}$ también se cumple lo siguiente:

**Proposición 7.** *Considerando el problema mixto*

$$\left.\begin{array}{rc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array}\right\}$$

*si para algún $m \in \mathbb{N}$, la función $f$ es de la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i sen(n_i x), \quad m \in \mathbb{N}, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$$

*entonces, la función*

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i sen(n_i x) \cdot e^{-{n_i}^2 t},$$

*es la única solución de dicho problema.*

Este último resultado nos muestra que si conseguimos expresar la función $f$ como combinación lineal finita de $\{sen(nx) : n \in \mathbb{N}\}$, entonces sabemos obtener la única solución del problema. El concepto de base Hilbertiana nos ayuda a dar una respuesta también para el caso de una combinación lineal infinita.

En efecto, recordamos de la sección anterior que

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

es base Hilbertiana del espacio de Hilbert que conforma $L^2(0,\pi)$ junto con el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\pi} f(x) g(x) dx, \quad \forall f, g \in L^2(0,\pi).$$

Por tanto, por lo visto en el Corolario (3), y teniendo en cuenta que $\mathcal{C}[0,\pi] \subset L^2(0,\pi)$, se tendrá que dada $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$,

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)) \right\rangle \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) dx \right) sen(n(\cdot)), \end{aligned}$$

entendiendo la convergencia de esta serie en sentido $L^2(0,\pi)$, esto es,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\pi} f(x) sen(kx) dx \right) sen(kx) \right|^2 dx = 0.$$

Pero recurriendo a [4, pág. 116] vemos que si a esa $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$ dada le suponemos también $f(0) = f(\pi) = 0$ y ser $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$ (existe una partición de $[0,\pi]$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = \pi$, tal que $f \in \mathcal{C}^1[t_{i-1}, t_i]$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$) tenemos asegurada también la convergencia uniforme en $[0,\pi]$.

Lo presentaremos más formalmente en el siguiente resultado. Pero antes, una observación necesaria.

*Observación* 4. Observemos que si $f$ es $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$, entonces $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$.

Para ello, notamos que $f$ es continua en cualquier intervalo abierto $(t_i, t_{i+1})$, $i = 1, \ldots, m-1$, de modo que los únicos puntos que requieren un estudio especial son los puntos $t_i$, $i = 1, \ldots, m-1$, de la partición. En efecto, considerando $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{m-1} < t_m = \pi$ la partición que hace que $f$ sea $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$, si tomamos los intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ y $[t_i, t_{i+1}]$, como sabemos que $f \in \mathcal{C}[t_i, t_{i+1}]$, entonces

$$\exists f'(t_i^-) \text{ y } \exists f'(t_i^+).$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(t_i+h)-f(t_i)}{h} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{h\to 0^-} f(t_i+h) = f(t_i),$$
$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_i+h)-f(t_i)}{h} \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lim_{h\to 0^+} f(t_i+h) = f(t_i),$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(t_i+h)-f(t_i)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(t_i+h)-f(t_i)}{h} \Longrightarrow f \text{ es continua en } t_i.$$

En resumen, $f$ es continua también en todos los puntos de la partición, concluyendo así que $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$. Por lo tanto, de ahora en adelante, cada vez que demos un resultado que exija que $f$ sea $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$, nos ahorraremos la hipótesis de continuidad, pues como acabamos de ver se deduce de lo primero.

**Proposición 8.** *Dada $f$ $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$ con $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

*uniformemente en $[0,\pi]$, donde los coeficientes $a_n$ vienen dados por*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Gracias a esta proposición, se tiene entonces que bajo dichas hipótesis en $f$, la función

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) e^{-n^2 t}$$

cumple la hasta ahora problemática condición de $u(x,0) = f(x), 0 \leq x \leq \pi$. Además, se puede comprobar que el resto de condiciones también son satisfechas (ver en [4, pág. 151]). Conformando así el siguiente teorema final.

**Teorema 12.** *Considerando el problema mixto*

$$\left.\begin{array}{rc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\}$$

*si la función $f$ satisface*

$$f(0) = 0, f(\pi) = 0 \text{ y además es } \mathcal{C}^1 \text{ a trozos en } [0,\pi],$$

*entonces, la función*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t),$$

*con*

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) dx \quad \text{y} \quad u_n(x,t) = sen(nx) e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*es la única solución de dicho problema.*

Tras este estudio del problema (3.1) la importancia del concepto de base Hilbertiana ha quedado más que manifiesta, pues si hacemos memoria, fue el hecho de que

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

fuese una base Hilbertiana del espacio $L^2(0,\pi)$ lo que nos aseguró que nuestra candidata a solución cumplía también la condición de $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq \pi$ para obtener así una solución del problema al completo.

## 3.2 Propagación del calor: problema con extremos de la varilla aislados.

Tras haber ya hecho un estudio del problema (3.1), haremos lo propio también con el problema (3.2).

Recordamos a continuación que el problema era el siguiente:

$$\left.\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{array}\right\}$$

Como ya hemos comentado, la interpretación física consiste en una varilla de longitud $\pi$, donde en este caso la condición impuesta sobre los extremos de la varilla se traduce como que por ellos no entra ni sale calor.

Al igual que con el problema anterior, lo primero será dejar ya constancia de a qué llamaremos solución del problema (3.2) mediante la siguiente definición.

**Definición 20.** Una solución del problema mixto (3.2) es cualquier función

$$u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R},$$

que satisface puntualmente (3.2) y que $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2_x(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1_t(\overline{\Omega})$.

El objetivo ahora será demostrar que, de nuevo, el concepto de base Hilbertiana vuelve a jugar un papel fundamental en la búsqueda de solución de este problema. Pero antes, recogemos el siguiente resultado en cuanto a la unicidad de solución de este problema.

**Proposición 9.** *El problema (3.2) tiene, a lo sumo, una solución.*

*Demostración.* Consecuencia del método de la Energía, desarrollado con detalle en [4, pág. 170]. □

Tras asegurarnos la unicidad de solución, para la existencia el procedimiento será análogo al comentando para el problema anterior. En efecto, buscaremos soluciones del tipo

$$u(x,t) = Y(x)Z(t),$$

para ciertas funciones $Y : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y $Z : (0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$,

y procediendo de manera similar al problema anterior, se llega a que la relación de funciones

$$u_n(x,t) = Y_n(x)Z_n(t) = cos(nx) \cdot e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

cumplen la ecuación del calor y la concidición

$$\frac{\partial u_n(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_n(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad \text{para } 0 < t \leq T.$$

Por tanto, se tiene el resultado siguiente.

**Proposición 10.** *Considerando el problema*

$$\left.\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\}$$

*si para algún $n \in \mathbb{N}$, la función $f$ es de la forma*

$$f(x) = cos(nx),$$

*entonces, la función*

$$u_n(x,t) = cos(nx) \cdot e^{-n^2 t},$$

*es la única solución de dicho problema.*

De donde es fácil deducir que, por linealidad, también ocurre que

**Proposición 11.** *Considerando el problema mixto*

$$\left.\begin{array}{cc} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\}$$

*si para algún $m \in \mathbb{N}$, la función $f$ es de la forma*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} b_i cos(n_i x), \quad m \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_m \in \mathbb{R}, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$$

*entonces, la función*

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} b_i cos(n_i x) \cdot e^{-{n_i}^2 t},$$

*es la única solución de dicho problema.*

Al igual que en el problema anterior, nos damos cuenta de que si expresamos $f$ de ese modo particular, entonces tenemos la única solución de (3.2). Lo que nos lleva otra vez a la pregunta de ¿puede siempre expresarse de este modo la función $f$? La respuesta a esta pregunta de nuevo pasará por el uso de bases Hilbertianas, pues usaremos el hecho ya comentado en la sección anterior de que

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(nx) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

también es una base Hilbertiana de $L^2(0,\pi)$. Por tanto, por el Corolario (3) y el hecho de que $\mathcal{C}[0,\pi] \subset L^2(0,\pi)$, tenemos que dada $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$,

$$\begin{aligned} f &= \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle f, \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)) \right\rangle \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)cos(nx)dx \; cos(n(\cdot)), \end{aligned}$$

entendiendo esta convergencia en el sentido $L^2(0,\pi)$.

No obstante, al igual que en el caso del problema anterior, recurrimos a un resultado que puede verse demostrado en [4, pág. 120], que nos dirá bajo qué condición podemos asegurar también la convergencia uniforme de la función $f$. Dicho resultado lo presentamos a continuación:

**Proposición 12.** *Dada $f \in \mathcal{C}[0,\pi]$, con $f$ $\mathcal{C}^1$ a trozos en $[0,\pi]$,*

*entonces*

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx)$$

*uniformemente en $[0,\pi]$, donde los coeficientes $b_n$ vienen dados por*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)cos(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Razonando de un modo análogo al problema anterior, esta proposición nos dice que bajo dichas suposiciones a $f$, la función

$$u(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx) e^{-n^2 t}$$

cumple la condición de $u(x,0) = f(x)$, $0 \leq x \leq \pi$. Como, además, se cumplen todas las demás condiciones para ser solución de (3.2) (ver [4] para detalles), tenemos el siguiente resultado:

**Teorema 13.** *Considerando el problema mixto*

$$\left.\begin{array}{lr} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) = f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right\}$$

*si la función $f$ es $C^1$ a trozos en $[0,\pi]$, entonces, la función*

$$u(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x,t),$$

*con*

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) cos(nx) dx \quad \text{y} \quad u_n(x,t) = cos(nx) e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

*es la única solución de dicho problema.*

El estudio de este nuevo problema vuelve a mostrar la importancia de las bases Hilbertianas. En este caso se usa una base distinta a la empleada en el problema anterior, quedando así de manifiesto que la resolución de estos problemas ha dependido (lejos de lo que podríamos haber esperado al principio) de encontrar una base Hilbertiana conveniente del espacio $L^2(0,\pi)$, haciéndose así más que evidente la importancia del concepto de base Hilbertiana.

Como comentario final, si estamos interesados en profundizar más en este tema y hacerlo con una perspectiva más amplia de la que hemos tenido en este trabajo podemos consultar [18], un texto clásico de culto en lo que concierne a la Ecuación del Calor.

# Bibliografía


[1] María Dolores Acosta, Antonio Moreno, and Camilo Aparicio. Apuntes de Análisis Matemático I. https://analisismatematico.ugr.es/pages/profesorado/fotos/apuntesanmatienero2010madoloresascostavigil/!, 2010.

[2] Thomas Scott Blyth and Edmund F Robertson. *Basic linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2002.

[3] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer, 2011.

[4] Antonio Cañada Villar. *Series de fourier y aplicaciones: un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos*. Ediciones Pirámide, 2002.

[5] Antonio Cañada Villar. Fourier y sus coeficientes. *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, SEMA*, vol. 36: pág. 125–148, 2006.

[6] Antonio Cañada Villar. Existencia de Bases Hilbertianas. https://www.ugr.es/~acanada/docencia/matematicas/analisisfuncional/miobaseshilbertianas.pdf, 2015.

[7] Antonio Cañada Villar. Notas docentes de análisis funcional, Noviembre, 2021. Disponible en PRADO.

[8] Carlos S. Chinea. Teorema de la Base en Espacios Vectoriales. http://casanchi.org/mat/teoremabase01.pdf, 2018.

[9] Jean Dieudonné. *History of functional analysis*. Elsevier, 1983.

[10] Eduard Kontorovich. Baire's Theorem and its Applications. https://u.math.biu.ac.il/~megereli/Edi050509.pdf, 2020.

[11] Luis Miguel Merino Gonzalez and Evangelina Santos Aláez. *Algebra lineal con métodos elementales. 3a*. Ediciones Paraninfo, SA, 2021.

[12] Juan Ojeda and Nelson Hernández. Teorema de Löwing. https://www.redalyc.org/pdf/707/70735858007.pdf, 2015.

[13] Rafael Payá Albert. Apuntes de Complitud. https://www.ugr.es/~rpaya/documentos/AnalisisI/2014-15/, 2014.

[14] Francisco Javier Pérez González. Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable. https://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf, 2000.

[15] Francisco Javier Pérez González. Análisis funcional en espacios de Banach. https:

//digibug.ugr.es/bitstream/handle/10481/75701/Analisis_Funcional_en_Espacios_de_Banach.pdf?sequence=1&isAllowed=y, 2019.

[16] Mariano Suárez-Álvarez. Lema de Zorn. http://mate.dm.uba.ar/~aldoc9/Clases/2019/Calculo/Notas/zorn.pdf, 2019.

[17] Andrei Nikolaevich Tikhonov and Aleksandr Andreevich Samarskii. *Ecuaciones de la física matemática*. Mir, 1980.

[18] David Vernon Widder. *The heat equation*. Academic Press, 1976.

[19] Antoni Zygmund. *Trigonometric series*. Cambridge University Press, 2002.