FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

EL TEOREMA DE BOLZANO Y SISTEMAS DE ECUACIONES

Trabajo presentado por José Félix Sánchez Martínez

Grado en Matemáticas de la Universidad de Granada

Supervisado por:
Antonio Cañada Villar

Índice general

Introducción

El trabajo que vamos a desarrollar a continuación se titula "El Teorema de Bolzano y sistemas de ecuaciones". Los puntos a abordar a lo largo de este trabajo son:

- El Teorema de Bolzano. El Teorema de Bolzano para una ecuación escalar en varias variables.
- El Teorema de Poincaré-Miranda. El caso de la bola euclídea.
- El grado topológico de Brouwer. Generalizaciones del Teorema de Bolzano usando el grado topológico.

El desarrollo del presente trabajo tiene como objetivo poner de manifiesto la dificultad de la extensión a sistemas de ecuaciones en lo que se refiere a garantizar la existencia de solución. Tras presentar las distintas dificultades y motivaciones, mostraremos el grado topológico de Brouwer, una potente herramienta que nos permite, bajo ciertas condiciones, garantizar la existencia de solución de la ecuación $f(x) = y$, con $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ aplicación continua e $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

Los objetivos a alcanzar en este trabajo son:

- Analizar diversos ejemplos que hagan reflexionar al alumno y que motiven desarrollos teóricos posteriores.
- Familiarizarse con las ideas topológicas fundamentales en el Teorema de Bolzano para una ecuación en una o varias variables.
- Plantear con ejemplos concretos, las dificultades de las posibles extensiones al caso de sistemas de ecuaciones.
- Sistemas de ecuaciones en rectángulos y bolas. Generalizaciones a dominios generales.

Estos objetivos han sido alcanzados. Las dificultades que se han presentado a lo largo del desarrollo del trabajo han sido la familiarización con el lenguaje "LaTeX" y con el programa "Geogebra", además de las dudas que me han surgido y que han sido resueltas por mi tutor Antonio Cañada.

El Teorema de Bolzano es un resultado muy útil en orden a probar la existencia de soluciones para una ecuación dada por una función real, continua y de una variable en un intervalo y que tome valores positivos y negativos. Este resultado ya era conocido antes de que Bolzano lo publicara, de hecho, ya había sido probado, pero la prueba que existía hasta entonces provenía de una construcción geométrica y fue Bolzano el que hizo la primera demostración puramente analítica del teorema. Esto no fue casualidad, pues Bolzano llamó la atención sobre la necesidad de demostrar muchas proposiciones aparentemente evidentes, además buscaba un nuevo modo de desarrollar el análisis, quería liberar los conceptos de límite, convergencia y derivada de nociones geométricas, sustituyéndolas por conceptos puramente analíticos. Sin embargo, su obra no tuvo la influencia que merecía por su rigor y profundidad.

El Teorema de Bolzano es un resultado muy conocido y usado, las hipótesis son sencillas y fáciles de entender. En el estudio de ecuaciones en $\mathbb{R}$ nos encontramos una gran variedad de éstas, entre ellas, ecuaciones que se pueden resolver con un simple cálculo o con un cambio de variable, sin embargo hay muchas otras situaciones más complicadas, como el caso de ecuaciones que tienen soluciones reales y éstas no puedan obtenerse explícitamente, es en estas situaciones donde el Teorema de Bolzano tiene su utilidad.

Las ideas básicas del Teorema de Bolzano pueden extenderse, de manera casi directa, al caso de una ecuación en varias variables independientes, aunque algunos conceptos topológicos del espacio euclídeo n-dimensional (como la conexión), comienzan ya a ser necesarios. No obstante, si además de la existencia para la ecuación escalar en varias variables, consideramos la multiplicidad de soluciones, la situación puede ser completamente distinta al caso escalar.

La situación es radicalmente distinta (y poco conocida) si tratamos con sistemas de varias ecuaciones con varias incógnitas. Para probar la existencia de soluciones para funciones escalares es fundamental el hecho de que la imagen de la función f tome valores en $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^-$, sin embargo, en el estudio de sistemas de ecuaciones la idea de que la imagen de f tome valores en los 2^n subconjuntos correspondientes, no va a ser relevante, lo importante es que la función f tenga un comportamiento adecuado en la frontera topológica del dominio. En este trabajo llevamos a cabo una iniciación a este tema, comenzando por el Teorema de Bolzano, tras esto, pasaremos a mostrar el llamado Teorema de Poincaré-Miranda para rectángulos n-dimensionales (Poincaré lo anunció en 1881, dio una demostración detallada en 1886 y posteriormente en 1940, Miranda probó su equivalencia con el Teorema del punto fijo de Brouwer). A continuación se tratará el caso de bolas n-dimensionales, para concluir con una breve introducción sobre la teoría del grado topológico de Brouwer, una de las herramientas más útiles que se han creado en el siglo XX para estudiar problemas no lineales. Cabe destacar que el grado topológico fue desarrollado poco a poco, pues surge al relacionar resultados en trabajos matemáticos anteriores.

Muchos problemas en análisis se reducen a la resolución o estudio de ecuaciones de la forma $f(x) = y$, con $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, Ω abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ aplicación continua e $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash f(\partial\Omega)$.
Existen diferentes métodos para el estudio de esta ecuación. La aplicación de un método u otro dependerá de la información que queramos obtener (existencia de solución, unicidad, propiedades que verifique, etc).
En general, no es posible encontrar las soluciones de manera explícita, por lo que será necesario realizar un estudio de las propiedades cualitativas de estas. Este es el camino que toma el grado topológico de Brouwer, ya que nos proporciona información sobre la existencia de soluciones y sobre su multiplicidad.

Con el siguiente ejemplo podemos ver la idea básica:
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continua. ¿Qué información podemos obtener sobre las soluciones de la ecuación $f(x) = y$ en (a, b), utilizando sólo los valores de f en la frontera de $[a, b]$? Si tomamos f como la aplicación identidad, la ecuación anterior tendrá solución en (a, b) si $y \in (a, b)$. Para f general, la ecuación anterior tiene solución si la curva $f(x) = z$ puede "deformarse de forma continua" en la curva $z = x$, siempre que en la deformación, ningún punto de la frontera de $[a, b]$ cruce la línea $z = y$.
Estas dos ideas las podemos generalizar y constituyen la base de la definición de grado topológico de la aplicación f, relativo a (a, b) y a y. Como ya hemos dicho, esta herramienta es muy útil, sin embargo, debido a su gran generalidad tiene sus limitaciones.

La propuesta de trabajo me resultó muy interesante desde el inicio, además Antonio Cañada me facilitó dos artículos suyos para poder tener una idea más detallada del tema a tratar, el enfoque que se le iba a dar al trabajo y cómo se iba a dividir dicho trabajo. La teoría del grado topológico de Brouwer no se trata en el grado en Matemáticas, y por ello me gustó la idea de poder iniciarme y profundizar en un tema desconocido para mí.
Este trabajo ha sido muy formativo, pues partiendo de una herramienta básica como es el Teorema de Bolzano, he conocido una herramienta general de gran utilidad como es el grado topológico de Brouwer, este camino lo he recorrido mediante las múltiples tutorías con Antonio Cañada y consultando las fuentes bibliográficas proporcionadas por él, además de otras que he encontrado.

Las principales fuentes consultadas han sido, en su mayor parte, los artículos de mi tutor Antonio Cañada [10], [11] y [13].

Los programas usados han sido LaTeX, Maxima y Geogebra, este dos últimos han sido con los que he realizado las gráficas.

En conclusión, a lo largo del trabajo se muestran resultados para obtener la existencia de soluciones en ecuaciones de una y varias variables y en sistemas de ecuaciones.

En el capítulo 1, enuncio y demuestro el Teorema de Bolzano y muestro una versión de este teorema para ecuaciones escalares en varias variables.

En el capítulo 2, paso a estudiar la existencia de solución en sistemas de ecuaciones, esto lo llevo a cabo mostrando el Teorema de Poincaré-Miranda (pues es una extensión del Teorema de Bolzano) y el caso de la bola euclídea, el cuál surge de forma casi natural al pensar en dominios que carecen de caras. Aunque estos dos dominios son muy distintos (rectángulos y bolas), ambos son una generalización del Teorema de Bolzano. Estas generalizaciones no parecen tener relación, pero la teoría del "grado topológico de Brouwer" unifica estos casos.

En el capítulo 3, motivo la noción de grado topológico recurriendo de nuevo al Teorema de Poincaré-Miranda para introducir las homotopías, que serán una herramienta esencial en el transcurso de este capítulo. Muestro problemas que se nos plantean y soluciones a estos inconvenientes, tales como la dificultad de darle sentido a ciertas nociones en dimensiones superiores a uno o como la presentación de un enunciado cuya afirmación no va a ser cierta siempre, pero que nos dejar ver las hipótesis que debemos buscar y plantear para obtener el Teorema del grado. En este punto nos preguntamos cómo podemos probar, en general, la existencia de ceros para una función definida en un espacio de dimensión finita n y con n funciones componentes. Para responder a esto, primero defino el grado para funciones reales y tras esto, extendemos la definición a cualquier función continua de varias variables, para ello definimos el número entero $d_B(f, \Omega, y)$ en tres etapas, en las que mostramos las ideas presentes para la demostración y damos pequeñas pinceladas sobre como se lleva a cabo la prueba.

Finalmente, enuncio cuatro teoremas, dos de ellos son resultados que generalizan el Teorema de Bolzano. La primera generalización es muy importante pues nos garantiza la existencia de solución bajo unas determinadas condiciones. Además, cabe destacar que los dominios $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ considerados pueden ser cualquier subconjunto abierto y acotado. Los otros dos teoremas son el Teorema de Poincaré-Miranda y el Teorema del punto fijo de Brouwer, los cuáles demuestro usando el grado topológico.

Introduction

The work developed below is entitled "Bolzano's Theorem and Systems of Equations". Points to be addressed throughout the work are as follows:

- Bolzano's Theorem. Bolzano's Theorem for a scalar equation in several variables.
- Poincaré-Miranda Theorem. The case of an Euclidian ball.
- Brouwer's topological degree. Generalizations of Bolzano's Theorem using the topological degree.

The development of the present work aims to show the difficulty of the extension to equation systems in guaranteeing the existence of a solution. After presenting the distinct difficulties and motivations, we will present Brouwer's topological degree theory, a powerful tool that allows us, under certain conditions, to guarantee the existence of a solution to the equation $f(x) = y$, with $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, Ω open and bounded, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ a continuous function and $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash f(\partial\Omega)$.

The objectives to be reached in this work are:

- To show several examples that make the student reflect and motivate theoretical developments afterwards.
- Familiarization with the fundamental topological ideas in Bolzano's Theorem for an equation in one or more variables.
- To present with concrete examples the difficulties in the possible extensions to the case of systems equations.
- Systems equations in rectangles and balls. Generalizations to general domains.

These objectives have been reached. The difficulties that have presented themselves throughout the development of this work have been familiarization with the "LaTeX" language and with the "Geogebra" program.

Bolzano's Theorem is a very useful result in proving the existence of solutions for equations given by a real function, continuous and with a given variable in an interval that has positive and negative values. This result was known before Bolzano published it; in fact it had already been proven, but the proof that had existed up until then came from a geometric construction, and it was Bolzano who made the first purely analytic proof of the theorem. This was no accident, as Bolzano drew attention to the need to prove many seemingly obvious propositions, but he also sought a new way of developing analysis. He wanted to free the concepts of limit, convergence and derivative from geometric notions, substituting them with purely analytic concepts. His work did not, however, have the influence it deserved for its rigour and depth.

Bolzano's Theorem is a well known and much used result; the hypotheses are simple and easy to understand. In the study of $\mathbb{R}$ equations, we find a great variety of these, among them, equations that can be resolved with a simple calculation or variable change. There are, however, many other more complicated situations, like the case of equations that have real solutions that cannot be explicitly obtained, and it is in these situations where Bolzano's Theorem has its utility.

The basic ideas of Bolzano's Theorem can be extended, in an almost direct way, to the case of an equation with various independent variables, even though some topological concepts of Euclidean n-dimensional space (like connection) begin to be necessary. Despite this, if besides the existence of the scalar equation in various variables we consider the multiplicity of solutions, the situation can be completely different to the scalar case.

The situation is radically different (and little known) if we deal with systems of several equations with various unknowns. To prove the existence of solutions for scalar functions it's fundamental that the image of function f take values in $\mathbb{R}^+$ and in $\mathbb{R}^-$, however, in the study of systems equations the idea that the image of f take values in the corresponding 2^n subsets is not relevant, what's important is that function f has adequate behaviour in the topological boundary of the domain. In this paper we undertake an introduction to this topic, starting with Bolzano's Theorem, after this we will turn to the so-called Poincaré-Miranda Theorem for n-dimensional rectangles (Poincaré announced it in 1881, gave a detailed proof in 1886, and in 1940, Miranda proved its equivalence with the Brouwer fixed-point theorem.) Next we will deal with the case of n-dimensional balls, to conclude with a brief introduction on Brouwer's topological degree theory, one of the most useful tools created in the 20th century to study non-linear problems. It remains to note that Brouwer's topological degree was developed gradually, arising by linking results from previous mathematical works.

Many problems in analysis are reduced to the resolution or study of equations of the form $f(x) = y$ with $x \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, Ω open and bounded, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ a continuous function and $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash f(\partial\Omega)$.
There are different methods with which to study this equation. The application of one method or another will depend on the information we want to obtain (existence of a solution, uniqueness, properties to verify, etc).
In general, it is not possible to find solutions in an explicit way, so it will be necessary to undertake a study of the qualitative properties. This is the route taken by Brouwer's topological degree, as it provides information about the existence of solutions and their multiplicity.

With the following example we can see the basic idea:
Let $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ be a continuous function. What information can we get about the solutions of the equation $f(x) = y$ in (a, b), using only the values of f on the boundary of $[a, b]$? If we take f as the application identity, the above equation will have a solution in (a, b) if $y \in (a, b)$. For general f, the above equation has a solution if the curve $f(x) = z$ it can "deform itself continuously" in the curve $z = x$, as long as in the deformation, no point of the $[a, b]$ boundary crosses the $z = x$ line.
These two ideas can be generalized and form the basis of the definition of topological degree of the f application, relative to (a, b) and to y. As we've said, this tool is very useful, but due to its great generality it has its limitations.

The work proposal was very interesting for me from the beginning, and Antonio Cañada provided me with two of his articles to be able to have a more detailed idea of the subject, the focus of the work and how to divide it. Brouwer's topological degree is not dealt with in the Mathematics degree, and for this reason I liked the idea of being able to initiate myself and delve deeply into a subject unknown to me.
This work has been very educational; from beginning with Bolzano's Theorem, a basic tool, in Brouwer's topological degree I have come to know a general tool of great utility. I have made my way via multiple tutorials with Antonio Cañada, consulting the bibliographical sources he provided, besides others I found myself.

The principal sources consulted have been the articles published by my tutor Antonio Cañada [10], [11] and [13].

The programs used were LaTeX, Maxima and Geogebra, the last two I used to create the graphics.

In conclusion, throughout the work results are shown to obtain the existence of solutions in equations of one or various variables and in equation systems.

In Chapter 1, I enunciate and prove Bolzano's Theorem and show a version of this theorem for scalar equations in various variables.

In Chapter 2, I go on to study the existence of a solution in equation systems; I do this by showing the Poincaré-Miranda Theorem (a extension of Bolzano's Theorem) and the case of the Euclidian ball, which comes about in an almost natural way thinking about domains which lack faces. Even though these two domains are very distinct (rectangles and balls), both are generalizations of Bolzano's Theorem. These generalizations don't appear to be related, but the theory of "Brower's topological degree" unifies both cases.

In Chapter 3, I express the notion of topological degree, returning to the Poincaré-Miranda Theorem to introduce homotopies, which will be an essential tool in the course of this chapter. I signal the problems that confront us and solutions to these inconveniences, such as the difficulty in making sense of certain notions in more than one dimension, or the presentation of a statement whose affirmation will not always be true but which nonetheless allows us to see which hypothesis we should look to and how to undertake reaching the degree's theorem. At this point we ask ourselves how we can prove, generally, the existence of zeroes for a function defined in a space of finite dimension n and with n component functions. To answer this, I first define the degree for real functions, and then we extend the definition to any continuous function with various variables; for this we define the integer number $d_B(f, \Omega, y)$ in three stages, in which we show the present ideas for the proof and we sketch out how to undertake the proof.

Finally, I enunciate four theorems, two of them results that generalize Bolzano's Theorem. The first generalization is very important as it guarantees the solution existence under determined conditions. Besides this, it must be noted that the domains $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ considered can be any open and bounded subset. The other two theorems are the Poincaré-Miranda Theorem and Brouwer fixed-point theorem, which I prove using the topological degree.

Capítulo 1

El Teorema de Bolzano para ecuaciones escalares en una y varias variables

1.1. Algunos apuntes biográficos sobre Bolzano

Bernhard Bolzano (1781 – 1848) fue un matemático, lógico y filósofo nacido en Praga. Ocupó la cátedra de Filosofía de la Religión en la Universidad de Praga, pero después de 15 años fue destituido debido a sus ideales. Tras ser cesado se le acusó de herejía y se le prohibió publicar, aunque años después conseguiría una revocación parcial de dicho veto y solo se le prohibiría publicar sobre temas de naturaleza política o religiosa. Durante los siguientes años y hasta su muerte se dedicó a estudiar, continuó trabajando en su obra y siguió ocupando un papel importante en la vida intelectual del país.

La obra de Bolzano tardaría varias décadas en ser conocida, además en los años en que la desarrolló no tuvo la influencia que merecía por su rigor y profundidad. En sus trabajos matemáticos anticipó muchos de los conceptos que posteriormente redescubrieron y desarrollaron matemáticos como Cauchy, Weierstrass o Cantor.
El mérito de Bolzano reside en haber llamado la atención sobre la necesidad de demostrar muchas proposiciones aparentemente evidentes.
Más detalles sobre la biografía de Bolzano se pueden ver en [17] y [19].

1.2. Motivación previa al Teorema de Bolzano

En el estudio de ecuaciones nos encontramos una gran variedad de éstas, tenemos, entre otras:
Ecuaciones que se pueden resolver fácilmente con un simple cálculo, por ejemplo:

$$x^2 - 1 = 0$$

o ecuaciones que pueden ser resueltas con un cambio de variable, por ejemplo:

$i)$ $2^{x+2} - 2^{-x} + 3 = 0$ que mediante el cambio de variable $y = 2^x$ se puede resolver, obteniéndose la única solución $x = -2$.

$ii)$ $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ que mediante el cambio de variable $y = x^2$ se puede resolver, obteniéndose las soluciones $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$, $x = 3$.

$iii)$ $sen\left(\dfrac{x}{2}\right) + cos(x) - 1 = 0$ que mediante el cambio de variable $cos(2x) = 1 - 2sen\left(\dfrac{x}{2}\right)$ puede resolverse, obteniendo las infinitas soluciones $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Sin embargo, hay muchas otras situaciones más complicadas, como por ejemplo:

$i)$ $x^3 + x + 1 = 0$ que tiene una solución real, y por la regla de Ruffini las únicas soluciones racionales posibles son 1 y -1, y ninguna de ellas lo es.

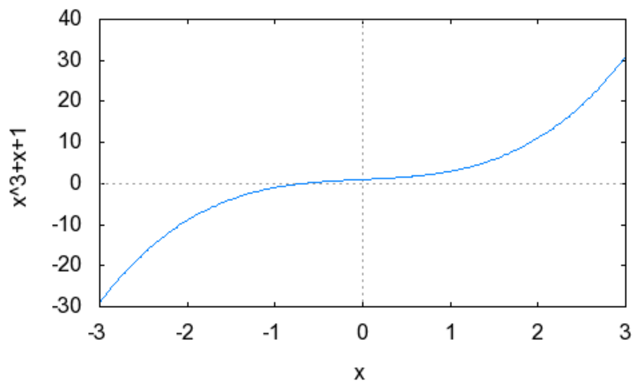


Figura 1.1: $x^3 + x + 1$

$ii)$ $e^x - x^4 = 0$ que tiene tres soluciones reales y no parece que ninguna de ellas se pueda obtener explícitamente.

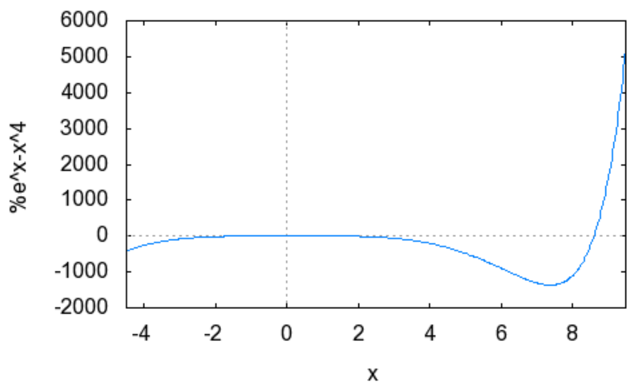


Figura 1.2: $e^x - x^4$

En estas situaciones el Teorema de Bolzano nos proporciona un buen método para probar la existencia de soluciones. Este teorema, junto con un estudio adicional de la monotonía de las funciones dadas, puede proporcionar un estudio completo y adecuado sobre las soluciones de dichas ecuaciones.

Bolzano inició el estudio cuidadoso de las propiedades de las funciones. Buscaba un nuevo modo de desarrollar el análisis, quería liberar los conceptos de límite, convergencia y derivada de nociones geométricas, sustituyéndolas por conceptos puramente analíticos.

En las siguientes líneas podemos percatarnos del rigor matemático que buscaba ([24], páginas 160 y 161):

[...] es una violación inaceptable del buen método el intentar derivar proposiciones pertenecientes a la matemática pura o general (es decir, aritmética, álgebra, análisis) a partir de consideraciones que pertenecen sólo a una parte aplicada (o especial) de ella: la geometría.

[...] estrictamente exigimos sólo esto: que los ejemplos nunca sean empleados como argumentos en lugar de las demostraciones, y que la esencia de una deducción nunca esté basada sobre el uso meramente metafórico de frases o sobre sus ideas relacionadas, de forma que la deducción misma quedaría vacía tan pronto como éstas fueran cambiadas.

Bolzano dió la definición apropiada de continuidad, a saber, $f(x)$ *es continua en un intervalo si en cualquier* x *del intervalo la diferencia* $f(x+\omega)-f(x)$ *se puede hacer tan pequeña como se desee tomando* ω *suficientemente pequeña ([24], página 162).*

Cabe destacar que Bolzano estableció la existencia de una cota superior mínima para un conjunto no vacío acotado superiormente de números reales, cuyo enunciado preciso es: *Si una propiedad* M *no se aplica a todos los valores de una cantidad variable* x*, sino a todos aquellos que son más pequeños que una cierta* u*, siempre hay una cantidad* U *que es la mayor de las que se puede afirmar que toda* x *más pequeña posee la propiedad* M *([24], página 174).*

En 1817 Bolzano publicó en un artículo bajo el título de *Purely analytic proof of the theorem that between any two values which give results of opposite sign there lies at least one real root of the equation* [5], la primera demostración puramente analítica del resultado conocido hoy en día como Teorema de Bolzano.
Este resultado ya era conocido antes de que Bolzano lo publicara, de hecho ya había sido probado y el propio Bolzano lo consideraba una obviedad, pero la prueba que existía hasta entonces provenía de una construcción geométrica.

1.3. El Teorema de Bolzano

1.3.1. Conceptos previos ([3])

- Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y $x \in A$. Se dice que f es **continua** en el punto x cuando, para cualquier sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A que converja a x, se tiene que la sucesión $\{f(x_n)\}$ converje a $f(x)$.

- **Caracterización** $(\varepsilon - \delta)$ **de la continuidad:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función y fijemos $x \in A$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$i)$ La función f es continua en el punto x.

$ii)$ Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A, que converja a x, se tiene que $\{f(x_n)\} \to f(x)$.

$iii)$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : y \in A, |y - x| < \delta \Longrightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon$

- Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ decimos que:
  - A tiene **máximo** cuando $\exists y \in A : y \geq a, \forall a \in A$.
  - A tiene **mínimo** cuando $\exists x \in A : x \leq a, \forall a \in A$.
  - A está **mayorado** cuando $\exists y \in \mathbb{R}$ tal que $y \geq a$, $\forall a \in A$. En tal caso decimos también que y es un mayorante de A.
  - A está **minorado** cuando $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$, $\forall a \in A$. En tal caso decimos también que x es un minorante de A.
  - A está **acotado** cuando está mayorado y minorado.

- Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\alpha = sup\ A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \alpha, \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

  A $sup\ A$ se le denomina **supremo** de A.

- Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}$, se tiene:

$$\beta = inf\ A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \beta, \ \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists a \in A : a < \beta + \varepsilon \end{cases}$$

  A $inf\ A$ se le denomina **ínfimo** de A.

- **Conservación del signo:** Sea $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua en un punto $x \in A$. Si $f(x) > 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que, para todo $y \in A$ que verifique $|y-x| < \delta$, se tiene $f(y) > 0$. Análogamente, si $f(x) < 0$, existe $\delta > 0$ tal que $y \in A$, $|y - x| < \delta \Rightarrow f(y) < 0$.

1.3.2. Enunciado y demostración

El Teorema de Bolzano nos aporta un buen método para probar la existencia de soluciones de ecuaciones escalares en una variable. Pasamos ahora a enunciar y demostrar dicho teorema, véase [3]:

Teorema 1.1. ***(Teorema de Bolzano)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, verificando que $f(a) < 0 < f(b)$. Entonces $\exists c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración:

Consideramos el conjunto $\mathbf{C} = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$, que no es vacío ya que $a \in \mathbf{C}$, y está acotado, por estar incluido en el intervalo $[a, b]$. Tomando $c = sup\ \mathbf{C}$, tenemos claramente que

$c \in [a, b]$ y la demostración se concluirá probando que $f(c) = 0$, pues ello también implicará que $c \neq a$ y $c \neq b$. Veremos que, tanto si $f(c) < 0$ como si $f(c) > 0$, se llega a contradicción.

Supongamos primeramente que $f(c) < 0$. Como por hipótesis f es continua en el punto c, la propiedad de conservación del signo nos proporciona un $\delta > 0$ verificando que, para $x \in [a, b]$ con $|x - c| < \delta$ se tiene $f(x) < 0$. Utilizando esto es claro que $b \geq c + \delta$, pues en otro caso sería $|b - c| = b - c < \delta$ y entonces tendríamos $f(b) < 0$ en contra de la hipótesis. Tomando entonces $x \in]c, c + \delta[$ tenemos $x \in [a, b]$ y $|x - c| = x - c < \delta$ luego $f(x) < 0$ y $x \in \mathbf{C}$, esto es una contradicción, ya que $x > c = sup\ \mathbf{C}$.

Supongamos entonces que $f(c) > 0$ por tanto $c \notin \mathbf{C}$. Aplicando de nuevo la conservación del signo obtenemos $\delta > 0$, tal que $f(x) > 0$ siempre que $x \in [a, b]$ verifique $|x - c| < \delta$. Entonces, para $x \in \mathbf{C}$ se deberá tener $\delta \leq |x - c| = c - x$ (porque sino no se verificaría la propiedad de conservación del signo puesto que $x \in \mathbf{C}$), de donde $x \leq c - \delta$. Obtenemos así que $c - \delta$ es mayorante de $\mathbf{C}$, lo cual es una contradicción, pues $c - \delta < c = sup\ \mathbf{C}$. $\square$

Nota: Evidentemente, la condición del Teorema 1.1 es cierta si $f(a) > 0 > f(b)$ (basta tomar $-f$, en lugar de f, y aplicar el Teorema 1.1).

1.4. El Teorema para una ecuación escalar en varias variables

1.4.1. Conceptos previos ([1], [3])

- Una **distancia** definida en un conjunto no vacío E es una función $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+ = [0, +\infty)$ que verifica:
  - $i)$ Para $x, y \in E$, $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
  - $ii)$ $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in E$
  - $iii)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z), \forall x, y, z \in E$
- Un **espacio métrico** es un conjunto no vacío E dotado de una distancia $d : E \times E \to \mathbb{R}_0^+$, esto es, el par ordenado (E, d).
- Un subconjunto O de un espacio métrico (E, d) se dice **abierto** si verifica que $\forall a \in O$, $\exists r > 0$ tal que $B(a, r) \subset O$, donde $B(a, r) = \{x \in E : d(a, x) < r\}$ es la bola abierta de centro a y radio r.
- Un subconjunto F de E es **cerrado** si su complementario es abierto.
- Un espacio métrico E es **conexo** cuando no se puede expresar como unión de dos subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos; en otras palabras, $\emptyset$ (conjunto vacío) y E son los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados.
- Un subconjunto A de un espacio métrico E es conexo, cuando A es un espacio métrico conexo con la distancia inducida por la de E.
- Para un espacio métrico E , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

$i)$ E es conexo.

$ii)$ La imagen de toda función continua de E en $\mathbb{R}$ es un intervalo.

$iii)$ Toda función continua de E en $\{0, 1\}$ es constante.

- **Teorema del Valor Intermedio:** Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo no vacío y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en I. Entonces $f(I)$ es un intervalo.

  Demostración:

  Debemos comprobar que si α,$\beta \in f(I)$ y $\alpha < \lambda < \beta$, entonces $\lambda \in f(I)$. Queda así de manifiesto la propiedad de f que estamos demostrando: si toma en I dos valores distintos, ha de tomar también en I todos los valores intermedios.
  Sean x,$y \in I$ tales que $f(x) = \alpha$ y $f(y) = \beta$. Distinguiremos dos casos, según la relación entre x e y.

  Si $x < y$ consideramos el intervalo cerrado y acotado $[x, y]$, observando que, por ser I un intervalo, se tiene $[x, y] \subset I$. Podemos entonces definir una función $g : [x, y] \to \mathbb{R}$ por

  $$g(t) = f(t) - \lambda, \ \ \forall t \in [x, y]$$

  Claramente g es continua en $[x, y]$, verificando que $g(x) = \alpha - \lambda < 0$, $g(y) = \beta - \lambda > 0$. Por el Teorema de Bolzano, existe $c \in]x, y[$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$.

  En el caso $y < x$ usamos el intervalo $[y, x] \subset I$ y la función $g : [y, x] \to \mathbb{R}$ dada por

  $$g(t) = \lambda - f(t) \ \ \forall t \in [y, x]$$

  que es continua en $[y, x]$ con $g(y) = \lambda - \beta < 0$ y $g(x) = \lambda - \alpha > 0$, obteniendo de nuevo un punto $c \in]y, x[$ tal que $g(c) = 0$, con lo que $\lambda = f(c) \in f(I)$. □

- El teorema del valor intermedio nos dice que todo intervalo no vacío es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, pues verifica la afirmación $ii)$ del enunciado anterior. Recíprocamente, si E es un subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, la inclusión $f : E \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x$ para todo $x \in E$, es continua, luego $f(E) = E$ es un intervalo. Tenemos así una caracterización topológica de los intervalos:

  Un subconjunto de $\mathbb{R}$ es conexo si, y sólo si, es un intervalo.

- **Teorema:** (Conservación de la conexión por la continuidad). Sean E, F dos espacios métricos y $f : E \to F$ una función continua. Si E es conexo, entonces $f(E)$ es un subconjunto conexo de F.

1.4.2. Existencia de soluciones en varias variables

El estudio del Teorema de Bolzano para ecuaciones escalares de varias variables requiere de la necesidad de utilizar ciertas propiedades topológicas que hemos definido previamente.
Esto es así porque para funciones de una variable, las propiedades analíticas más importantes que permiten probar el Teorema de Bolzano son dos: la existencia de supremo de un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente (propiedad que no tiene sentido para el caso de

más de una variable) y la propiedad local de conservación del signo para funciones continuas no nulas.
Por otro lado, las propiedades topológicas más importantes que permiten probar el Teorema de Bolzano son también dos: que un subconjunto no trivial de $\mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo (que no tiene traducción a dimensión superior) y la propiedad de que las funciones continuas aplican subconjuntos conexos en subconjuntos conexos.

Por tanto, respecto a la existencia de soluciones, podemos usar ideas similares si consideramos la ecuación escalar en varias variables $f : \mathbb{R}^{\rm n} \to \mathbb{R}$, esto es:

Teorema 1.2. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^{\rm n}$ y $f : \mathbb{R}^{\rm n} \to \mathbb{R}$ una función continua, verificando $f(a) < 0 < f(b)$, entonces la ecuación $f(x_1, ..., x_n) = 0$ tiene al menos una solución en el "segmento abierto" de $\mathbb{R}^{\rm n}$ definido como*

$$(a, b)_{\mathbb{R}^{\rm n}} = \{(1 - \lambda)a + \lambda b, \lambda \in (0, 1)\}$$

Para la prueba de este resultado reducimos el problema a uno unidimensional, para ello basta considerar la función continua $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida como $g(\lambda) = f((1 - \lambda)a + \lambda b)$ y observamos que $g(0) = f(a) < 0 < f(b) = g(1)$, y finalmente aplicamos el Teorema 1.1 (ya que estamos en las hipótesis del Teorema).

Como ejemplo podemos tomar la ecuación $x_1^{2m+1} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, con $m \in \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{R}^{\rm n} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Esta ecuación tiene solución ya que:

$$\lim_{x_1 \to +\infty} x_1^{2m+1} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = +\infty \;\; y \;\; \lim_{x_1 \to -\infty} x_1^{2m+1} + g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -\infty.$$

Por ejemplo, para $n = 4$ y $m = 2$ tenemos el caso de la ecuación

$$x_1^5 + \frac{20}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} + cos(x_3^2 x_4^3) = 0.$$

Cabe destacar que si consideramos no solo la existencia, sino también la multiplicidad de soluciones, la situación puede ser completamente distinta al caso escalar ($n = 1$). Veamos un caso en el que esto ocurre:

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable con $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación $f(x) = 0$, tiene como mucho una solución, porque f es estrictamente creciente.
Sin embargo, si tomamos $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = 7 + 2x^3 + 4y^5 + x + y$, la ecuación $f(x, y) = 0$ tiene infinitas soluciones, aunque sus derivadas parciales $f_x(x, y) = 6x^2 + 1$ y $f_y(x, y) = 20y^4 + 1$ son estrictamente positivas en $\mathbb{R}^2$.

Este ejemplo se da debido a que si tomamos $f : \mathbb{R}^{\rm n} \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, entonces su derivada f' es tal que $f' : \mathbb{R}^{\rm n} \to \mathbb{R}^{\rm n}$ y no podemos definir, de una forma adecuada, el significado de que $f'(x)$ sea positiva para $x \in \mathbb{R}^{\rm n}$.

Capítulo 2

Sistemas de ecuaciones. Ejemplos, dificultades y primeras ideas

2.1. Introducción y conceptos previos

- El **producto escalar de dos vectores** $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ es, por definición, el número real $\langle x, y\rangle$ dado por

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

- Al par $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ se le llama el **espacio euclídeo** (de dimensión n), donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$, esto es, la aplicación $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$\|x\|_2 : \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \;\; (x \in \mathbb{R}^n),$$

  verificando las siguientes propiedades:

  $i)$ Para $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

  $ii)$ $\|\lambda x\|_2 = |\lambda|\|x\|_2 \; \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}$

  $iii)$ $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

- La **distancia euclídea** en $\mathbb{R}^n$ es la aplicación

$$d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_0^+$$

  definida por

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 \quad (x, y \in \mathbb{R}^n),$$

  que verifica:

  $i)$ Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d_2(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

  $ii)$ $d_2(x, y) = d_2(y, x), \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$iii)$ $d_2(x,z) \leq d_2(x,y) + d_2(y,z), \forall x,y,z \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$

- Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. La **frontera topológica** de Ω, $\partial\Omega$, se define como el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ tales que para cada $r > 0$, la bola abierta euclídea con centro x y radio r, $B_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : d_2(x,y) < r\}$, contiene puntos de Ω y puntos del complementario $\mathbb{R}^{\mathrm{n}} \backslash \Omega$.

En este capítulo consideramos sistemas de ecuaciones del tipo

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1(x_1,\ldots,x_n) = 0 \\ \ldots \\ f_n(x_1,\ldots,x_n) = 0 \end{array} \right.$$

En una primera toma de contacto para intentar estudiar la existencia de soluciones en sistemas de ecuaciones, veamos el siguiente ejemplo:

Sea $f : [0,2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función dada por $f(x,y) = ((y^2+1)sen(x), (y^2+1)cos(x))$. La función $f(x,y)$ es continua. Además, su imagen $f([0,2\pi] \times \mathbb{R}) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \geq 1\}$ contiene puntos de los cuatro cuadrantes de $\mathbb{R}^2$. Sin embargo, la ecuación $f(x,y) = (0,0)$ no tiene solución.

Con este ejemplo vemos que aunque para funciones escalares era fundamental el hecho de que la imagen de la función f tomara valores en $\mathbb{R}^+$ y en $\mathbb{R}^-$, en el estudio de sistemas de ecuaciones la idea de que la imagen de f tome valores en los 2^n subconjuntos

$$\begin{gathered} \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}, \\ \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : x_1 < 0, x_2 > 0, \ldots, x_n > 0\}, \\ \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : x_1 > 0, x_2 < 0, \ldots, x_n > 0\}, \\ \ldots \\ \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : x_1 < 0, x_2 < 0, \ldots, x_n < 0\} \end{gathered}$$

no va a ser relevante. Además nos damos cuenta de que aunque $f([0,2\pi] \times \mathbb{R})$ es conexo, las propiedades de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}^2$ no son tan buenas como las de los subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ en orden a probar la existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones.

Como veremos en el capítulo siguiente, para probar la existencia de soluciones en sistemas de ecuaciones la idea clave es que la función f tenga un comportamiento adecuado en la frontera topológica del dominio.

Veamos ahora dos resultados muy ilustrativos que respaldan esta afirmación, que son el caso de un rectángulo (Teorema de Poincaré-Miranda) y el caso de la bola euclídea.

2.2. El Teorema de Poincaré-Miranda para rectángulos

Si cambiamos el intervalo de números reales $[a,b]$ por un subconjunto rectangular de $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ y sustituimos la hipótesis sobre el signo del Teorema de Bolzano por unas hipótesis adecuadas sobre el signo en las componentes de la función $f = (f_1, \ldots, f_n)$ obtenemos el Teorema de Poincaré-Miranda como veremos a lo largo de la sección.

La formulación general del Teorema de Poincaré-Miranda fue anunciada en 1881 por Poincaré y probada posteriormente en 1886 por él mismo (véase [23]). En 1940 Miranda probó su equivalencia con el Teorema del punto fijo de Brouwer (el cuál veremos en el capítulo 3) (véase [18]).

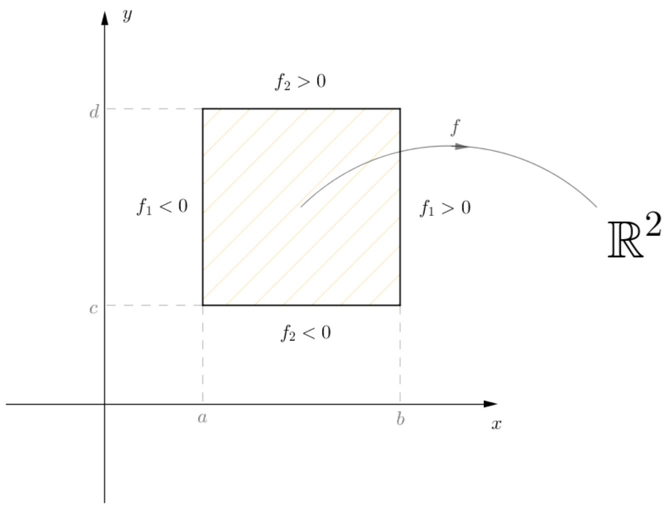
Comenzamos mostrando la versión del teorema en $\mathbb{R}^2$:

Este teorema es válido para funciones f continuas definidas en rectángulos y con valores en $\mathbb{R}^2$. Afirma que si cada componente f_i de f, toma valores con signo opuesto en los i-ésimos lados opuestos, entonces la ecuación $f(x, y) = (0, 0)$ tiene solución en el interior del rectángulo. Su enunciado riguroso es como sigue:

Teorema 2.1. ***(Teorema de Poincaré-Miranda en*** $\mathbb{R}^2$***)*** *Sea* $f : [a, b] \times [c, d] \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \to (f_1(x, y), f_2(x, y))$ *una función continua tal que*

$$\begin{aligned} f_1(a, y) < 0 < f_1(b, y), \quad \forall y \in [c, d] \\ f_2(x, c) < 0 < f_2(x, d), \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned} \tag{2.1}$$

Entonces la ecuación $f(x, y) = (0, 0)$ *tiene solución en* $(a, b) \times (c, d)$.



La demostración de este Teorema se tratará en el capítulo siguiente.

Veamos ahora un ejemplo de aplicación del teorema:

Si $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son dos funciones continuas y acotadas, el sistema de ecuaciones

$$x^3 cosh(x) + p(x, y) = 0, \quad senh(y) + q(x, y) = 0$$

tiene al menos una solución en el rectángulo $[-r, r] \times [-r, r]$ con $r \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Este hecho se prueba fácilmente ya que
$\lim_{x \to +\infty} x^3 cosh(x) + p(x, y) = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} x^3 cosh(x) + p(x, y) = -\infty$,

$\lim_{y\to+\infty} senh(y) + q(x,y) = +\infty$ y $\lim_{y\to-\infty} senh(y) + q(x,y) = -\infty$.
Por tanto la imagen de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to (x^3 cosh(x)+p(x,y), senh(y)+q(x,y))$ es $\mathbb{R}^2$.

Como hemos introducido al inicio de esta sección, podemos considerar el Teorema 2.1 como una generalización del Teorema de Bolzano, ya que, considerando el espacio $\mathbb{R}$ en vez de $\mathbb{R}^2$ tenemos claramente el Teorema de Bolzano.

Pasamos a enunciar la versión n-dimensional del teorema, cuya demostración puede encontrarse en [14].

Teorema 2.2. ***(Teorema de Poincaré-Miranda en*** $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$***)*** *Toda función continua* $f : P \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *de un intervalo cerrado* n*-dimensional* $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ *(con* $a_i < b_i$ *para cada* $i = 1, 2, \ldots, n$*) con caras*

$$P_i^- = \{x \in P : x_i = a_i\}, \quad P_i^+ = \{x \in P : x_i = b_i\} \quad (1 \le i \le n),$$

tal que

$$f_i(x) \le 0 \quad (x \in P_i^-), \quad f_i(x) \ge 0 \quad (x \in P_i^+) \quad (1 \le i \le n),$$

tiene al menos un cero en P.

El inconveniente que se nos presenta en este teorema es que el dominio de f ha de ser un rectángulo, por lo que cabe preguntarse, ¿cómo afrontamos el problema de la existencia de solución para dominios en los que no haya caras?

2.3. El caso de la bola euclídea

El ejemplo más sencillo que se nos puede venir a la mente respecto a dominios que carezcan de caras es la bola euclídea en $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ (centrada en el origen), ya que, tomando $n = 2$ tenemos que su frontera es una circunferencia.
De forma general, tenemos la bola euclídea $B_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : d_2(x,y) < r\}$ (la bola euclídea cerrada la notaremos $\overline{B}_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} : d_2(x,y) \le r\}$).

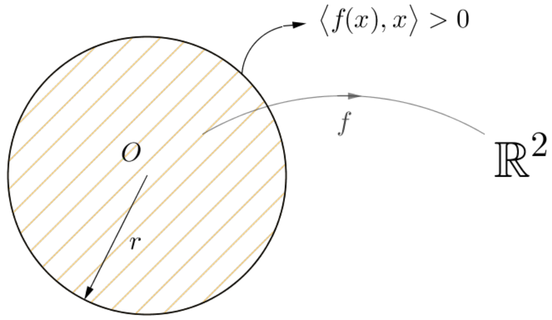
De modo que, dadas las características del dominio, vamos a necesitar nuevas condiciones sobre el comportamiento de f en la frontera de Ω para poder probar la existencia de solución de $f(x) = 0$ en la bola euclídea. Procedamos entonces a mostrar dichas condiciones:

Teorema 2.3. ***(Sistemas de ecuaciones en la bola euclídea)*** *Sea* $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(0,r) \to \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ *una función continua verificando*

$$\langle f(x), x\rangle > 0, \;\; \forall x \in \partial\overline{B}_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(0,r).$$

Entonces la ecuación $f(x) = 0$ *tiene solución en la bola abierta* $B_{\mathbb{R}^{\mathrm{n}}}(0,r)$.

La demostración de este Teorema se tratará en el capítulo siguiente.



Veamos un ejemplo de aplicación del teorema para $n = 3$:

Si $g_1, g_2, g_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son funciones continuas y acotadas, el sistema de ecuaciones

$$x + yz + g_1(y, z) = 0, \quad y - xz + yz^2 + g_2(x, z) = 0, \quad z - y^2 z + g_3(x, y) = 0,$$

tiene al menos una solución en la bola abierta $B_{\mathbb{R}^3}(0, r)$ con $r \in \mathbb{R}$ suficientemente grande. Este hecho se prueba fácilmente ya que

$$\begin{aligned}
&\text{lím}_{x^2+y^2+z^2\to+\infty} \langle (x + yz + g_1(y, z), y - xz + yz^2 + g_2(x, z), z - y^2 z + g_3(x, y)), (x, y, z)\rangle = \\
&\text{lím}_{x^2+y^2+z^2\to+\infty}(x + yz + g_1(y, z))x + (y - xz + yz^2 + g_2(x, z))y + (z - y^2 z + g_3(x, y))z = \\
&\text{lím}_{x^2+y^2+z^2\to+\infty}\, x^2 + xyz + xg_1(y, z) + y^2 - xyz + y^2 z^2 + yg_2(x, z) + z^2 - y^2 z^2 + zg_3(x, y) = \\
&\text{lím}_{x^2+y^2+z^2\to+\infty}(x^2 + y^2 + z^2) + xg_1(y, z) + yg_2(x, z) + zg_3(x, y) = +\infty.
\end{aligned}$$

Por tanto la ecuación $f(x, y, z) = (x + yz + g_1(y, z), y - xz + yz^2 + g_2(x, z), z - y^2 z + g_3(x, y)) = (0, 0, 0)$ tiene solución en la bola abierta $B_{\mathbb{R}^3}(0, r)$.

En la sección anterior hemos visto que si tomamos $n = 1$ en el Teorema de Poincaré-Miranda, obtenemos el Teorema de Bolzano. Veamos ahora que aunque el teorema que acabamos de enunciar está dado para dominios muy distintos, también es una generalización del Teorema de Bolzano. Para ello, vamos a reescribir el Teorema 1.1 teniendo en cuenta que, como no es restrictivo considerar el caso en que $a < 0 < b$ y considerando $\partial[a, b]$ como la frontera topológica del intervalo $[a, b]$, entonces:

Teorema 2.4. ***(Teorema de Bolzano)*** *Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, verificando que $a < 0 < b$ y $f(x)x > 0$, $\forall x \in \partial[a, b]$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $]a, b[$.*

Ahora, dado que no es restrictivo tomar $a = -r$ y $b = r$ con $r \in \mathbb{R}$, identificando elementos respecto al Teorema 2.4, tenemos de nuevo otra versión:

Sea $f : [-r, r] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(-r)(-r) > 0$, $f(r)r > 0$, entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en $(-r, r)$, la bola abierta $B_{\mathbb{R}}(0, r)$.

Vemos que efectivamente, el Teorema 2.3 es una generalización del Teorema de Bolzano.

Recapitulando, hemos mostrado dos generalizaciones del Teorema de Bolzano, que a simple vista parecen no tener relación, pero vamos a ver en el siguiente capítulo que existe una teoría llamada "El grado topológico de Brouwer" que unifica estos casos.

Capítulo 3

Introducción al grado topológico. Algunas aplicaciones

3.1. Conceptos previos

- Sea $[x,y] = \{(1-\lambda)x + \lambda y \ / \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$ (segmento cerrado). Un subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ se dice **convexo** si $\forall x, y \in X$, $[x,y] \subset X$.
- Un **espacio topológico** es un par (X, τ), donde
  - X es un conjunto no vacío y
  - $\tau \subseteq P(X)$ (esto es, τ es una familia de subconjuntos de X),

  satisfaciendo:

  $i)$ $\emptyset, X \in \tau$

  $ii)$ Si $O_1, O_2 \in \tau \Longrightarrow O_1 \cap O_2 \in \tau$

  $iii)$ Si $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\} \subseteq \tau \Longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \tau$

  En este caso, la familia τ se dice ser una topología en X, y los subconjuntos $O \in \tau$ abiertos de la topología τ en X.
- Sean X e Y espacios topológicos y $f, g : X \to Y$ dos aplicaciones continuas. Diremos que f y g son **homotópicas** si existe una aplicación continua $H : X \times [0,1] \to Y$ tal que

$$H(x,0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x,1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

  A H se le denomina **homotopía**.

A partir de ahora, Ω denotará un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$.

- Decimos que $x_0 \in \Omega$ es un **punto crítico** de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (f derivable en el abierto Ω) si $det(f'(x_0)) = 0$.
- Decimos que $a \in \mathbb{R}^n$ es un **valor regular** de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ (f derivable en el abierto Ω) cuando $\forall x \in f^{-1}(a)$ se verifica que $det(f'(x)) \neq 0$.
- Decimos que un elemento $a \in \mathbb{R}^n$ es un **valor singular** de $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ si no es valor regular.

El resultado que se enuncia a continuación puede verse en [13].

- **Lema de Sard:** Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de clase $C^1(\Omega)$ entonces la medida de Lebesgue del conjunto de valores singulares de f es cero.

3.2. Motivación de la noción de grado topológico

Volviendo al Teorema de Poincaré-Miranda, vamos a ver que relación hay entre este teorema y el Teorema de Bolzano.

Observando la condición (2.1) vemos que ésta expresa una propiedad global sobre el comportamiento de f en la frontera del dominio $\Omega = [a, b] \times [c, d]$, esto es, $\partial\Omega = \{a\} \times [c, d] \bigcup \{b\} \times [c, d] \bigcup [a, b] \times \{c\} \bigcup [a, b] \times \{d\}$. Además, por otro lado, en el Teorema de Bolzano vemos que la condición $f(a) < 0 < f(b)$ también expresa una propiedad sobre el comportamiento de f en la frontera del dominio $[a, b]$, esto es, $\partial[a, b] = \{a, b\}$. De modo que existe una relación entre ambos teoremas, que podemos materializar mediante la construcción de una homotopía conveniente entre la aplicación f y la aplicación identidad (a la cuál denotaremos por Id).

Por tanto, como en el Teorema 1.1 no es restrictivo considerar el caso en que $a < 0 < b$, tenemos

$$a < 0 < b, \;\; f(a) < 0 < f(b) \tag{3.1}$$

Ahora, notando $\Omega = (a, b)$ podemos definir la homotopía

$$H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}, \;\; H(x, t) = (1 - t)f(x) + t\,x \tag{3.2}$$

así, de la condición (3.1) obtenemos que, $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} H(a, t) &= (1 - t)f(a) + t\,a \neq 0 \\ H(b, t) &= (1 - t)f(b) + t\,b \neq 0 \end{aligned} \tag{3.3}$$

y de (3.2) se obtiene que

$$H(x, 0) = f(x), \; H(x, 1) = Id(x), \;\; \forall x \in \overline{\Omega}$$

De igual forma, en el Teorema de Poincaré-Miranda en $\mathbb{R}^2$ podemos suponer que, además de (2.1), se cumple

$$a < 0 < b, \;\; c < 0 < d \tag{3.4}$$

Ahora, notando $\Omega = (a,b) \times (c,d)$, podemos definir la homotopía

$$H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^2, \;\; H(x,y,t) = (1-t)(f_1(x,y), f_2(x,y)) + t(x,y) \tag{3.5}$$

así, de las condiciones (2.1) y (3.4) obtenemos que, $\forall t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} H(a,y,t) &= (1-t)(f_1(a,y), f_2(a,y)) + t(a,y) \\ &= ((1-t)f_1(a,y) + t\,a, (1-t)f_2(a,y) + t\,y) \\ &\neq (0,0) \end{aligned} \tag{3.6}$$

en el segmento $a \times [c,d]$. En los otros tres segmentos se puede comprobar de forma análoga. Además, de la condición (3.5) se obtiene que

$$H(x,y,0) = f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)), \; H(x,y,1) = Id(x,y), \;\; \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$$

Como conclusión tenemos que, en ambos casos ($n = 1$ y $n = 2$), la aplicación f es homotópica a la aplicación identidad mediante una homotopía continua que cumple la condición sobre la frontera (3.3), respectivamente (3.6) (para $n = 2$), y en general

$$H(X,t) \neq 0, \;\; \forall t \in [0,1], \;\; \forall X \in \partial\Omega \tag{3.7}$$

esto es, que las soluciones de la ecuación $H(X,t) = 0$ no estén en $\partial\Omega$.

Ahora bien, tras este resultado cabe destacar que en general no va a ser cierta la siguiente afirmación:

Sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$ y $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ continua verificando (3.7) y tal que la ecuación $H(X,1) = 0$ tiene solución en Ω. Entonces la ecuación $H(X,0) = 0$ tiene solución en Ω.

Como contraejemplo a esta afirmación basta tomar $n = 1$, $\Omega = (-1,1)$ y la homotopía $H(x,t) = (1-t)(x^2+2)+t\,x^2$. Vemos que $H(-1,t) = (1-t)3+t = 3-2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \notin [0,1]$ y $H(1,t) = (1-t)3+t = 3-2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \notin [0,1]$. Por tanto $H(x,t) \neq 0 \;\; \forall t \in [0,1]$, $\forall x \in \{-1,1\}$. Además $H(x,1) = x^2 = 0$ tiene solución en $(-1,1)$. Sin embargo $H(x,0) = x^2+2 = 0$ no tiene solución en $(-1,1)$.

Con esto vemos que la existencia de solución de $f(X) = 0$ en Ω no se mantiene a través de homotopías continuas que verifican (3.7). En realidad, veremos en la siguiente sección que las homotopías que verifican condiciones adicionales del tipo (3.3), (3.6) o (3.7) en general, conservan la noción de grado topológico. Esto, junto con el Teorema 3.4 permite probar la existencia de soluciones.

Pongamos de manifiesto que, en el Teorema de Bolzano, la condición de f en la frontera se puede escribir como

$$sgnf(b) - sgnf(a) \neq 0$$

donde para cada numero real no nulo x, $sgn\,x$ denota su signo.
Dicho esto, podemos comprobar fácilmente que si tomáramos una función que verificase

$sgn\ f(1) - sgn\ f(-1) \neq 0$ en vez de la función x^2 no se podría dar la situación del contraejemplo anterior. Como consecuencia de la continuidad de H y de (3.7), la cantidad

$$sgn\ H(b,t) - sgn\ H(a,t) \tag{3.8}$$

se mantiene invariante mediante homotopías continuas que verifican (3.7). El problema que se nos presenta de nuevo es que la condición (3.8) carece de sentido en dimensiones mayores que uno, sin embargo podemos obtener una expresión equivalente que sí va a tener sentido para un n cualquiera. Para ello, vamos a enunciar los siguientes lemas (véase [13]):

Lema 3.1. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$ *tal que* f *verifica*

$$f(a) < 0 < f(b)$$

y

$$f'(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)\ tal\ que\ f(x) = 0 \tag{3.9}$$

Entonces f *tiene un número finito de ceros en* (a,b) *y*

$$1 = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x) \tag{3.10}$$

Nota: Si en vez de $f(a) < 0 < f(b)$ tuviésemos $f(a) > 0 > f(b)$, obtendríamos que la suma (3.10) sería igual a -1.

Lema 3.2. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f \in C[a,b] \cap C^1(a,b)$ *tal que* f *verifica*

$$f(a)f(b) > 0$$

y (3.9). Entonces

$$0 = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x) \tag{3.11}$$

(entenderemos que si el conjunto $f^{-1}\{0\} \cap (a,b)$ *es vacío, entonces la suma anterior vale cero).*

Estos dos lemas nos dicen que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en $[a,b]$, de clase C^1 en (a,b), que no se anula en $\partial[a,b]$ y tal que verifica (3.9), entonces

$$\frac{1}{2}(sgnf(b) - sgnf(a)) = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x)$$

A partir de ahora, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que no se anula en $\partial[a,b]$, notaremos

$$d_1(f,(a,b),0) = \frac{1}{2}(sgnf(b) - sgnf(a))$$

3.3. El grado topológico de Brouwer

Al igual que en los casos presentados en los capítulos anteriores, muchos problemas en análisis se reducen a resolver una ecuación de la forma

$$f(x) = y \tag{3.12}$$

con f aplicación de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Por tanto cabe preguntarse ¿cómo podemos probar, en general, la existencia de ceros para una función definida en un espacio de dimensión finita n y con n funciones componentes? El grado topológico es una de las herramientas más útiles que responde a esta pregunta.

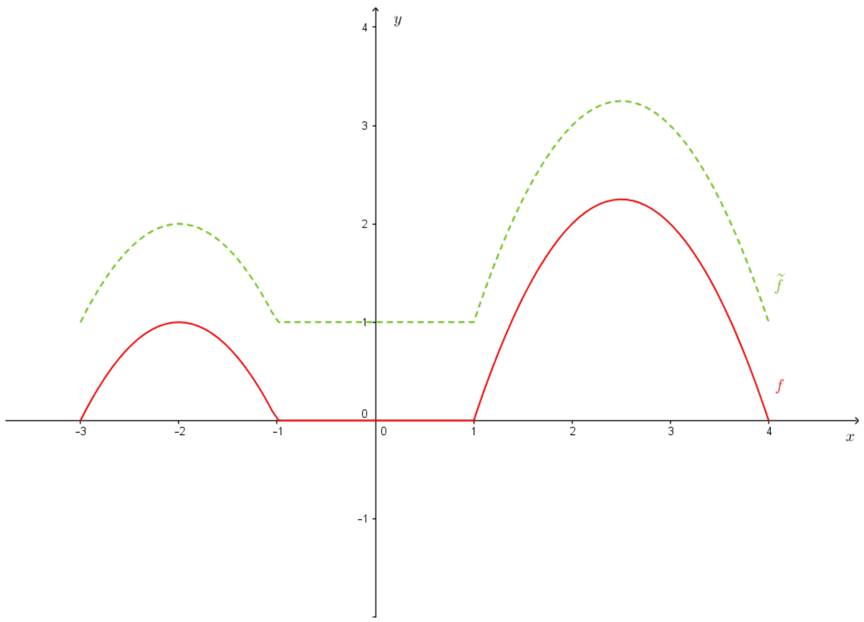
Tomemos concretamente $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una función continua e $y \in \mathbb{R}^n$.

Estamos interesados en saber si para la ecuación (3.12) existe, o no, solución y en caso de existir, saber si es única. Pero pueden surgir algunas preguntas, en particular, supuesto que hemos resuelto el problema para la ecuación (3.12), sería de gran utilidad conocer como cambia el resultado para la ecuación $\widetilde{f}(x) = \widetilde{y}$, con $\widetilde{f}$ e $\widetilde{y}$ "cercanos", en algún sentido, a f e y respectivamente.

Consideremos el siguiente ejemplo:

Sean $n = 1$, $y = 0$, $\Omega = (-3, 4)$, $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \in \{-3,4\} \cup [-1,1] \\ -x^2 - 4x - 3 & si\ x \in (-3,-1) \\ -x^2 + 5x - 4 & si\ x \in (1,4) \end{cases}$$



$\widetilde{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, $\widetilde{f}(x) = f(x) + \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$. Resulta que:

$$f^{-1}\{0\} = \{-3, 4\} \cup [-1, 1] \tag{3.13}$$

$$\widetilde{f}^{-1}\{0\} = \emptyset \tag{3.14}$$

Vemos que aunque f y $\widetilde{f}$ están próximas una de la otra en el sentido de la norma uniforme, o que una se deforma continuamente en la otra, (3.13) y (3.14) indican situaciones bastante diferentes. Observemos también que $\partial\Omega = \{-3, 4\}$ y que $y = 0 \in f(\partial\Omega)$.

Al tomar $\widetilde{f}$ en este ejemplo se ha puesto de manifiesto que el número de soluciones de una ecuación es una cantidad que en general no se conserva "por la norma uniforme". Por tanto, para que sea útil en las aplicaciones el grado de una función ha de ser invariante con respecto a pequeñas perturbaciones.

Es para evitar situaciones como la que acabamos de presentar que debemos imponer la condición $y \notin f(\partial\Omega)$.

De la sección anterior tenemos que la ecuación

$$d_1(f, (a, b), 0) = \sum_{x \in f^{-1}\{0\} \cap (a,b)} sgn\ f'(x)$$

nos permite calcular lo que llamaremos el grado, en el caso de una función de una variable, definida en un intervalo, derivable y con todos sus ceros simples. Procedamos ahora a extender esta definición a cualquier función continua de varias variables, para ello vamos a definir el número entero $d_B(f, \Omega, y)$ (el grado de f relativo a Ω y a y) en varias etapas (la demostración rigurosa puede consultarse en [13]).

Notaremos por Σ al conjunto formado por las ternas (f, Ω, y) que cumplen la propiedad **(P)** siguiente:

(P): $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto abierto y acotado (n es fijo), $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es una función continua y además $y \in \mathbb{R}^n \backslash f(\partial\Omega)$.

ETAPA A). $f \in C^1(\overline{\Omega})$ y sus ceros son simples

Para poder extender los resultados de una variable al caso de más de una, indiquemos por $det\ f'(x)$ el determinante de una matriz cuadrada regular dada por $f'(x)$. Por lo que, de forma análoga a las funciones de una variable, decimos que $x \in \Omega$ es un cero simple si $f(x) = 0 \in \mathbb{R}^n$ y $J_f(x) = det\ f'(x) \neq 0$, donde $J_f(x)$ es el Jacobiano de f en x.

Considerando $(f, \Omega, y) \in \Sigma$, tal que $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Si

$$A_f = \{x \in \Omega : f(x) = y\},$$
$$B_f = \{x \in \Omega : J_f(x) = 0\},$$

suponemos en esta etapa que

$$A_f \cap B_f = \emptyset \tag{3.15}$$

Entonces A_f es un conjunto finito (puesto que A_f es un compacto con todos sus puntos aislados) y podemos definir

$$d_B(f, \Omega, y) = \sum_{x \in A_f} sgn\ J_f(x)$$

Al igual que antes, entendemos que $d_B(f, \Omega, y) = 0$ si $A_f = \emptyset$.

ETAPA B). **$f \in C^1(\overline{\Omega})$ y sus ceros no tienen porqué ser simples**
En esta etapa eliminamos la hipótesis (3.15). Para ello, consideramos de nuevo $(f, \Omega, y) \in \Sigma$, tal que $f \in C^1(\overline{\Omega})$. Bastará tomar en $B_{\mathbb{R}^n}(y, r)$, donde $r = dist(y, f(\partial\Omega))$, un elemento z suficientemente cercano a y tal que (f, Ω, z) está en las condiciones del apartado anterior. La existencia del z está garantizada como consecuencia del lema de Sard, ya que $f(B_f)$ es de interior vacío (pues $f(B_f)$ tiene medida de Lebesgue cero). Se prueba entonces que $d_B(f, \Omega, z)$ es independiente del elemento z así elegido, lo que nos asegura que $d_B(f, \Omega, .)$ es constante en $B_{\mathbb{R}^n}(y, r)$, y se define $d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega, z)$.

ETAPA C). **Caso general: $f \in C(\overline{\Omega})$**
En esta etapa se elimina la hipótesis sobre la regularidad de f. Para ello, sea de nuevo $(f, \Omega, y) \in \Sigma$ y $r = dist(y, f(\partial\Omega))$. El Teorema de aproximación de Weierstrass garantiza la existencia de $g \in C^1(\overline{\Omega})$, tal que

$$\|f(x) - g(x)\|_2 < r, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \tag{3.16}$$

donde $\|.\|_2$ indica la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$.
Si tomamos dos funciones g_1 y g_2 satisfaciendo (3.16), entonces mediante la homotopía $H(x, t) = (1 - t)g_1(x) + tg_2(x)$ garantizamos que $d_B(g_1, \Omega, y) = d_B(g_2, \Omega, y)$, lo cuál nos asegura que $d_B(g, \Omega, y)$ es independiente de la función g elegida satisfaciendo (3.16), y se define $d_B(f, \Omega, y) = d_B(g, \Omega, y)$. Como conclusión tendremos que todas las funciones $C^1(\overline{\Omega})$ suficientemente cercanas a f con la norma uniforme poseen el mismo grado de Brouwer relativo a Ω y a y.

Estas ideas mostradas las podemos formalizar rigurosamente en el siguiente teorema (véase [13]):

Teorema 3.3. *Existe una única aplicación $d_B : \Sigma \to \mathbb{Z}$ (conjunto de los números enteros) satisfaciendo las propiedades siguientes:*

$d1)$ *(Normalización)* $d_B(Id, \Omega, y) = 1$, *si* $y \in \Omega$.

$d2)$ *(Aditividad-escisión) Si Ω_1 y Ω_2 son dos subconjuntos abiertos y disjuntos de Ω tales que $y \notin f(\overline{\Omega} \backslash (\Omega_1 \cup \Omega_2))$, entonces*

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(f, \Omega_1, y) + d_B(f, \Omega_2, y).$$

$d3)$ *(Invarianza por homotopías) Si $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, son aplicaciones continuas tales que $y(t) \notin H(\partial\Omega, t)$, $\forall t \in [0, 1]$, entonces $d_B(H(., t), \Omega, y(t))$ es independiente de $t \in [0, 1]$.*

A $d_B(f, \Omega, y)$ se le llama ***grado topológico de Brouwer de f, relativo a Ω y a y.***

La propiedad $d1)$ normaliza el valor del grado para la función identidad.

La propiedad $d2)$ resulta muy útil para probar la multiplicidad y localización de las soluciones de la ecuación (3.12). Además, expresa el hecho de que para calcular el grado $d_B(f, \Omega, y)$, se puede prescindir de las partes del dominio donde de antemano se sabe que la ecuación (3.12) no tiene solución.

La propiedad $d3)$ implica que si f y g son aplicaciones homotópicas a través de H, verificando (3.7) entonces tienen el mismo grado. Esta propiedad tiene una gran importancia ya que podemos calcular el grado de aplicaciones que sean homotópicas a otras cuyo grado es conocido.

Además de estas propiedades, el grado de Brouwer satisface otras tales como:

$d4)$ (Existencia) Si $d_B(f, \Omega, y) \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \Omega$ tal que $f(x) = y$.

$d5)$ (Dependencia de los valores en la frontera) Si $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ es continua tal que $f(x) = g(x)\ \forall x \in \partial\Omega$, e $y \notin f(\partial\Omega)$, entonces

$$d_B(f, \Omega, y) = d_B(g, \Omega, y).$$

$d6)$ (Grado de aplicaciones lineales inversibles) Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es lineal con $det(A) \neq 0$ entonces

$$d_B(A, \Omega, 0) = sgn(det(A)).$$

La propiedad $d4)$ es muy importante pues garantiza la existencia de solución para el sistema de ecuaciones (3.12).

La propiedad $d5)$ nos dice que el grado de una aplicación depende solo de sus valores en la frontera.

La propiedad $d6)$ indica el grado de aplicaciones lineales regulares.

Desde el punto de vista del análisis el grado topológico es un "contador algebraico" del número de soluciones de la ecuación (3.12) ya que a cada solución de esta ecuación se le asocia un número entero $sgn\ J_f(x)$ y se suma.

El grado topológico no fue formulado per se, sino que fue desarrollándose pausadamente. Esto se debe a que en los trabajos que lo precedieron fueron apareciendo resultados que posteriormente serían relacionados y formalizados por Hadamard en 1910 y Brouwer entre 1910 y 1912 dando lugar al llamado grado de Brouwer. Estos trabajos pertenecían a matemáticos tales como Poincaré, Kronecker, Gauss, Sturm, Liouville, Cauchy, Hermite, Sylvester...

Para la construcción del grado de Brouwer hemos seguido un enfoque analítico, pero puede exponerse de igual forma usando técnicas de topología algebraica o de topología diferencial. Sin embargo no importa el método usado para definir el grado pues como se enuncia en el propio Teorema 3.3, existe una única aplicación que satisface las propiedades $d1)$, $d2)$ y $d3)$. Este hecho no sería probado hasta 1973 por Amann y Weiss ([2]).

3.4. Generalizaciones del Teorema de Bolzano usando el grado topológico

Ya hemos visto que la importancia del grado topológico reside en las buenas propiedades que verifica. En esta última sección, vamos a ver dos generalizaciones del Teorema de Bolzano y vamos a usar el grado topológico para dar una demostración sencilla del Teorema 2.1 y del Teorema del punto fijo de Brouwer. Se puede consultar [13] para otros resultados similares.

La primera generalización que vamos a enunciar no es otra que, como ya nos habremos dado cuenta, la propiedad $d4)$ del Teorema 3.3, que enunciamos como sigue:

Teorema 3.4. *Si $d_B(f,\Omega,y) \neq 0$, la ecuación (3.12) tiene al menos una solución en Ω.*

Demostración:

La demostración es sencilla si aplicamos las propiedades $d1) - d3)$ del Teorema 3.3. En concreto, partimos de que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto acotado, $f \in C(\overline{\Omega})$ e $y \notin f(\partial\Omega)$ y supongamos que el conjunto $\{x \in \Omega : f(x) = y\}$ es vacío. Usando $d2)$ con $\Omega_1 = \Omega$ y $\Omega_2 = \emptyset$, obtenemos que $d_B(f,\emptyset,y) = 0$, y por tanto $d_B(f,\Omega,y) = d_B(f,\Omega_1,y)$ siempre que Ω_1 sea un subconjunto abierto de Ω tal que $y \notin f(\overline{\Omega}\backslash\Omega_1)$. Por lo tanto $\{x \in \Omega : f(x) = y\} = \emptyset$ implica $d_B(f,\Omega,y) = d_B(f,\emptyset,y) = 0$, y tenemos lo que queríamos, si $d_B(f,\Omega,y) \neq 0$ entonces $\{x \in \Omega : f(x) = y\} \neq \emptyset$. $\square$

Esta propiedad es una condición suficiente que garantiza la existencia de solución de la ecuación (3.12) siempre que $d_B(f,\Omega,y)$ sea distinto de cero.

Mostremos ahora el caso unidimensional del grado, para ello tomemos $\Omega = (a,b)$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(x) \neq 0,\ \forall x \in \{a,b\}$. Consideremos la homotopía $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $H(x,t) = (1-t)f(x) + t\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right)$, y obtenemos que $H(x,t) = f(x) \neq 0$ si $x \in \{a,b\}$. Entonces $d_B(f,(a,b),0) = d_B(H(x,0),(a,b),0) = d_B(H(x,1),(a,b),0)$, por tanto

$$d_B(f,(a,b),0) = \left\{ \begin{array}{ll} -1, & si\ f(b) < 0 < f(a) \\ 0, & si\ f(b)f(a) > 0 \\ 1, & si\ f(a) < 0 < f(b) \end{array} \right\} = \frac{1}{2}(sgnf(b) - sgn(f(a)) = d_1(f,(a,b),0).$$

Como hemos mostrado, el Teorema 3.4 es en esencia una generalización del Teorema de Bolzano, ya que el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ puede ser ¡cualquier subconjunto abierto y acotado! y además podemos considerar sistemas de n ecuaciones y n variables independientes. Sin embargo la dificultad que se nos plantea a la hora de aplicar este teorema reside en el hecho de probar que $d_B(f,\Omega,0) \neq 0$. Aunque como ya anticipamos y observamos de la propiedad $d5)$, lo importante es el valor que toma f en la frontera.

Veamos ahora un ejemplo de aplicación del grado para probar la existencia de soluciones: Consideremos el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x + 2y + exp(-x_1^2 - 15) + sen(x^2 y) = 0 \\ x - 4y + \dfrac{ln(x_1^2 + 10)}{x_1^2 + x_2^2 + 8} + cos(x+y) = 0 \end{array} \right.$$

Tomamos $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ con $f(x,y) = (7x+2y, x-4y)$ y $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ con $g(x,y) = \left(exp(-x_1^2 - 15) + sen(x^2 y), \dfrac{ln(x_1^2+10)}{x_1^2+x_2^2+8} + cos(x+y)\right)$.

Vemos que f y g son continuas, además g está acotada.

De f sacamos $f(x,y) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y llamando $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, tenemos $det(A) = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -30 \neq 0$ por tanto A es regular.
Por la propiedad $d6)$ del Teorema 3.4 tenemos que $d_B(f,\Omega,0) = sgn(det(A)) = -1,\ \forall \Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto acotado conteniendo al origen.
En consecuencia, como A es regular y g está acotada, tenemos que para $r \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, $H : B_{\mathbb{R}^2}(0,r) \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $H(x,t) = f(x) + tg(x)$ satisface $d3)$ del Teorema 3.4. Así, $d_B(f+g, B_{\mathbb{R}^2}(0,r), 0) = d_B(f, B_{\mathbb{R}^2}(0,r), 0) \neq 0$ y por tanto existe solución del sistema.

Si nos fijamos, el siguiente resultado es muy similar al Teorema 2.3, pero recalquemos que ahora consideramos cualquier dominio Ω abierto y acotado, por lo que es una generalización de dicho teorema que a su vez vimos, generalizaba al Teorema de Bolzano.

Teorema 3.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y acotado conteniendo al origen y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ una función continua. Entonces si*

$$\langle f(x), x \rangle > 0,\ \ \forall x \in \partial\overline{\Omega}$$

se tiene que la ecuación $f(x) = 0$ tiene solución en Ω.

Demostración:

La demostración es sencilla si aplicamos las propiedades $d1)-d3)$ del Teorema 3.3. Consideramos la homotopía $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $H(x,t) = (1-t)x + tf(x)$ y la aplicación $y : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = 0$. Tenemos $H(x,1) \neq 0,\ \forall x \in \partial\Omega$ porque f no tiene ceros en $\partial\Omega$. Para $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,1)$ tenemos que, (como $x \neq 0$ ya que $\langle f(x), x \rangle > 0,\ \ \forall x \in \partial\Omega$)

$$\langle H(x,t), x \rangle = (1-t)x^2 + t \langle f(x), x \rangle \geq (1-t)x^2 > 0,$$

por lo tanto $H(x,t) \neq 0$. En consecuencia, usando la propiedad $d3)$ del Teorema 3.3, tenemos

$$d_B(f,\Omega,0) = d_B(H(x,1),\Omega,0) = d_B(H(x,0),\Omega,0) = d_B(Id,\Omega,0) = 1$$

y usando ahora el Teorema 3.4 nos queda que f tiene al menos un cero en Ω. □

Pasamos ahora a enunciar y demostrar el Teorema 2.1, el cual habíamos enunciado en el capítulo 2:

Teorema 2.1. ***(Teorema de Poincaré-Miranda en** $\mathbb{R}^2$**)*** *Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}^2,\quad (x,y) \to (f_1(x,y), f_2(x,y))$ una función continua tal que*

$$\begin{aligned} f_1(a,y) < 0 < f_1(b,y), \quad \forall y \in [c,d] \\ f_2(x,c) < 0 < f_2(x,d), \quad \forall x \in [a,b] \end{aligned} \tag{3.17}$$

Entonces la ecuación $f(x,y) = (0,0)$ tiene solución en $(a,b) \times (c,d)$.

Demostración:

Para la demostración, vamos a repetir de nuevo la construcción de la homotopía y las condiciones que verifica, todo esto lo habíamos mostrado ya al inicio del capítulo 3, sección 3.2, páginas 28 y 29. Podemos suponer que, además de (3.17), se cumple

$$a < 0 < b, \ \ c < 0 < d \tag{3.18}$$

Ahora, notando $\Omega = (a, b) \times (c, d)$, podemos definir la homotopía

$$H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \ \ H(x, y, t) = (1-t)(f_1(x, y), f_2(x, y)) + t(x, y) \tag{3.19}$$

así, de las condiciones (3.17) y (3.18) obtenemos que, $\forall t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} H(a, y, t) &= (1-t)(f_1(a, y), f_2(a, y)) + t(a, y) \\ &= ((1-t)f_1(a, y) + t\,a, (1-t)f_2(a, y) + t\,y) \\ &\neq (0, 0) \end{aligned} \tag{3.20}$$

en el segmento $a \times [c, d]$. En los otros tres segmentos se puede comprobar de forma análoga. Además, de la condición (3.19) se obtiene que

$$H(x, y, 0) = f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)), \ H(x, y, 1) = Id(x, y), \ \ \forall (x, y) \in \overline{\Omega}$$

Como conclusión tenemos que la aplicación f es homotópica a la aplicación identidad mediante una homotopía continua que cumple la condición sobre la frontera (3.20), en consecuencia las soluciones de la ecuación $H(x, y, t) = 0$ no están en $\partial\Omega$.

Por tanto

$$d_B(f, \Omega, 0) = d_B(H(x, y, 0), \Omega, 0) = d_B(H(x, y, 1), \Omega, 0) = d_B(Id, \Omega, 0) = 1$$

y usando ahora el Teorema 3.4 nos queda que f tiene al menos un cero en Ω. □

Por último, mostremos como aplicación del grado topológico, una demostración del Teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema 3.6. ***(Teorema del punto fijo de Brouwer)*** *Si $B_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ es la bola abierta de centro 0 y radio $r > 0$ y $f : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r) \to \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ es continua, entonces existe $x \in \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, r)$ tal que $x = f(x)$.*

Nota: Lo mismo es cierto si $D \subset \mathbb{R}^n$ es homeomorfo a un subconjunto convexo y compacto (Véase [13], pag. 17 y 18).

Demostración:

No es restrictivo suponer que $r = 1$. Entonces, para la demostración suponemos $f(x) \neq x$, $\forall x \in \partial B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$, pues sino, el teorema queda probado. Consideramos la aplicación $g : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \to \mathbb{R}^n$, $g(x) = x - f(x)$. Consideremos también la homotopía $H : \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $H(x, t) = (1-t)x + tg(x) = x - tf(x)$ y la aplicación $y : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$, $y(t) = 0$. Obsérvese que si $\|x\|_2 = 1$ y $t \in [0, 1)$ entonces

$$\|H(x, t)\|_2 \geq \|x\|_2 - t\|f(x)\|_2 \geq 1 - t > 0.$$

Ahora si $\|x\|_2 = 1$ y $t = 1$ entonces $H(x, 1) = x - f(x) \neq 0$, ya que hemos supuesto $f(x) \neq x$, $\forall x \in \partial B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$. En consecuencia, $0 \notin H(\partial B_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \times [0, 1])$. Así que de las propiedades $d1)$ y $d3)$ tenemos que

$$d_B(g, B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = d_B(H(x, 1), B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = d_B(H(x, 0), B_{\mathbb{R}^n}(0, 1), 0) = d_B(Id, \Omega, 0) = 1.$$

Por lo tanto, por el Teorema 3.4, existe $x \in B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)$ tal que $g(x) = x - f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f(x)$.
$\square$

El Teorema 3.6 fue probado para $n = 3$ por Brouwer en 1909 ([6]), aunque un resultado equivalente ya había sido enunciado y probado por Bohl en 1904 ([4]). En 1910 Hadamard dio una demostración para un n cualquiera ([16]). Finalmente en 1912, Brouwer lo demostró usando el grado topológico ([7]).

Bibliografía

[1] M.D. ACOSTA, C. APARICIO, A. MORENO Y A.R. VILLENA (2005). *Apuntes de Análisis Matemático I*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, España. Obtenido de
`http://www.ugr.es/~dpto_am/miembros/aparicio/apuntes/apuntes-an-mat-i-1-11-06.pdf`.

[2] H. AMANN Y S.A. WEISS. *On the uniqueness of topological degree*, Math. Z. 130 (1973), 39-54.

[3] C. APARICIO Y R. PAYÁ. *Análisis matemático I*, Universidad de Granada, Granada, 1999.

[4] P. BOHL. *Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtung*, J. Reine Angew. Math. 127 (1904), 179–276.

[5] B. BOLZANO. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Haase, Praga, 1817.

[6] L.E.J.BROUWER. *On continuous one-to-one transformations of surfaces into themselves*, Proc. Kon. Ned. Ak. V. Seri A 11 (1909), 788–798.

[7] L.E.J.BROUWER. *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. 71 (1910), 97–115.

[8] J. F. CAICEDO. *Teoría de Grado*, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia, 2008. Obtenido de
`https://www.math.hmc.edu/~castro/CursoCaicedoDuque.pdf`

[9] A. CAÑADA. *Introducción al análisis no lineal con aplicaciones a ecuaciones diferenciales e integrales*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, España, 1995.

[10] A. CAÑADA Y S. VILLEGAS. *¿El Teorema de Bolzano en varias variables?*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. 7 (2004), 101-121.

[11] A. CAÑADA Y S. VILLEGAS. *Teoremas tipo Bolzano: una herramienta potente para el estudio de sistemas de ecuaciones*. Enviado para publicación.

[12] J. A. CID. *Grado topológico y ecuaciones diferenciales*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Vigo, España, 2010. Obtenido de
`http://angelcid.webs.uvigo.es/Archivos/Papers/Degree.article.pdf`

[13] K. DEIMLING. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, 1985.

[14] G. DINCA Y J. MAWHIN. *Brouwer Degree and Applications*, 2009, Preprint, https://www.ljll.math.upmc.fr/~smets/ULM/Brouwer_Degree_and_applications.pdf

[15] A. GUTIÉRREZ. *Existencia y estabilidad de soluciones periódicas en ecuaciones con singularidades*, Universidad de Granada, España, 2012. Obtenido de http://www.ugr.es/~ptorres/docs/gutithesis.pdf

[16] J.H. HADAMARD. *Sur quelques applications de l'indice de Kronecker*, In J. Tannery: Introduction a la Théorie des Fonctions d'une Variable, Hermann, Paris, 1910, 875–915.

[17] M. KLINE. *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972. Traducción al castellano en Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1992.

[18] C. MIRANDA. *Una osservazione su una teorema di Brouwer*, Boll. Unione Mat. Ital. 3 (1940), 527-527.

[19] J. J. O'CONNOR Y E. F. ROBERTSON (2005). *Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano*, MacTutor History of Mathematics. Obtenido de http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Printonly/Bolzano.html

[20] R. PAYÁ ALBERT. *Propiedades de las funciones continuas*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, España. Obtenido de http://www.ugr.es/~rpaya/cursosanteriores.htm

[21] F. J. PÉREZ GONZÁLEZ. *Cálculo diferencial e integral de funciones de una variable*, Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada, España. Obtenido de http://www.ugr.es/~fjperez/apuntes.html

[22] J. PÉREZ SÁNCHEZ. *La teoría del grado en* $\mathbb{R}^n$, Universidad de Los Andes, Venezuela, 2008. Obtenido de http://www.ciens.ula.ve/matematica/publicaciones/libros/por_profesor/perez_sanchez_jesus/teoria_del_grado_en%20_Rn.pdf

[23] H. POINCARÉ. *Sur les courbes définies par une équation différentielle IV*, J. Math. Pures Appl. 85 (1886), 151-217.

[24] S.B. RUSS. *A Translation of Bolzano's Paper on the Intermediate Value Theorem*, Historia Mathematica 7 (1980), 156 – 185.

[25] J.T. SCHWARTZ. *Nonlinear Functional Analysis*, Gordon and Breach, New York, 1969.