FACULTAD DE CIENCIAS
GRADO EN MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

TRABAJO FIN DE GRADO

El Teorema de Lax-Milgram: origen, generalizaciones y aplicaciones

Miguel López Pérez

Departamento de Análisis Matemático
Tutor: Antonio Cañada Villar
Junio 2017

Agradecimientos

Me gustaría agradecerle a mi tutor Antonio Cañada no sólo su labor dirigiéndome y resolviéndome las dudas surgidas durante la elaboración del presente trabajo sino también por descubrirme la rama más bonita de las matemáticas, el Análisis Funcional.

Índice general

Resumen

En este Trabajo de Fin de Grado se propone el estudio del teorema de Lax-Milgram, comenzamos por su origen, seguimos con el enunciado y demostración detallada, y finalmente se muestran una generalización y algunas aplicaciones. Los objetivos son:

- Origen histórico del Teorema de Lax-Milgram. Enunciado y demostración del Teorema. Resumen de lo estudiado en el grado en Matemáticas.
- Generalizaciones: Teorema de Stampacchia. Inecuaciones variacionales.
- Repaso de los espacios de Sobolev. Formulación débil de problemas de contorno para EDO y EDP. Existencia y unicidad de soluciones.

En el prefacio del presente trabajo, expondremos un resumen de lo estudiado en el Grado en Matemáticas.
En el apéndice A, repasaremos todos los conceptos previos estudiados en el Grado en relación a la presentación y demostración del teorema de Lax-Milgram. Para este apéndice [2], [3] y [9], nos han servido de ayuda.

En el primer capítulo, haremos una breve introducción del origen del teorema de Lax-Milgram comentando cómo surge del estudio de las ecuaciones en derivadas parciales. Surge como un lema, una mera herramienta para una EDP de tipo parabólico, pero actualmente tiene gran importancia como un teorema de representación dentro del Análisis Funcional. Para este capítulo, hemos consultado [1],[7] y [8].

Continuaremos, en el segundo capítulo, en la sección 2.1 exponiendo el teorema con una demostración detallada. Esta demostración estará basada en [1] y [7]. Las dos demostraciones clásicas son usando el punto fijo de Banach y el teorema de Representación de Riesz, nosotros nos apoyaremos en el teorema de Riesz para demostrarlo. Además, presentaremos una demostración alternativa del teorema en la sección 2.2 donde usaremos una versión del teorema de Hahn-Banach.

En la sección 2.3 discutiremos sobre si la condición de coercividad de la forma bilineal, que es suficiente, es también necesaria, y cuándo esa condición será necesaria y suficiente.

En la sección 2.4, presentaremos la relación que existe entre el teorema de Lax-Milgram y la minimización de ciertos funcionales. En diversas fuentes como [2] suele venir todo en el mismo teorema, pero nosotros por la importancia y profundidad que tiene esta segunda parte del teorema, por sí sola, hemos decidido dedicarle una sección.

El segundo capítulo está basado en [1], [2], [4], [7] y [9]. Con esto queda cubierto el primer objetivo del trabajo.

En el tercer capítulo, estudiaremos una generalización: el Teorema de Stampacchia. Este teorema es el punto de inicio de la teoría de inecuaciones variacionales. Primero, introduciremos esta teoría. A continuación, seguiremos con el enunciado del teorema y una demostración detallada del mismo. Finalmente, podremos demostrar el teorema de Lax-Milgram como un corolario de esta generalización, obteniendo así tres demostraciones esencialmente diferentes. Para el teorema de Stampacchia nos apoyaremos en el teorema del punto fijo de Banach. Con este capítulo completamos el segundo objetivo. Para cumplirlo, nos hemos basado en [2], [4] y [11].

El cuarto capítulo contendrá las aplicaciones, con éste cumpliremos el tercer y último objetivo del trabajo. Comenzaremos, con la motivación de la formulación débil de los problemas de contorno encontrada en [2]. Acto seguido, haremos un repaso de los espacios de Sobolev apoyándonos en [2], [7] y [13]. Estos espacios son una gran herramienta para el tratamiento débil de ecuaciones en derivadas parciales.

En la sección 4.3, estudiaremos diversos problemas de contorno [2], [5] y [7]. Estudiaremos el caso de ecuaciones diferenciales ordinarias estudiando distintas condiciones de frontera: condiciones tipo Dirichlet y condiciones tipo Neumann.

En la sección 4.4, definiremos el operador lineal de segundo orden uniformemente elíptico a través del cual introduciremos las ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales. Estudiaremos la ecuación en derivadas parciales elíptica lineal general de segundo orden junto con condiciones de contorno. En general, no podemos afirmar que este problema tenga solución débil pero podremos hallar otra ecuación relacionada con él, que bajo ciertas condiciones sobre los coeficientes, tiene una única solución débil. También, comentaremos un problema que viene de la física, el problema de la membrana [4]. Este problema, da lugar a la ecuación de Poisson, que es un caso particular de EDP elíptica lineal. La solución de este problema está relacionado con el mínimo del funcional de la energía. Este problema, lo ilustraremos con una imagen producida por el programa Octave.

Gracias al teorema de Lax-Milgram podremos hallar existencia y unicidad de soluciones débiles de estos problemas, pero podremos probar, también, la existencia y unicidad de soluciones clásicas.

Concluiremos el trabajo con la sección 4.5, donde hallaremos un ejemplo de inecuación variacional proviniente de un problema físico, el problema del obstáculo, [4] y [11]. Este problema involucrará una inecuación variacional cuya solución también estará relacionada con el mínimo del funcional de la energía, pero en este caso no minimizaremos el funcional en todo el espacio sino en un subespacio de él. Demostraremos la existencia y unicidad de solución de dicho problema. Este será el ejemplo de problema cuya solución no tendrá por qué ser todo lo regular que queramos, como en los ejemplos anteriores. Este problema lo hemos ilustrado con imágenes producidas por GeoGebra.

Summary

Functional Analysis is an important branch of modern Mathematics which has many applications on fields like differential equations theory.

In this work we aim to present you an important representation theorem of Functional Analysis, the Lax-Milgram theorem, also known as the Lax-Milgram lemma due to the fact that it was originally introduced as a lemma standing for a result of partial differential equations by Arthur Milgram and Peter Lax in 1954. It was intended to be a lemma for the theory of partial differential equations. However, it has become a highly important theorem in Functional Analysis. It was originally proposed to study a parabolic type PDE but it ended up having special utility and applications in elliptical problems. This theorem is used very often in the weak formulation of boundary problems, in fact, it is a fundamental theorem in the variational formulation of boundary problems, therefore it can be considered as a part of the weak theory of partial differential equations. Thanks to this theorem we can guarantee the existence and uniqueness of weak solutions.

We will start with a historical introduction of the theorem in the first chapter. In the appendix A we will include some related notions studied in the "Grado en Matemáticas".

In the second chapter, we will treat with the theorem of Lax-Milgram itself.

In section 2.1, we will state the theorem in an abstract context of real Hilbert spaces:

Lax-Milgram theorem: Let H be a real Hilbert space and
$a : H \times H \to \mathbb{R}$ a bilinear form with the following properties:

1. a is continous, that is, there exists a real constant C such that

$$| a(x, y) | \leq C \| x \| \| y \|, \quad \forall x, y \in H.$$

2. a is coercive, that is, there exists a real positive constant α such that

$$| a(x,x) | \geq \alpha \parallel x \parallel^2, \quad \forall x \in H.$$

Then, for every $f \in H^*$ (the topological dual space of H) there exists an unique $y_0 \in H$ such that $a(x, y_0) = f(x)$, $\forall x \in H$.

We will prove the theorem using mainly the Riesz theorem but it can also be proved with the Banach fixed point theorem. Furthermore, it has an interesting corollary:

Corollary: Let $y_0 \in H$ the element associated with the continuous linear functional $f \in H^*$ given by the Lax-Milgram theorem. Then we have the following inequality

$$\parallel y_0 \parallel \leq \frac{1}{\alpha} \parallel f \parallel,$$

where α is the coercivity constant of the bilinear form a used in such theorem.

This corollary also allows us to verify that the linear application which applies f into y_0 is continuous.

In section 2.2, we will present an alternative proof of the theorem, using this time a variant of the Hahn-Banach theorem.

In section 2.3, we will see that coercivity is too restrictive, in general. It is a sufficient but not a necessary condition. In the particular case of a symmetric bilinear form we will see that it is necessary the coercitivity. It is also noteworthy that when the bilinear form is symmetric then it is a scalar product in the space H. So it is likely to raise more interest when additionally the bilinear form is not symmetric in spite of the fact that we will also see that when the bilinear form is symmetric we can find an equivalence between the Lax-Milgram theorem and the minimization of a certain functional.

In section 2.4, we will see the equivalence between the Lax-Milgram theorem and the minimization of a certain functional. This equivalence usually appears as the corollary or part of the theorem. We have decided to separate it in another section to highlight its importance. The equivalence is:

Theorem: Let H be a prehilbert space and a a bilinear form continous, positive and symmetrical. Then $y_0 \in H$ satisfies

$$a(x, y_0) = f(x), \quad \forall x \in H, \tag{1}$$

if and only if, $y_0 \in H$, minimizes the following functional $J : H \to \mathbb{R}$:

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u), \quad u \in H. \tag{2}$$

We will also see the case of a non empty, closed and convex subset of the Hilbert space. We will affirm that in this case the functional will reach a single minimum. It will have a vital importance in the Stampacchia theorem.

Theorem: Let K be a non-empty closed and convex subset of a Hilbert space H and $a : H \times H \to \mathbb{R}$ a coercive and continuous bilinear form. Then for every $f \in H^*$ there exists a unique $y_0 \in K$ such that $J(y_0) = \underset{w \in K}{inf}\, J(w)$ where J is defined as

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w, w) - f(w), \quad w \in K.$$

In the third chapter, we will study a generalization: the Stampacchia theorem. We will introduce the theory of variational inequalities. We will state the theorem:

Stampacchia theorem: Let H be a Hilbert space and suppose that $a : H \times H \to \mathbb{R}$ is a bilinear, continuous and coercive form. Let $K \subset H$ be a non-empty closed and convex subset. Then, given $f \in H^*$, there exists an unique element $u \in K$ such that

$$a(u, y - u) \geq f(y - u), \quad \forall y \in K.$$

In addition, if $a(x, y)$ is also symmetric, then u is characterized by minimizing the following functional in K:

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u), \quad u \in K.$$

We give a detailed proof of it. We can prove the Lax-Milgram theorem as a corollary of this generalization, thus obtaining three different proofs of it. For the theorem of Stampacchia we will support in the Banach fixed-point theorem. The relation of the theorem to the minimization of the functional has special importance in physics.

In the fourth chapter, we will begin with a motivation of the weak formulation of boundary problems and we will continue with a review of Sobolev spaces that are the natural context of the weak formulation. We need to work in a space that it has the weak derivative included naturally.

In section 4.3, we will study the equation

$$-u'' + u = f \qquad \text{on} \quad (0,1),$$

together with the case of both Dirichlet or Neumann boundary conditions:

- **Dirichlet conditions:** $u(0) = \alpha, \qquad u(1) = \beta$ with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- **Dirichlet conditions:** $u'(0) = \alpha, \qquad u'(1) = \beta$ with $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

We will prove in both cases the uniqueness and existence of weak solutions. Later, we will prove that the weak solutions are also classical because they will be smooth enough and they will satisfy the equation pointwise. In this way, we will prove the existence and uniqueness of classic solutions.

In section 4.4, we will study a problem involving the partial differential elliptic linear equation of second order together with boundary condition, that is of the form:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \text{ on } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases}$$

With $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ an open and bounded set with a smooth boundary. And the functions $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq i,j \leq n$ satisfying the ellipticity condition, that is, there exists a constant $\alpha > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \mid \xi \mid^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

on $a_i, a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$.

We will see the following theorem about this:

Theorem: There exists a constant $\gamma \geq 0$ such that for every $\mu \geq \gamma$ and each $f \in L^2(\Omega)$ the problem:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u + \mu u = f \text{ on } \Omega, \\ u = 0 \text{ on } \partial\Omega, \end{cases}$$

has an unique weak solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

We will also see an example from physics which gives rise to the Poisson's equation:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad \text{on} \quad \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

whose solution is related to minimizing the energy functional:

$$J(v) := \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 - \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

This example is on an elastic membrane. We want to calculate its equilibrium position.

We will conclude the work with the section 4.5, where we will find an example of variational inequality from a physical problem, the obstacle problem. This problem will involve a variational inequality whose solution will also be related to the minimum of the functional of the energy, but in this case we will not minimize the functional in the whole space but in a subspace of it.

The variational inequality will be:

$$\int_{\Omega} < \nabla u, \nabla(v-u) > \geq \int_{\Omega} f(v-u), \quad \forall v \in K,$$

where $f \in L^2(\Omega)$ is given and

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \phi \text{ almost everywhere on } \Omega\}.$$

The solution u of this inequality is characterized by being the only minimum of

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 - \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in K.$$

We will demonstrate the existence and uniqueness of the solution of this problem. This will be the example of a problem whose solution will not have to be as regular as we want, as in the previous examples.

Resumen de lo estudiado en el Grado en Matemáticas

En la asignatura de tercer curso, *Análisis Funcional* del *Grado en Matemáticas*, damos todos los conceptos previos que hacen falta de teoría de espacios de Hilbert para poder enunciar, demostrar y entender el teorema de Lax-Milgram. Más adelante, en *Modelos Matemáticos II*, en el apartado "*Introducción al concepto de derivada débil*"se introduce de forma breve la formulación débil de problemas de contorno.

En *Modelos Matemáticos II*, primero, se enseña el concepto de derivada débil para después poder introducir los espacios de Sobolev el ambiente natural del método variacional. Una vez tenemos los espacios Sobolev, se enuncia y demuestra el teorema de Lax-Milgram para poder determinar existencia y unicidad de soluciones débiles de problemas de contorno de tipo Dirichlet (homogéneos) principalmente así como para minimización de funcionales. En esta asignatura, vemos así en el teorema una herramienta para ecuaciones en derivadas parciales y optimización (existencia y unicidad de mínimo de un funcional).

En la asignatura de *Ecuaciones en Derivadas Parciales* se da teoría clásica de ecuaciones en derivadas parciales por lo que no sigue la misma filosofía que este trabajo.

En la asignatura de *Análisis Numérico de EDPs* se hace un breve repaso de espacios de Sobolev y formulación débil para presentar el método de los elementos finitos.

El objetivo de este trabajo es profundizar en el teorema de Lax-Milgram, para ello no lo veremos solo como una simple herramienta, aunque fuera motivado como tal, sino que lo enunciaremos y demostraremos detalladamente analizando diversos aspectos del teorema así como una demostración alternativa del mismo. También presentaremos una generalización del teorema, el teorema de Stampacchia, el cual da lugar a la teoría de inecuaciones variacionales. Finalmente, repasaremos los espacios de Sobolev y la formulación débil vista en *Modelos Matemáticos II* para determinar existencia y unicidad de problemas de contorno. Aunque no nos quedaremos ahí ya que también analizaremos la regularidad de las soluciones débiles para ver que también son soluciones clásicas. Veremos distintos tipos de condiciones de contorno, tanto Dirichlet como Neumann, aprovechando el teorema de Stampacchia para trabajar con las condiciones tipo Dirichlet no homogéneas. Las EDPs elípticas son el ejemplo clásico de aplicación del teorema, así que estudiaremos un problema de contorno que involucra a la EDP elíptica lineal general de segundo orden y comentaremos un ejemplo de problema de contorno proviniente de la física, el problema de la membrana. Terminaremos el trabajo, con las aplicaciones del teorema de Stampacchia a las inecuaciones variacionales, en concreto al problema del obstáculo, también proviniente de la física. Profundizando y ampliando los conocimientos adquiridos en la asignatura *Modelos Matemáticos II*.

Capítulo 1

Introducción

Un problema asociado a una ecuación en derivadas parciales (EDP) diremos que está bien planteado si tiene solución, esta solución es única y la misma depende continuamente de los datos dados en el problema. ¿Pero qué entendemos por una solución de una EDP? ¿Deberíamos pedir que una solución de una EDP sea analítica o infinitamente diferenciable? Esto sería desde luego deseable e ideal pero tal vez estamos pidiendo demasiado. Quizás sería más conveniente pedir a una ecuación de orden k que sus soluciones sean al menos k veces diferenciables con continuidad. Entonces, al menos todas las derivadas que aparecen en la ecuación existirán y serán continuas aunque es probable que ciertas derivadas de orden superior no existan. Esta noción de solución será lo que llamaremos una solución clásica de una EDP, que es la noción más razonable que podría existir. Existen diversos métodos para resolver estas ecuaciones: separación de variables, serie de potencias, soluciones por similaridad, métodos de transformada,... con los cuales se podría encontrar una solución (clásica) explícita.

Esta noción de solución clásica es la que se viene abordando desde el inicio de las EDPs, por los finales del siglo XVIII, estudiadas por Jean le Rond d'Alembert, Daniel Bernoulli y Pierre Simon Laplace. Pero llegó un momento en el que esta noción cambiaría.

¿Podemos tener siempre una solución clásica de una EDP? Ciertas EDPs se pueden resolver en el sentido clásico pero muchas otras, la mayoría, no. En general, podemos ver que hay ecuaciones que no tienen soluciones clásicas pero que, sin embargo, están bien planteadas si redefinimos el concepto de solución, lo que se conoce como soluciones débiles. De hecho, incluso en las ecuaciones que se pueden resolver en el sentido clásico resulta más práctico estudiar primero la existencia de soluciones débiles y luego comprobar la regularidad de la solución. Las soluciones débiles involucran el concepto de derivada débil el cuál es un concepto más general que el de derivada clásica.

Para este nuevo concepto de solución, Serguei Sobolev y Laurent Schwarz introdujeron, en la década de los años 40, los conocidos espacios de Sobolev. Estos espacios de funciones estaban basados en el concepto de derivada débil. Constaban de funciones $L^p(\Omega)$ cuya derivadas (débiles) también pertenecieran a dicho espacio. Aquellos espacios se conviertieron en el ambiente natural para el estudio de las soluciones de EDPs (en sentido débil).

Esto generó nuevos métodos para la resolución de EDPs como el método variacional con el cual no se puede obtener una solución explícita, sino estudiar el comportamiento cualitativo de la solución de la EDP: existencia y unicidad, lo cual nos basta ya que al surgir muchas EDPs del modelado, nos interesan saber como se comportarán esas soluciones aunque no sepamos su forma explícita.

El teorema de Lax-Milgram fue presentado por primera vez en 1954, en *Parabolic equations* [8], por Arthur Milgram y Peter Lax: con el objetivo de contribuir a la teoría de ecuaciones en derivadas parciales que estaba en pleno apogeo en ese momento. Fue originalmente, introducido como un lema para probar un resultado sobre ecuaciones en derivadas parciales parabólicas pero debido a su importancia cada vez se le considera más como "teorema". El teorema de Lax-Milgram utiliza el método variacional para darnos existencia y unicidad en sentido débil de diversos problemas de contorno que involucran EDPs, en especial, las de tipo elíptico.

El teorema de Lax-Milgram tiene diversas generalizaciones, entre otras, el teorema de Stampacchia probado en 1964, [12]. Fue introducido para estudiar ecuaciones en derivadas parciales que involucraban desigualdades. Este teorema es el punto de partida de la teoría de inecuaciones variacionales la cual tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, en física [6].

Por otro lado, nos gustaría destacar, aunque no es un objetivo del trabajo, que el método variacional ha sido utilizado para crear métodos numéricos para aproximar las soluciones débiles de EDPs. De hecho, el método de los elementos finitos se basa fuertemente en el teorema de Lax-Milgram y el método variacional.

Capítulo 2

El Teorema de Lax-Milgram

En este capítulo estudiaremos el teorema de Lax-Milgram en un ambiente abstracto de espacios de Hilbert.

2.1. El teorema de Lax-Milgram

Al igual que el teorema de representación de Riesz, el teorema de Lax-Milgram es otro teorema de representación, que supone una generalización del de Riesz. Veremos en este teorema que las formas bilineales sobre un espacio de Hilbert son representables por elementos del dual de dicho espacio. Para la demostración nos apoyaremos fuertemente en el teorema de Riesz, se podría considerar, por consiguiente, que el teorema de Lax-Milgram es una consecuencia de este teorema. [1]

Recordemos el teorema de Riesz:

Teorema 2.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$(dual topológico de H). Entonces existe un único $v \in H$ tal que $f(x) =< x, v >$, $\forall x \in H$. Además,*
$\| f \| = \| v \|$.

[1] Podemos consultar, en el apéndice A, los conceptos previos al teorema de Lax-Milgram, los cuales son un repaso de algunos aspectos de las asignatura *Análisis Funcional* vista en el Grado en Matemáticas

La demostración que presentamos del teorema de Lax-Milgram está recogida en [1] la cual es una adaptación de la presentada en [7].

En primer lugar, introduciremos unos lemas los cuales nos ayudarán a la demostración del teorema.

Lema 2.1.1. *Sea H un espacio de Hilbert, $x, y \in H$. Si ocurre que*

$$< x, z >=< y, z > \quad \forall z \in H,$$

entonces $x = y$.

Demostración. La aplicación $L : H \to \mathbb{R}$ tal que $L(z) =< x, z >$ $(=< y, z >)$, es lineal por la linealidad en el segundo argumento del producto escalar sobre $\mathbb{R}$ y es continua usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz $\mid L(z) \mid = \mid < x, z > \mid \leq \parallel x \parallel \parallel z \parallel$. Por el Teorema de Representación de Riesz y la simetría del producto escalar en $\mathbb{R}$: existe un único $h \in H$ tal que $L(h) =< z, h >=< h, z >, \quad \forall z \in H \quad \Rightarrow x = y = h$.

■

Definición 2.1.1. *Una aplicación lineal $L : X \to Y$ siendo X, Y espacios normados, se dice que está* acotada inferiormente *si existe una constante $\gamma > 0$ tal que*

$$\gamma \parallel x \parallel \leq \parallel L(x) \parallel, \quad \forall x \in X. \tag{2.1}$$

Lema 2.1.2. *Sean X, Y espacios normados. Entonces una aplicación lineal $L : X \to Y$ admite una inversa continua si y sólamente si L está acotada inferiormente.*

Demostración. Suponemos que L está acotada inferiormente, esto es que

$$\exists \quad \gamma > 0 \quad tq \qquad \gamma \parallel x \parallel \leq \parallel L(x) \parallel, \quad \forall x \in X. \tag{2.2}$$

Usando esto vemos que

$$x \in N(L) \Leftrightarrow L(x) = 0 \Leftrightarrow \| L(x) \| = 0 \Leftrightarrow \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

obteniendo que $N(L) = \{0\}$ lo cual implica que L es inyectiva por ser lineal. Por lo tanto L se puede invertir, es decir, existe $L^{-1} : R(L) \to X$. Si consideramos $L^{-1}(y) = x$ entonces $y = L(x)$, de (2.2) obtenemos que la inversa está acotada y por tanto es continua:

$$\| L^{-1}(y) \| = \| x \| \leq \frac{1}{\gamma} \| L(x) \| = \frac{1}{\gamma} \| y \|, \quad \forall y \in Y. \tag{2.3}$$

El recíproco es trivial, si tenemos que la inversa es continua entonces (2.3) $\Rightarrow$ (2.2).

■

Observamos de este lema que si L es acotada inferiormente entonces L admite una inversa continua, es más, de la demostración obtenemos una cota para la continuidad de L^{-1}. Dicha cota es el inverso de la cota inferior de L (la constante γ de (2.1)).

Lema 2.1.3. *Sea X un espacio de Banach y $L : X \to X$ un operador lineal continuo. Si L está acotado inferiormente, entonces $R(L)$, la imagen de L, es cerrada en X.*

Demostración. Suponemos que L está acotado inferiormente, esto es que

$$\exists \quad \gamma > 0 \quad tq \qquad \gamma \| x \| \leq \| L(x) \|, \quad \forall x \in X.$$

Tomamos $\{y_n\}$ una sucesión de elementos de $R(L)$ tal que $\{y_n\} \to y \in X$, probaremos que $y \in R(L)$.

Tenemos que

$$\exists\{x_n\} \subset X \text{ tal que } \{y_n\} = \{L(x_n)\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando que está acotado inferiormente obtenemos

$$\| y_n - y_m \| = \| L(x_n) - L(x_m) \| = \| L(x_n - x_m) \| \geq \gamma \| x_n - x_m \| .$$

Como la sucesión $\{y_n\}$ converge, en particular es de Cauchy, la desigualdad anterior nos dice que $\{x_n\}$ es de Cauchy y al ser X un espacio de Banach la sucesión converge a un elemento $x \in X$. Finalmente, usando la continuidad de L vemos que

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} L(x_n) = L(x).$$

Hemos encontrado un x en X tal que $L(x) = y$, por tanto $y \in R(L)$, lo cual nos dice que $R(L)$ es cerrada. ■

Teorema 2.1.2 (Teorema de Lax-Milgram)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal con las siguientes propiedades:*

1. *a es continua: existe una constante real C tal que*

$$| a(x,y) | \leq C \| x \| \| y \|, \quad \forall x, y \in H. \tag{2.4}$$

2. *a es coerciva: existe una constante real positiva α tal que*

$$| a(x,x) | \geq \alpha \| x \|^2, \quad \forall x \in H. \tag{2.5}$$

Entonces, para cada $f \in H^*$ existe un único $y_0 \in H$ tal que $a(x, y_0) = f(x)$, $\forall x \in H$.

Demostración. Fijado $y \in H$ definimos $a_y : H \to \mathbb{R}$ como $a_y(x) = a(x,y), \quad \forall x \in H$.

Como a es lineal y continua, así pues, a_y también lo es, ya que hemos fijado uno de sus argumentos.

Por el Teorema de Riesz, existe un único $z \in H$ tal que

$$a(x,y) = a_y(x) =< x, z >, \quad \forall x \in H.$$

Como este proceso lo podemos hacer para cada y en H, definimos el operador A de H en H dado por $A(y) = z$ tal que $< x, z >= a(x,y) =< x, A(y) >$, $\forall x \in H$. Por el teorema de Riesz, $f \in H^*$ será de la forma $f(x) =< x, z_f >$, $\forall x \in H$ para un único $z_f \in H$. Nuestro objetivo será por tanto probar la igualdad

$$a(x,y) =< x, A(y) >=< x, z_f >, \quad \forall x \in H,$$

es decir, lo que queremos es encontrar un y tal que $A(y)$ sea z_f. Trabajaremos con la aplicación A y veremos que efectivamente la podemos invertir, es decir, dado el z_f asociado a f obtener nuestro y.

A es un operador lineal,

$$\begin{aligned} &< x, A(\alpha u + \beta v) >= a(x, \alpha u + \beta v) = \alpha a(x,u) + \beta a(x,v) = \\ &\qquad \alpha < x, A(u) > + \beta < y, A(v) >=< x, \alpha A(u) + \beta A(v) >, \\ &\qquad\qquad \forall x, u, v \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

y por el lema 2.1.1 tenemos que

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v), \quad \forall x, u, v \in H, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Además, A es un operador continuo por serlo la forma bilineal a (2.4),

$$\| A(y) \|^2 =< A(y), A(y) >= a(A(y), y) \leq C \| A(y) \| \| y \|, \quad \forall y \in H,$$

lo cual implica la continuidad de A

$$\| A(y) \| \leq C \| y \|, \quad \forall y \in H.$$

Como la forma bilineal a es coerciva (2.5) existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\alpha \| y \|^2 \leq a(y,y) =< y, A(y) > \leq \| y \| \| A(y) \| \Rightarrow \alpha \| y \| \leq \| A(y) \|, \quad \forall y \in H. \tag{2.6}$$

es decir, A está acotado inferiormente por lo que usando el lema 2.1.2, A^{-1} existe y es continuo y, por el lema 2.1.3, $R(A)$ es cerrada en H.

Vamos a demostrar que $R(A) = H$. Supongamos que $R(A) \subsetneqq H$. Entonces por el teorema de la Proyección (ya que la imagen de A es cerrada) existe $w \in H$ con $w \neq 0$ tal que $w \in R(A)^{\perp}$ pero entonces $\alpha \| w \|^2 \leq a(w,w) =< w, A(w) >= 0$ por lo que w debe ser 0 lo cual es una contradicción. Así que $R(A) = H$, juntando a esto que A es invertible obtenemos que la ecuación $A(y) = z$ tiene una única solución para cada $z \in H$.

Por lo anterior, $f(x) =< x, z_f >, \forall x \in H$, satisfaciendo esta igualdad un único $z_f \in H$. Hemos visto que existe un único $y_0 \in H$ tal que $A(y_0) = z_f$. Por consiguiente,

$$a(x, y_0) =< x, A(y_0) >=< x, z_f >= f(x), \quad \forall x \in H.$$

Que es justo lo que queríamos demostrar.

■

Podemos ver que el teorema de Lax-Milgram es una generalización del Teorema de representación de Riesz, ya que en el caso que la forma bilineal sea el producto escalar del espacio, obtenemos el Teorema de Riesz como caso particular. Vemos fácilmente que el producto escalar es bilineal por definición, continuo por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|< x, y >| \leq C \parallel x \parallel \parallel y \parallel$ y coercivo por definición $< x, x >= \parallel x \parallel^2$.

Si pensamos en la forma bilineal como una aplicación lineal de una variable $a(, \cdot) : H \to H^*$, podemos definir para cada $y \in H$ una aplicación $M_a(y) = a(\cdot, y) \in H^*$. El teorema de Lax-Milgram nos afirma la existencia de inversa de esta aplicación lineal siempre que la forma bilineal sea coerciva y continua. Es decir, para cada $f \in H^*$, el teorema nos asegura que existe $y_0 \in H$ tal que $M_a(y_0) = f$. Como este elemento es único la inversa está bien definida, es lógico preguntarse si esta inversa es continua. Para ver que efectivamente es continua basta aplicar el corolario que presentamos a continuación.

Corolario 2.1.1. *Sea $y_0 \in H$ el elemento asociado al funcional continuo $f \in H^*$ dado por el teorema de Lax-Milgram. Entonces tenemos la siguiente desigualdad*

$$\parallel y_0 \parallel \leq \frac{1}{\alpha} \parallel f \parallel,$$

donde α es la constante de coercividad de la forma bilineal a usada en dicho teorema.

Demostración. Sea $z = A(y)$ la ecuación que obtuvimos en la demostración del teorema de Lax-Milgram. Según vimos, el lema 2.1.2 nos asegura que A^{-1} es continua y que una cota para la continuidad de este operador inverso es la cota inferior del operador. En este caso la cota inferior del operador A es α como vimos en la demostración del teorema de Lax-Milgram en (2.6). Entonces

$$\parallel y \parallel = \parallel A^{-1}(z) \parallel \leq \frac{1}{\alpha} \parallel z \parallel .$$

Como z proviene de aplicarle el Teorema de Representación de Riesz al funcional f, esto implica que $\parallel z \parallel = \parallel f \parallel$. Obteniendo así lo que queríamos demostrar

$$\parallel y \parallel \leq \frac{1}{\alpha} \parallel z \parallel = \frac{1}{\alpha} \parallel f \parallel .$$

■

Por consiguiente, la aplicación que a cada $f \in H^*$ le corresponde un y_0 de H según el teorema de Lax-Milgram es continua. Además, este corolario nos da una cota a priori del y_0 asociado a f del cual no conocíamos nada.

2.2. Una demostración alternativa

Vamos a exponer una demostración alternativa al teorema de Lax-Milgram que en vez de apoyarse en el teorema de representación de Riesz, usa una variante del teorema de Hahn-Banach atribuida a Mazur. Esta demostración está recogida en [1].

Teorema 2.2.1. *Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio de Banach X. Entonces, para todo $x_0 \in X \setminus M$ existe un funcional lineal continuo $f_0 \in X^*$ tal que $f_0(x_0) > 1$ y $f_0 = 0$ en M.*

Demostración. (Véase apéndice B de [1]).

■

Demostración alternativa del teorema de Lax-Milgram

Demostración. Para cada $y \in H$ fijo, tenemos que $a(\cdot, y) : H \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo. Podemos definir la aplicación $A : H \to H^*$ dada por $Ay = a(\cdot, y)$. A es lineal y continua ya que a lo es. Además, A está también acotada inferiormente

$$\alpha \parallel y \parallel^2 \leq | a(y,y) | = | Ay(y) | = \parallel y \parallel | Ay\left(\frac{y}{\parallel y \parallel}\right)$$

$$\leq \parallel y \parallel \sup_{\|y\|=1} \{Ay(y)\} = \parallel y \parallel \parallel Ay \parallel, \quad \forall y \in H.$$

con lo cual nos queda que

$$\alpha \parallel y \parallel \leq \parallel Ay \parallel, \quad \forall y \in H.$$

Por los lemas 2.1.2 y 2.1.3 tenemos que A es inyectiva y que $R(A)$ es cerrada en H^*.

La imagen de A es H^*. Supongamos lo contrario y lleguemos a contradicción. Suponemos que existe $0 \neq \hat{f} \in H^*$ tal que $\hat{f} \notin R(A)$. Por el teorema 2.2.1 (variante de Hahn-Banach), existe $z \in H^{**}$ tal que $z(\hat{f}) > 1$ y $z(f) = 0$ para cualquier $f \in R(A)$. Como H es reflexivo, por ser un espacio de Hilbert, podemos identificar z con $x \in H$, por lo que las propiedades de z se transforman en $\hat{f}(x) > 1$ y $f(x) = a(x,y) = Ay(x) = 0$ para cada $f \in R(A)$ y para cada $y \in H$. La coercividad de a y la segunda de estas dos propiedades implica que $x = 0$ y por la linealidad de $\hat{f}$, $\hat{f}(x) = 0$, lo cual es una contradicción y, por tanto, $R(A) = H^*$.

Tenemos que para cada $f \in H^*$, existe $y_0 \in H$ tal que $f = Ay_0$, es decir, $f(x) = Ay_0(x) = a(x, y_0)$ para todo x en H. Como A es inyectiva y_0 es único, que es justo lo que queríamos demostrar.

■

Esta demostración es similar a la que usa el teorema de Riesz ya que ambas definen una aplicación A asociada a la forma bilineal, lo único que esta vez A en lugar de ir de H en H, va de H en su dual y en este caso esta aplicación viene dada por la forma bilineal directamente en vez de por el producto escalar.

Podemos pensar que el teorema de Lax-Milgram no es consecuencia del Teorema de Riesz, sino que podemos obtener una prueba alternativa que se basa en otro gran teorema del análisis funcional, pero lo cierto es que el teorema de Riesz ha estado implícitamente en la demostración para ver la reflexividad de H (aunque puede ser demostrado también por el teorema de Hahn-Banach). Como vemos los teoremas de extensión Hahn-Banach en espacios de Hilbert implica resultados similares al de Riesz, de hecho la variante aquí expuesta, el teorema 2.2.1, cuando el espacio de Banach es Hilbert es esencialmente el teorema de la proyección que es el que se usa para demostrar el de Riesz. Esto nos hace ver la relación tan estrecha que existe entre los grandes teoremas del análisis funcional.

2.3. Resultado recíproco del teorema

Veamos ahora, un resultado recíproco al de Lax-Milgram, si una forma bilineal continua y positiva cumple la tesis del teorema de Lax-Milgram, entonces, ¿debe ser coerciva? La respuesta es sí, pero hay que añadirle una cosa más que es que también sea simétrica como veremos a continuación.

Primero veremos un lema que nos servirá de ayuda para dicha demostración.

Lema 2.3.1. *Sean X, Y espacios de Banach, $L : X \to Y^*$ una aplicación lineal. Entonces L es biyectiva si y sólo si está acotada inferiormente.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en (p. 55, [1]).

■

Proposición 2.3.1. *Sea $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y continua. Si además, es positiva, esto es que $a(x,x) > 0$, $\forall x \in H$. Si para cada $f \in H^*$ existe un único y_0 tal que $a(x, y_0) = f(x)$, $\forall x \in H$, entonces la forma bilineal a tiene que ser coerciva.*

Demostración. Vamos a ver en primer lugar que a cumple la siguiente desigualdad, para ello la demostración es la misma que la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

$$a(u,v) \leq a(u,u)^{\frac{1}{2}} a(v,v)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.7}$$

Por la positividad de a, sabemos que $a(u-\lambda v, u-\lambda v) \geq 0$ para cualesquiera $u, v \in H$, y para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Utilizando la bilinealidad y simetría desarrollamos esa expresión y nos queda que

$$0 \leq a(u - \lambda v, u - \lambda v) = a(u,u) - 2\lambda a(u,v) + \lambda^2 a(v,v).$$

Cuando $a(v,v) = 0$ se obtiene (2.7) trivialmente, consideremos entonces el caso que sea distinto de cero y tomemos $\lambda = \frac{a(u,v)}{a(v,v)}$. Entonces obtenemos

$$a(u,u) - 2\frac{a(u,v)^2}{a(v,v)} + \frac{a(u,v)^2}{a(v,v)} = a(u,u) - \frac{a(u,v)^2}{a(v,v)},$$

que es equivalente a (2.7).

Ahora, sea $A : H \to H^*$ la aplicación definida como $Ay = a(\cdot, y)$. Como vimos en la demostración alternativa del teorema de Lax-Milgram en la sección 2.2, A es inyectiva y sobreyectiva, es decir, biyectiva. Al ser una aplicación lineal biyectiva, por el lema 2.3.1, tiene que ser acotada inferiormente, es decir, existe γ tal que $\gamma \parallel y \parallel \leq \parallel Ay \parallel, \quad \forall y \in H$. Así, vemos que

$$\begin{aligned} \gamma \parallel y \parallel \leq \parallel Ay \parallel = \parallel a(\cdot, y) \parallel = sup\left\{\frac{a(x,y)}{\parallel x \parallel} : x \neq 0\right\} \\ \leq \frac{a(x,x)^{\frac{1}{2}} a(y,y)^{\frac{1}{2}}}{\parallel x \parallel}, \quad \forall x, y \in H. \end{aligned}$$

Haciendo en la desigualdad anterior $y = x$ y dejando x libre obtenemos lo que estabamos buscando, la coercividad.

$$\gamma \parallel x \parallel^2 \leq a(x,x), \quad \forall x \in H.$$

■

Vemos que la coercividad es algo demasiado restrictivo en general, es una condición suficiente pero no necesaria. En el caso particular de que la forma bilineal sea simétrica vemos que sí es necesaria. También es destacable señalar que cuando la forma bilineal a es simétrica entonces es un producto escalar en el espacio H. La bilinealidad y la simetría se cumplen trivialmente por la definición de a, mientras que la positividad se cumple por la coercividad (tomando como $\alpha > 0$, la constante de coercividad):

$$a(x,x) \geq \alpha \parallel x \parallel^2 \geq 0 \quad \forall x \in H \quad \text{y} \quad a(x,x) = 0 \geq \alpha \parallel x \parallel^2 \geq 0 \Leftrightarrow \parallel x \parallel = 0.$$

Pero no sólo eso, sino que la norma inducida por dicho producto escalar es equivalente a la considerada en el espacio H. Tomando como norma inducida por a, $\parallel x \parallel = a(x,x)^{\frac{1}{2}}$. Gracias a la coercividad de a tenemos

$$a(x,x) \geq \alpha \parallel x \parallel^2 \Rightarrow a(x,x)^{\frac{1}{2}} \geq \alpha \parallel x \parallel,$$

y por la continuidad de a (tomando como $C > 0$ la constante por la cual se puede acotar a):

$$a(x,x) \leq C \parallel x \parallel^2 \Rightarrow a(x,x)^{\frac{1}{2}} \leq C \parallel x \parallel \quad \forall x \in H.$$

Se puede ver en este caso que la simetría nos da una reformulación del teorema de representación Riesz para el producto escalar escogido. Así que suscitará mayor interés cuando la forma bilineal no sea simétrica, asimismo veremos también que cuando la forma bilineal sea simétrica podremos encontrar una equivalencia entre el Teorema de Lax-Milgram y la minimización de un cierto funcional.

2.4. Minimización de funcionales

En esta sección vamos a ver la equivalencia que existe entre el teorema de Lax-Milgram y la minimización de ciertos funcionales, lo cual nos será de utilidad posteriormente para las aplicaciones del teorema. Para esta relación tendremos que suponer que la forma bilineal sea, además, simétrica. Por lo que también las formas bilineales simétricas tienen un especial interés en el teorema de Lax-Milgram. La coercividad no es necesaria para esta relación, para garantizar que minimiza cierto funcional, pero si lo será para garantizar que dicho mínimo es el único del funcional.

Teorema 2.4.1. *Sea H un espacio prehilbertiano, a una forma bilineal continua, positiva y simétrica. Entonces $y_0 \in H$ cumple*

$$a(x, y_0) = f(x), \quad \forall x \in H, \tag{2.8}$$

si y sólo si, dicho $y_0 \in H$, minimiza el siguiente funcional $J : H \to \mathbb{R}$:

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u), \quad u \in H. \tag{2.9}$$

Si además a es coerciva con constante $\alpha > 0$ entonces el funcional tiene un único mínimo.

Demostración. Sean $x, y_0 \in H$ y $t \in \mathbb{R}$. Tenemos que

$$\begin{aligned} J(tx + y_0) &= \frac{1}{2}a(tx + y_0, tx + y_0) - f(tx + y_0) \\ &= \frac{1}{2}a(y_0, y_0) + a(tx, y_0) + \frac{t^2}{2}a(x, x) - tf(x) - f(y_0) \\ &= J(y_0) + t(a(x, y_0) - f(x)) + \frac{t^2}{2}a(x, x). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Supongamos que $y_0 \in H$ cumple (2.8), entonces tomando (2.10) con $t = 1$ tenemos que

$$J(x + y_0) = J(y_0) + \frac{1}{2}a(x, x) \geq J(y_0) \quad \forall x \in H, \tag{2.11}$$

o lo que es lo mismo, y_0 minimiza (2.9).

Recíprocamente, si y_0 minimiza el funcional (2.9), entonces la derivada de la función $\Phi(t) = J(tx + y_0)$ tiene que ser cero en $t = 0$, para toda $x \in H$. Derivando respecto de t en (2.10) tenemos que

$$\Phi'(0) = a(x, y_0) - f(x) = 0, \quad \forall x \in H$$

es decir, se cumple (2.8).

Para concluir, si la forma bilineal sea coerciva, de (2.11) usando la coercividad, para cualquier x no nulo tenemos

$$J(x+y_0) = J(y) + \frac{1}{2}a(x,x) \geq J(y_0) + \alpha \parallel x \parallel^2 > J(y_0),$$

con lo cual demostramos que cuando la forma bilineal es coerciva entonces y_0 es el único mínimo del funcional.

■

Gracias a este teorema, podremos deducir la existencia y unicidad de ciertos mínimos de funcionales con el teorema de Lax-Milgram. Además, el teorema de Lax-Milgram es una herramienta simple y eficiente para probar existencia y unicidad de ecuaciones en derivadas parciales lineas como veremos más adelante. Es interesante ver la relación que existe entre la ecuación (2.8) y el problema de minimización (2.9). En el lenguaje del cálculo de variaciones se dice que (2.8) es la ecuación de Euler asociada al problema de minimización correspondiente (2.9).

Definición 2.4.1. *Se dice que un subconjunto K de un espacio vectorial real H es convexo si* $\forall t \in [0,1]$, $\forall a, b \in K$ *se tiene que* $(1-t)a + tb \in K$.

Teorema 2.4.2. *Sea K un subconjunto no vacío, convexo y cerrado de un espacio de Hilbert H y $a : H \times H \to \mathbb{R}$ una forma bilineal, coerciva y continua. Entonces para cada $f \in H^*$ existe un único $y_0 \in K$ tal que $J(y_0) = \inf_{w \in K} J(w)$ donde J viene definida como*

$$J(w) = \frac{1}{2}a(w,w) - f(w), \quad w \in K.$$

Demostración. Vemos que el funcional J está acotado inferiormente, pues :

$$\begin{aligned} J(w) \geq \frac{1}{2}\alpha \parallel w \parallel^2 - \parallel f \parallel \parallel w \parallel = \frac{1}{2\alpha}(\alpha \parallel w \parallel - \parallel f \parallel)^2 - \frac{\parallel f \parallel^2}{2\alpha} \\ \geq -\frac{\parallel f \parallel^2}{2\alpha} \quad \forall w \in K. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Sea $m = \underset{w \in K}{inf}\, J(w)$ y $\{w_n\}$ una sucesión minimizante, es decir, tal que

$$\lim_{n\to\infty} J(w_n) = a, \quad w_n \in K.$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha \parallel w_n - w_m \parallel^2 &\leq a(w_n - w_m, w_n - w_m) \\
&= 2a(w_n, w_n) + 2a(w_m, w_m) - a(w_n + w_m, w_n + w_m) \\
&= 4J(w_n) + 4J(w_m) - 8J\left(\frac{w_n + w_m}{2}\right) \\
&\leq 4J(w_n) + 4J(w_m) - 8m,
\end{aligned}$$

nótese que $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in K$ debido a la convexidad de K. Como $\{J(w_n)\} \to m$ y $\{J(w_m)\} \to m$ entonces tenemos que $\{w_n\}$ es de Cauchy en H y por tanto converge a un $y_0 \in H$. Como K es cerrado entonces $y_0 \in K$. La continuidad de J nos da

$$J(y_0) = \lim_{n\to\infty} J(w_n) = \underset{w \in K}{inf}\, J(w).$$

Para ver que y_0 es único, supongamos que y_0 y y_1 son dos soluciones. Claramente la sucesión $y_0, y_1, y_0, y_1, y_0, y_1, ...,$ es una sucesión minimizante, pero como hemos visto debe ser de Cauchy lo cual implica que $y_0 = y_1$.

■

El funcional $J(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v), \quad v \in H$ tiene gran importancia teórica. Se utiliza para modelar ciertos efectos físicos teniendo de esta manera una interpretación natural como el principio de mínima acción, minimización de la energía,... Este resultado nos permite ver condiciones suficientes para que tenga mínimo y sea único.

Capítulo 3

Generalizaciones

3.1. El teorema de Stampacchia

Vamos a introducir las inecuaciones variacionales en espacios de Hilbert que no son más que una generalización de las inecuaciones en $\mathbb{R}^n$. Presentaremos un resultado que generaliza al teorema de Lax-Milgram y el cual es el punto de partida para el estudio de la teoría de inecuaciones variacionales.

El primer problema significativo que involucró a una inecuación variacional fue el problema de Signorini, propuesto por Antonio Signorini en 1959, y resuelto por Gaetano Fichera en 1963. Más tarde, Guido Stampacchia probó una generalización del teorema de Lax-Milgram en 1964, para estudiar problemas de ecuaciones en derivadas parciales, las cuales involucraban inecuaciones variacionales. Esta teoría es aplicable para problemas de economía, finanzas, optimización, teoría de juegos, mecánica,... Para esta sección nos vamos a basar en el libro escrito por el propio Stampacchia junto a Kinderlehrer que trata sobre una introducción a las inecuaciones variacionales [11] y en el libro de análisis funcional [2].

En, dimesión finita, $\mathbb{R}^n$, conocemos como inecuación variacional al siguiente problema: dado un subconjunto K no vacío, cerrado y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $F : K \to$

$(\mathbb{R}^n)^*$ una aplicación continua, encontrar $x \in K$ tal que

$$< F(x), y - x > \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Nota. Por ser de dimensión finita $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$.

Para ver que existen soluciones y son únicas se usan condiciones de coercividad o de monotonía, como veremos en el teorema de Stampacchia, donde la coercividad será una propiedad fundamental. Además, encontramos diversos problemas que nos hacen llegar a inecuaciones variacionales. Gracias a ellas, podemos demostrar la conexión entre funciones convexas y operadores monótonos, si tenemos una función C^1 y (resp. estrictamente) convexa entonces su gradiente es (resp. estrictamente) monótono. En el capítulo 1 de [11] podemos encontrar diversos resultados.

Asimismo, podemos definir una inecuación variacional en un espacio de Hilbert arbitrario no necesariamente de dimensión finita, como el problema: dado un espacio de Hilbert H, y un subconjunto K cerrado y convexo de H y $F : K \to H^*$ una aplicación continua, encontrar $x \in K$ tal que

$$(Fx)(y - x) \geq 0, \quad \forall y \in K.$$

Vamos a presentar, a continuación, los resultados de análisis funcional sobre los que se apoya la demostración del teorema de Stampacchia, estos son principalmente el teorema del punto fijo de Banach cuya demostración está recogida en [3], y otra versión del teorema de la proyección, cuyas demostraciones se pueden consultar en [11].

Teorema 3.1.1 (Teorema del Punto Fijo de Banach). *Sea X un espacio métrico completo y sea $S : X \to X$ una aplicación contractiva, es decir, tal que*

$$\exists \alpha \in (0,1) : \quad d(S(x_1), S(x_2)) \leq \alpha d(x_1, x_2), \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Entonces S tiene un único punto fijo $u \in X$, $S(u) = u$.

Lema 3.1.1. *Sea K un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Entonces para cada $x \in H$ existe un único $y \in K$ tal que*

$$\| x - y \| = \min_{\eta \in K} \| x - \eta \| . \tag{3.1}$$

Definición 3.1.1. *El elemento y que cumple (3.1) es llamado la proyección de x sobre K y lo escribimos como*

$$y = P_K(x).$$

Teorema 3.1.2. *Sea K un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Entonces $y = P_K(x)$ es la proyección de x en K, si y sólamente si,*

$$< y, \eta - y > \geq < x, \eta - y >, \quad \forall \eta \in K.$$

Corolario 3.1.1. *Sea K un subconjunto cerrado y convexo de un espacio de Hilbert H. Entonces el operador P_K es no expansivo, esto es,*

$$\| P_K(x) - P_K(x') \| \leq \| x - x' \|, \quad \forall x, x' \in H.$$

Veamos un ejemplo de inecuación variacional en un espacio de Hilbert, consideremos el problema: Dado H un espacio de Hilbert, K un subconjunto no vacío, cerrado y convexo de él, encontrar un $u \in K$ tal que cumpla la siguiente desigualdad:

$$a(u, v - u) \geq f(v - u), \quad \forall v \in K.$$

Donde f es un elemento del dual de H y a una forma bilineal de $H \times H$. Veremos que el teorema de Stampacchia nos da existencia y unicidad de solución en este problema si f pertenece al espacio dual de H y si a es una forma bilineal continua y coerciva.

Teorema 3.1.3 (Teorema de Stampacchia)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y supongamos que $a : H \times H \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, continua y coerciva. Sea $K \subset H$ un subconjunto no vacío, cerrado y convexo. Entonces, dado $f \in H^*$, existe un único elemento $u \in K$ tal que*

$$a(u, y - u) \geq f(y - u), \quad \forall y \in K. \tag{3.2}$$

Además, si $a(x, y)$ es también simétrica, entonces u es caracterizado por la minimización del siguiente funcional en K:

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - f(u), \quad u \in K.$$

Demostración. Por el teorema de Representación de Riesz tenemos que existe una única $\phi \in H$ tal que $f(x) =< \phi, x >, \quad \forall x \in H$. Por otro lado, si fijamos x tenemos que la aplicación $a(x, y) = a_x(y)$ es un funcional lineal y continuo. Aplicándole ahora el teorema de Representación de Riesz a a_x encontramos un único elemento en H al cual llamamos $A(x)$ tal que $< A(x), y >= a_x(y), \quad \forall y \in H$. Claramente A es un operador lineal de H en H satisfaciendo:

$$\| A(x) \| \leq C \| x \|, \quad \forall x \in H. \tag{3.3}$$

$$\alpha \| x \|^2 \leq < A(x), x >, \quad \forall x \in H. \tag{3.4}$$

donde hemos usado unos razonamientos similares a los de la demostración del teorema de Lax-Milgram, siendo C y α las constantes de continuidad y coercividad respectivamente. Nuestro problema (3.2) es entonces encontrar un único u en K tal que

$$< A(u), y - u > \geq < \phi, y - u >, \quad \forall y \in K. \tag{3.5}$$

Sea $\rho > 0$ constante. Por lo tanto, multiplicando por ρ y sumando y restando u en el primer miembro de ambos productos escalares obtenemos que (3.5) es equivalente a

$$< \rho\phi - \rho A(u) + u - u, y - u > \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

Al cumplir esta desigualdad u, por el teorema de la proyección, lema 3.1.2, u está caracterizada como $u = P_K(\rho\phi - \rho A(u) + u)$, con lo cual para cada $y \in K$, definimos $S(y) = P_K(\rho\phi - \rho A(y) + y)$. El problema entonces se reduce a ver que u es el único punto fijo de este operador, y por tanto la única solución de nuestro problema. Si escogemos ρ adecuadamente, S será una contracción. Como P_K no incrementa la distancia, lema 3.1.1, tenemos que

$$\| S(y_1) - S(y_2) \| \leq \| (y_1 - y_2) - \rho(A(y_1) - A(y_2)) \|,$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \| S(y_1) - S(y_2) \|^2 \leq \| y_1 - y_2 \|^2 - 2\rho < A(y_1) - A(y_2), y_1 - y_2 > \\ + \rho^2 \| A(y_1) - A(y_2) \|^2 \leq \| y_1 - y_2 \|^2 (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2), \end{aligned}$$

gracias a (3.3) y (3.4). Escogiendo $\rho > 0$ tal que $1 - 2\rho\alpha + \rho^2 C^2 < 1$, es decir, $0 < \rho < \frac{2\alpha}{C^2}$, tenemos que S tiene un único punto fijo u, con lo cual obtenemos la tesis del teorema.

Suponemos ahora que $a(x, y)$ es también simétrica. Entonces sabemos que $a(x, y)$ define un producto escalar en H cuya norma inducida es equivalente a la norma definida en H. Por lo tanto, H es un espacio de Hilbert para el nuevo producto escalar. Usando el teorema de Representación de Riesz tenemos que existe un único g en H tal que $f(y) = a(g, y), \quad \forall y \in H$. Por un lado (3.2) es equivalente a encontrar un $u \in K$ tal que

$$a(g - u, y - u) \leq 0, \quad \forall y \in K.$$

La solución de este problema, a la cual llamamos u, es la proyección sobre K de g para el nuevo producto escalar a. Sabemos, por el lema 3.1.1, que u es el único elemento en K que consigue

$$\min_{y\in K} \quad a(g-y,g-y)^{\frac{1}{2}}.$$

Entonces u será el mínimo en K de la función

$$\Phi(y) = a(g-y,g-y) = a(y,y) - 2a(g,y) + a(g,g) = a(y,y) - 2f(y) + a(g,g).$$

como el elemento $a(g,g)$ no depende de y vemos que minimizar este funcional es equivalente a minimizar el funcional buscado en este teorema:

$$J(y) = \frac{1}{2}a(y,y) - f(y), \quad y \in K.$$

■

Corolario 3.1.2. *Bajo las mismas hipótesis del teorema anterior, si consideramos la aplicación $F : H^* \to H$ la cual corresponde a cada $f \in H^*$, un $u \in H$, según el teorema de Stampacchia (está bien definida ya que el u que le corresponde es único). Esta aplicación F es lipschitziana.*

Demostración. Tenemos $u_1, u_2 \in H$, soluciones de las inecuaciones variacionales:

$$u_i \in K : a(u_i, v-u_i) \geq f_i(v-u_i) \text{ para } v \in K, \quad i = 1,2.$$

Tomando $v = u_2$ en la inecuación variacional para u_1 y $v = u_1$ para u_2 obtenemos sumando adecuadamente ambas desigualdades:

$$a(u_1-u_2, u_1-u_2) \leq f_1(u_1-u_2) - f_2(u_1-u_2).$$

y usando la coercividad de a:

$$\alpha \parallel u_1-u_2 \parallel^2 \leq f_1(u_1-u_2) - f_2(u_1-u_2) = (f_1-f_2)(u_1-u_2) \leq \parallel f_1-f_2 \parallel \parallel u_1-u_2 \parallel,$$

con lo cual tenemos que la aplicación así definida es lipschitziana

$$\alpha \parallel u_1 - u_2 \parallel = \alpha \parallel F(f_1) - F(f_2) \parallel \leq \parallel f_1 - f_2 \parallel .$$

■

Vemos que el Teorema de Lax-Miglram expuesto en el capítulo 2 queda como caso particular de este teorema más general. Tomando el caso particular en el que K sea el propio espacio de Hilbert, H, el cual cumple las hipótesis del teorema de Stampacchia. Aplicamos el teorema de Stampacchia: existe un único $u \in H$ tal que $a(u, v - u) \geq f(v - u)$, $\forall v \in H$, como v se mueve en todo el espacio H tenemos la siguiente desigualdad $a(u, v) \geq f(v)$, $\forall v \in H$. Y tomando $-v$ en vez de v, obtenemos la otra desigualdad, y por tanto se da la igualdad buscada en el teorema de Lax-Milgram.

Capítulo 4

Aplicaciones

Gracias al teorema de Lax-Milgram, podremos hallar existencia y unicidad de diversos problemas asociados a EDPs en el sentido débil usando lo que se conoce como el método variacional, el cual es el más utilizado por su versatilidad ya que permite estudiar diversos tipos de ecuaciones realizando ligeras modificaciones. Primero, daremos una motivación del método variacional [2]. Seguiremos con un repaso de los espacios de Sobolev en [2], [7], [10] y [13]. Terminaremos con aplicaciones del teorema de Lax-Milgram y de Stampacchia en problemas de contorno, algunos de los cuales involucrarán EDPs lineales elípticas, e inecuaciones variacionales.

4.1. Motivación

Consideramos el siguiente problema de contorno: dado $f \in C([a,b])$, encontrar u satisfaciendo

$$\begin{cases} -u'' + u = f \qquad \text{en} \quad [a,b], \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{4.1}$$

Una solución clásica de (4.1) es una función $C^2([a,b])$ satisfaciendo (4.1) en el sentido usual. El problema (4.1) se puede resolver explícitamente sin dificultad, pero ignoraremos esto para ilustrar en este ejemplo sencillo el método variacional para resolver algunos problemas de EDPs que expondremos en este capítulo. Multiplicando (4.1) por $v \in C^1([a,b])$, $v(a) = v(b) = 0$ (funciones tests) e integrando (por partes el primer término, y teniendo en cuenta que v se anula en la frontrera) obtenemos

$$\int_a^b u'v' + \int_a^b uv = \int_a^b fv, \qquad \forall v \in C^1([a,b]), \quad v(a) = v(b) = 0. \tag{4.2}$$

Nótese que (4.2) tiene sentido si $u \in C^1([a,b])$ ((4.1) requería dos derivadas de u), de hecho es suficiente con que $u, u' \in L^1(a,b)$, donde u' será la derivada de u en el sentido débil. Diremos (en un primer acercamiento) que una función $C^1([a,b])$ que cumpla (4.2) será una solución débil de (4.1).

Así que los pasos seguidos para resolvereste tipo de problemas por el método variacional serán:

Etapa A Se precisa el concepto de solución débil. En este paso los llamados espacios de Sobolev serán nuestras herramientas básicas.

Etapa B Se probará la existencia y unicidad de solución débil establecida por el método variacional gracias al teorema de Lax-Milgram

Etapa C Se analiza la regularidad de la solución débil.

Etapa D Se demuestra que si una solución débil tiene la regularidad de una solución clásica, se logra recuperar la solución clásica.

4.2. Espacios de Sobolev

Vamos a introducir el espacio natural dónde se tratará la formulación débil de problemas asociados a ecuaciones en derivadas parciales, éstos son los espacios de Sobolev, introducidos por Seguéi Sobolev y Laurent Schwarz, ya que incorporan intrísicamente la noción de derivada débil. De los espacios de Sobolev sugió la teoría de distribuciones que formalizó Laurent Schwartz a finales de la década de 1940 lo que le llevó a ganar la medalla Fields en 1950. El concepto de distribución generalizaba la noción de función y de medida, gracias a esta teoría se pudo generalizar el concepto de derivada que estabamos buscando, con la derivada distribucional, de modo que se pudiera "derivar"funciones que sólo fueran localmente integrables en un sentido distinto al de derivada clásica. Esta nueva derivada nos permitirá y facilitará el encontrar soluciones de EDPs.

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ medible, abierto y no vacío, introducimos el espacio $L^p(\Omega)$, con $1 \leq p < \infty$, como el espacio de todas las funciones f medibles en Ω tales que $\mid f \mid^p$ es integrable (en el sentido de Lebesgue) en Ω, donde $\mid \cdot \mid$ es la norma euclídea de $\mathbb{R}^n$. $L^p(\Omega)$, es un espacio normado con la norma

$$\| f \|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \mid f \mid^p \right)^{1/p}.$$

El caso en el que $p = 2$, $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$< f, g >_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega fg.$$

El caso en el que $p = \infty$, el espacio $L^\infty(\Omega)$[1] se define como las funciones medibles sobre Ω y acotadas casi por doquier en Ω. Este espacio es normado con la norma

$$\| f \|_{L^\infty(\Omega)} = \min\{C \geq 0 : \mid f \mid \leq C\}.$$

A partir de estos espacios, se define también $L^1_{loc}(\Omega)$, el espacio de funciones localmente integrables sobre Ω, es decir, las funciones medibles sobre Ω y cuya integral sobre cualquier subconjunto compacto K de Ω es finita.

[1]En los espacios L^p, $1 \leq p \leq \infty$, consideramos que dos funciones son iguales si lo son excepto en un conjunto de medida nula.

Definición 4.2.1. *Un multi-índice α es una n-tupla ordenada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Con cada multi-índice está asociado el siguiente operador diferencial*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_n} \dots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

donde $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ es el orden del operador.

Llamamos $D(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones infinitamente derivables con soporte compacto contenido en Ω, también conocidas estas funciones como funciones tests. Definimos, a continuación, una noción adecuada de convergencia en este espacio.

El operador $D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \dfrac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$, donde α es un multi-índice, denota una derivada de orden $\mid \alpha \mid = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Si $\mid \alpha \mid = 0$ entonces $D^\alpha(v) = v$.

Definición 4.2.2. *Sea $\{v_k\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ y $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Decimos que*

$$v_k \to v \quad \text{en } C_0^\infty(\Omega) \text{ cuando } k \to \infty,$$

si se tienen las siguientes dos propiedades:

1. *Existe un subconjunto compacto $K \subset \Omega$ conteniendo el soporte de cada v_k.*
2. *$\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mid \alpha \mid \geq 0$, $D^\alpha v_k \to D^\alpha v$ uniformemente en Ω.*

Si L es un funcional lineal de $D(\Omega)$ denotamos la acción del funcional L sobre la función test v como $\langle L, v\rangle_{D(\Omega)'}$ o $\langle L, v\rangle$, si no hay riesgo de confusión.

Diremos que un funcional lineal $L : D(\Omega) \to \mathbb{R}$ es continuo en $D(\Omega)$ si

$$\langle L, v_k\rangle \to \langle L, v\rangle \quad \text{cuando } k \to \infty \text{ en } D(\Omega).$$

Definición 4.2.3. *Una distribución en Ω es un funcional lineal continuo en $D(\Omega)$. El espacio de distribuciones de Ω es el espacio dual de $D(\Omega)$ y se denota como $D(\Omega)'$.*

Consideramos que dos distribuciones L_1 y L_2 son iguales si

$$\langle L_1, v\rangle = \langle L_2, v\rangle \quad \forall v \in D(\Omega).$$

La noción de distribución generaliza el concepto de función para más información [10].

Definición 4.2.4. *Sea u una distribución en $D(\Omega)$ y α un multi-índice. Se define la derivada distribucional α-ésima de u, denotada por $D^\alpha u$, mediante:*

$$\langle D^\alpha u, v\rangle := (-1)^{|\alpha|}\langle u, D^\alpha v\rangle, \quad \forall v \in D(\Omega).$$

Podemos definir ahora el concepto de derivada débil, un caso particular de derivada distribucional. Nos interesará que la derivada que obtengamos sea una función y no una distribución por ello introducimos este nuevo concepto de derivada, donde la derivada será una función $L^1_{loc}(\Omega)$. Usaremos esta derivada para hallar soluciones en sentido débil de ecuaciones en derivadas parciales. Veamos primero, que si $u \in C^1(\Omega)$, la fórmula de integración por partes combinada con que v se anula en la frontera da:

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx, \quad \forall v \in C^1_0(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Para que esta fórmula tenga sentido basta con exigir que u y $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ pertenezcan a $L^1_{loc}(\Omega)$. Por tanto es natural pensar en esta fórmula para definir el concepto de derivabilidad en $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definición 4.2.5. *Sea α un multi-índice y $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ es la α-derivada débil de u si cumple*

$$\int_\Omega u(x)D^\alpha v(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Las derivadas clásicas son derivadas débiles y las derivadas débiles son derivadas distribucionales, de este modo vemos el proceso de generalización que hemos realizado para llegar al concepto más general de derivada. Y en caso de existir la derivada débil, ésta es única.

4.2.1. El espacio de Sobolev $W^{m,p}$

Definición 4.2.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, α un multi-índice, $m \geq 2$ un entero y p un número real que cumple $1 \leq p \leq \infty$. Definimos el espacio de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ como el espacio de funciones definidas en Ω tales que para toda α tal que $\mid \alpha \mid \leq m$, u y $D^\alpha(u)$ pertenecen a $L^p(\Omega)$.*

El espacio $W^{m,p}(\Omega)$ con la norma

$$\parallel u \parallel_{W^{m,p}} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \parallel D^\alpha(u) \parallel_p,$$

es un espacio de Banach. En el caso de $p = 2$, se denota el espacio $W^{m,2}(\Omega)$ como $H^m(\Omega)$. Este espacio de Sobolev, es especial, ya que es un espacio de Hilbert con el producto escalar definido como

$$< u, v >_{H^2(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} < D^\alpha(u), D^\alpha(v) >_{L^2} .$$

Nótese que la norma inducida por este producto escalar es equivalente a la que definimos en $W^{m,2}(\Omega)$, la equivalencia entre ambas normas no es más que la equivalencia entre p-normas en dimensión finita.

4.2.2. El espacio de Sobolev $W_0^{m,p}$

Introducimos un nuevo espacio, $W_0^{1,p}(\Omega)$, que es el cierre de $C_0^\infty(\Omega)$ en $W^{1,p}(\Omega)$. Para el caso p=2, volvemos a denotar $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. El espacio $W_0^{1,p}(\Omega)$ vuelve a ser un espacio de Banach, por ser un cerrado de un espacio de Banach, y en particular, $H_0^1(\Omega)$ un espacio de Hilbert. Como $D(\mathbb{R}^n)$ es denso en $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ entonces tenemos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.

Definición 4.2.7. *Decimos que un conjunto abierto Ω es de clase C^m, $m \geq 1$,un entero, si para cada $x \in \Gamma$ existe un entorno U de x en $\mathbb{R}^n$ y una aplicación biyectiva $T : Q \to U$ tal que*

$$T \in C^m(\overline{Q}), \qquad T^{-1} \in C^m(\overline{U}), \qquad T(Q \cap (\mathbb{R}^+)^n = U \cap \Omega, \qquad T(Q_0) = U \cap \Gamma.$$

Donde $Q_0 = \{x \in Q : x_n = 0\}$. Decimos que Ω es de clase C^∞ si es de clase m para todo m.

Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cabe pensar que como las funciones de $D(\Omega)$ se anulan en $\Gamma = \partial\Omega$, también lo hagan las funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Pero esto no tendría sentido ya que las funciones están definidas casi por doquier, y Γ tiene medida nula. Para ello podemos hacer una suposición extra sobre la función que es que admita una extensión continua a $\overline{\Omega}$ para que el valor en Γ tenga sentido. También podemos verlo de manera más general usando la“traza de la función”.

Si Ω es de clase 1 podemos identificar las funciones de $W_0^{1,p}(\Omega)$ con las funciones de $W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (funciones que pertenecen a $W^{1,p}(\Omega)$, que son continuas en Ω y admiten una extensión continua a $\overline{\Omega}$) que se anulan en Γ, podemos ver esto en detalle en ([2], pp. 287-289). De manera más general, se puede probar que existe un operador lineal y continuo $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ tal que $Tu = u|_{\partial\Omega}$ para toda $f \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Entonces, tenemos que una función está en $W_0^{1,p}(\Omega)$ si, y sólo si, su traza Tu, se anula en Γ, con Γ de clase 1, y Ω acotado. ([7], 257-261). Es obvio, que para una función en $C(\overline{\Omega})$ que se anule su traza es lo mismo que se anule en Γ en el sentido usual.

En el caso que Ω sea un intervalo I, tenemos que si $u \in W^{1,p}(I)$ entonces $u \in W_0^{1,p}(I)$ si y sólo si $u = 0$ en los extremos del intervalo ([2], p.217).

Notación: Denotamos como H^{-1} al espacio dual de H_0^1 y como $W^{-1,p'}$ al espacio dual de $W_0^{1,p}$.

Proposición 4.2.1 (Desigualdad de Poincaré)**.** *Sea $1 \leq p < \infty$ y Ω un conjunto abierto y acotado. Entonces existe una constante C (dependiendo de Ω y p) tal que*

$$\| u \|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Se puede consultar en [2] o [7].

■

Corolario 4.2.1. *Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Entonces existe una constante K positiva tal que*

$$\| u \|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq K \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Demostración. Para cada $u \in W^{1,p}(\Omega)$ podemos usar la desigualdad de Poincaré obteniendo

$$\| u \|^2_{W^{1,p}(\Omega)} = \| u \|^2_{L^p(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)} \leq (1+C) \| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)} = K \| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)} .$$

■

En particular, la expresión $\| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\Omega)$, y es equivalente a la norma que definimos en $W^{1,p}(\Omega)$. Ya que usando el corolario y la definición que dimos de la norma en $W^{1,p}(\Omega)$ tenemos que

$$\| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)} \leq \| u \|^2_{L^p(\Omega)} + \| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)} = \| u \|^2_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|^2_{L^p(\Omega)},$$

con lo cual obtenemos la equivalencia de las normas. En particular, en $H_0^1(\Omega)$ la expresión

$$\sum_{i=1}^{N} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i},$$

es un producto escalar que induce la norma $\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}$ y es a su vez equivalente a la norma que definimos en $H^1(\Omega)$.

4.3. Problemas de contorno para ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección vamos a ver ejemplos de problemas de contorno. Un problema de contorno (también llamados como problema de valores en la frontera) es una ecuación diferencial junto con las condiciones de contorno o frontera. Una solución del problema de contorno será una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones de contorno dadas. Probaremos existencia y unicidad de solución de una ecuación diferencial junto a diversas condiciones de contorno usando el método variacional.

4.3.1. Condiciones Dirichlet homogéneas

Consideremos el problema de contorno de Dirichlet (homogéneo).

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en} \quad I = (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Donde f es una función dada que se encuentra en el espacio $L^2(I)$.

Definición 4.3.1. *Llamaremos una solución clásica de* (4.3) *a una función* $u \in C^2(\bar{I})$ *satisfaciendo* (4.3) *en el sentido usual. Una solución débil de* (4.3) *es una función* $u \in H_0^1(I)$ *satisfaciendo*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I). \tag{4.4}$$

Etapa A. Toda solución clásica es una solución débil.

Multiplicamos (4.3) por una función $v \in D(I)$ e integramos por partes. Como $v \in D(I)$ entonces se anula en la frontera de nuestro intervalo. Por lo tanto, nos queda que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in D(I). \tag{4.5}$$

Como $D(I)$ es denso en $H_0^1(I)$, por continuidad se sigue que u es una solución débil de (4.3). Nótese que $H^1(I)$ es el espacio de Hilbert natural para resolverla sin condiciones de contorno. Como en este caso nuestra solución debe anularse en la frontera del intervalo, el espacio de Hilbert adecuado es $H_0^1(I)$ ya que lleva implícito esta condición.

Etapa B. Existencia y unicidad de solución débil.

Podremos afirmar la existencia y unicidad de solución gracias al siguiente resultado.

Proposición 4.3.1. *Dado $f \in L^2(I)$ entonces existe una única solución débil $u \in H_0^1(I)$ del problema* (4.3)*. Además, u se obtiene como*

$$\min_{v \in H_0^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\}.$$

Este es el principio de Dirichlet.

Demostración. Vamos a aplicar el teorema de Lax-Milgram en el espacio de Hilbert $H = H_0^1(I)$ con el producto escalar $< u, v >= \int_I uv + \int_I u'v'$, además, tenemos la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_I u'v' + \int_I uv =< u, v >,$$

y el funcional lineal $F : v \mapsto \int_I fv$. Para poder ver que estamos en las condiciones del teorema, tenemos que ver que la forma bilineal a es continua y coerciva y que f es continuo. La forma bilineal a es continua y coerciva trivialmente ya que es el producto escalar. El funcional f, en efecto, es continuo

$$\left|\int_I fv\right| =< u, v >_{L^2(I)} \leq \| f \|_{L^2(I)} \| v \|_{L^2(I)} \leq C \| v \|, \qquad \forall v \in H_0^1(I).$$

Tenemos existencia y unicidad de solución, además, como a es simétrica, u está caracterizada como el mínimo sobre $H_0^1(I)$ del funcional

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - f(v) = \frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv.$$

■

Etapa C. Regularidad de soluciones débiles.

Primero, vemos que si $f \in L^2(I)$ y $u \in H_0^1(I)$ es la solución débil de (4.3), entonces $u \in H^2(I)$. De hecho, tenemos

$$\int_I u'v' = \int_I (f-u)v, \quad \forall v \in C_0^1(I),$$

y así $u' \in H^1(I)$ (por definición de $H^1(I)$ y teniendo en cuenta que $f - u \in L^2(I)$). Además, si suponemos que $f \in C(\bar{I})$, entonces una solución débil u pertenece a $C^2(\bar{I})$. De hecho, $(u')' \in C(\bar{I})$ y así $C^1(\bar{I})$ (p.204, [2]).

Etapa D. Recuperación de soluciones clásicas.

Sabemos que la solución débil $u \in H_0^1(I)$ de (4.3) es de clase $C^2(\bar{I})$, cuando $f \in C(\bar{I})$. Entonces u se anula en los extremos del intervalo I. Por otro lado, al integrar por partes (4.4) tenemos

$$\int_I -u''v + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Agrupando convenientemente,

$$\int_I v(-u'' + u - f) = 0, \quad \forall v \in H_0^1(I).$$

Y como hemos visto que u es de clase $C^2(\bar{I})$ obtenemos que

$$-u'' + u = f \qquad \text{en} \qquad I.$$

Y por tanto, u es una solución clásica de (4.3).

4.3.2. Condiciones Dirichlet no homogéneas

Consideremos el problema de contorno de Dirichlet (no homogéneo).

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{en} \quad I = (0,1), \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta, \end{cases} \tag{4.6}$$

con α y β constantes reales y f una función dada en $L^2(I)$.

Proposición 4.3.2. *El problema* (4.6) *tiene una única solución* $u \in H^2(I)$*. Además, u es obtenido como*

$$\min_{\substack{v \in H_0^1(I) \\ v(0)=\alpha, v(1)=\beta}} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv \right\};$$

Además, si $f \in C(\bar{I})$ *entonces* $u \in C^2(\bar{I})$.

Demostración. En este problema vamos a considerar el espacio de Hilbert $H = H^1(I)$ con el producto escalar $< u, v >= \int_I uv + \int_I u'v'$ y el subconjunto no vacío, cerrado y convexo

$$K = \{v \in H^1(I); v(0) = \alpha \text{ y } v(1) = \beta\}.$$

Vemos que en este caso $H_0^1(I)$ no sería el espacio más adecuado para resolver el problema ya que la solución no se anula en los extremos del intervalo. Consideraremos un subconjunto cerrado y convexo de $H^1(I)$ que cumpla las condiciones de frontera y así estaremos en las condiciones de aplicar el Teorema de Stampacchia. Multiplicamos (4.6) por $(v-u)$, con $v, u \in K$, $(v-u)$ se anula en los extremos del intervalo I, así que integrando por partes obtenemos

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) = \int_I f(v-u), \quad \forall v \in K.$$

A partir de esta expresión, en particular,

$$\int_I u'(v-u)' + \int_I u(v-u) \geq \int_I f(v-u), \quad \forall v \in K. \tag{4.7}$$

Volvemos a tener la misma forma bilineal a y el mismo funcional lineal F que en el ejemplo anterior. Ya sabemos, que a es bilineal, continua y coerciva, mientras que F es un funcional lineal continuo. Por el teorema de Stampacchia existe un único $u \in K$ que satisface (4.7), y al ser a simétrica, u es obtenido como

$$\min_{v \in K}\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv\}.$$

Para recuperar una solución clásica de (4.6), hacemos $v = u \pm w$ en (4.7) con $w \in H_0^1$ obteniendo

$$\int_I u'w' + \int_I uw = \int_I fw, \quad w \in H_0^1.$$

Esto implica que $u \in H^2(I)$. Si $f \in C(\bar{I})$ razonando como en el caso homogéneo tenemos que $u \in C^2(\bar{I})$.

$\blacksquare$

4.3.3. Condiciones Neumann homogéneas

Esta vez las condiciones de contorno las vamos a imponer sobre la derivada de la solución, fijaremos su valor en los extremos del intervalo. Estas condiciones se conocen como condiciones de (contorno o frontera) de tipo Neumann. En este ejemplo, vamos a imponer que la derivada en la frontera sea nula por lo que serán condiciones de tipo Neumann homogéneas.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \qquad \text{en} \quad I = (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

donde f es una función dada de $L^2(I)$.

Nota. Es impreciso definir la derivada de u en los extremos si $u \in H^1(I)$, pero como veremos u estará en $H^2(I)$ realmente, lo cual implicará que u es de clase $C^1(\bar{I})$ y así la condición de frontera sobre la derivada tendrá sentido.

Como no conocemos a priori el valor de u en los extremos deberemos trabajar con el espacio de Hilbert $H^1(I)$. Una solución débil de (4.8) es una función $u \in H^1$ que cumple

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I). \tag{4.9}$$

Etapa A. Toda solución clásica es una solución débil. Al multiplicar en (4.8) por $v \in D(I)$ e integrar por partes sobre I obtenemos

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \quad v \in D(I). \tag{4.10}$$

Por la densidad de $D(I)$ en $H^1(I)$, por continuidad, se sigue (4.9), viendo así que si u es una solución clásica de (4.8) es también una solución débil.

Etapa B. Existencia y unicidad de solución débil.

Proposición 4.3.3. *Dado $f \in L^2(I)$ entonces existe una única solución débil $u \in H^1(I)$ del problema* (4.8). *Además, u se obtiene como*

$$\underset{v\in H^1}{min}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}.$$

Demostración. Aplicamos el teorema de Lax-Milgram sobre el espacio de Hilbert $H = H^1(I)$ cuyo producto escalar es el usual, $< u, v >= \int_I uv + \int_I u'v'$. La forma bilineal será $a(u, v) = \int_I uv + \int_I u'v'$ que es trivialmente continua y coerciva. Y nuestro funcional lineal F definido como $v \mapsto \int_I fv$ que es continuo por lo visto en la proposición 4.3.1. De esta manera, existe un único $u \in H^1$ satisfaciendo (4.9). Es decir, existe una única solución débil de (4.8). Al ser la forma bilineal simétrica u viene dado por

$$\min_{v\in H^1}\left\{\frac{1}{2}\int_I (v'^2+v^2)-\int_I fv\right\}.$$

■

Etapa C. Regularidad de soluciones débiles. Dado que u cumple (4.9), razonamos igual que en el caso de condiciones tipo Dirichlet. Tenemos $u \in H^2(I)$ y si $f \in C(\bar{I})$ tenemos que $u \in C^2(\bar{I})$.

Etapa D. Recuperación de soluciones clásicas.

Integramos por partes (4.9) obteniendo

$$\int_I (-u''+u-f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad v \in H^1(I). \tag{4.11}$$

Si en (4.11) elegimos $v \in H_0^1(I)$ obtenemos que $-u'' + u = f$ casi por doquier. Volviendo a (4.11) con un $v \in H^1(I)$ arbitrario, nos queda

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \quad v \in H^1(I).$$

Puesto que $v(0)$ y $v(1)$ son arbitrarios, deducimos que $u'(0) = u'(1) = 0$. Así u es una solución clásica de (4.8).

4.3.4. Condiciones Neumann no homogéneas

Consideramos el problema de contorno de Neumann, imponemos el valor de la derivada de la solución en los extremos.

$$\begin{cases} -u'' + u = f \qquad \text{en} \quad I = (0,1), \\ u'(0) = \alpha, \qquad u'(1) = \beta, \end{cases} \tag{4.12}$$

con α y β constantes reales y f es una función dada de $L^2(I)$.

Lema 4.3.1. *Existe una constante K (dependiendo sólo de $\mid I \mid \leq \infty$) tal que*

$$\| u \|_{L^\infty(I)} \leq K \| u \|_{H^1(I)}, \quad \forall u \in H^1.$$

Demostración. Esta demostración se puede consultar en ([2], pp.212-213)

∎

Proposición 4.3.4. *El problema* (4.12) *tiene una única solución $u \in H^2(I)$. Además, u es obtenido como*

$$\underset{v \in H^1}{min} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv + \alpha v(0) - \beta v(1) \right\};$$

Asimismo, si $f \in C(\bar{I})$ entonces $u \in C^2(\bar{I})$.

Demostración. Volvemos a elegir el espacio de Hilbert $H^1(I)$ con su producto escalar usual. Si u es una solución clásica de (4.12) integrando por partes tenemos que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \beta v(1) - \alpha v(0) + \int_I fv, \quad \forall v \in H^1(I).$$

Aplicamos el teorema de Lax-Milgram con la forma bilineal $a(u,v) = \int_I u'v' + \int_I uv$

y el funcional lineal

$$F : v \mapsto \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1).$$

Usando el lema 4.3.1 tenemos que efectivamente F es continuo,

$$\begin{aligned} \mid F(v) \mid = \left| \int_I fv - \alpha v(0) + \beta v(1) \right| \leq \parallel f \parallel_{L^2(I)} \parallel v \parallel_{L^2(I)} + \alpha \parallel v \parallel_{L^\infty(I)} \\ + \beta \parallel v \parallel_{L^\infty(I)} \leq C \parallel v \parallel_{H^1(I)} . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Obteniendo así existencia y unicidad de solución débil de (4.12). Como a es simétrica u viene dado por

$$\min_{v \in H^1} \left\{ \frac{1}{2} \int_I (v'^2 + v^2) - \int_I fv + \alpha v(0) - \beta v(1) \right\};$$

Finalmente, razonando como en el ejemplo anterior vemos que $u \in H^2(I)$ (y por tanto es de clase $C^1(\bar{I})$) y que $u'(0) = \alpha$, $u'(1) = \beta$. Además, si $f \in C(\bar{I})$ entonces $u \in C^2(\bar{I})$.

■

4.4. Ecuaciones en derivadas parciales elípticas lineales

Vamos a definir, a continuación, un tipo de operador diferencial que da lugar a una clase de ecuaciones en derivadas parciales que tienen especial interés desde el punto de vista de la teoría débil para hallar su existencia y unicidad de solución usando el teorema de Lax-Milgram. Aunque el teorema surgiera en relación con una ecuación en derivadas parciales de tipo parabólico podemos ver que, actualmente, tiene gran utilidad en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

Definición 4.4.1. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *abierto,* $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, $a_i \in C(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$ *y* $a_0 \in C(\overline{\Omega})$.

El operador lineal de segundo orden de la forma

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)u + \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}u + a_0(x)u,$$

se denomina (uniformemente) elíptico sobre Ω *si* $\exists \theta > 0$ *tal que* $\forall \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ *se tiene*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta \mid \xi \mid^2, \qquad x \in \Omega \textit{ casi por doquier.}$$

Asumiremos, sin perder generalidad, la condición de simetría $a_{ij} = a_{ji}$, con $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

La elipticidad significa que para cada punto $x \in \Omega$ la matriz simétrica $n \times n$, (a_{ij}), es definida positiva.

El teorema de Lax-Milgram es usado principalmente para asegurar la existencia y unicidad de soluciones de EDPs elípticas, y en menor medida, de parabólicas. Ya que la condición de elipticidad es análoga a la propiedad de coercividad en formas bilineales.

4.4.1. EDP elíptica lineal general de segundo orden.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado de clase C^1, es decir, la frontera de Ω es suave. Tenemos las funciones $a_{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq, j \leq n$ satisfaciendo la condición de elipticidad, esto es,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha \mid \xi \mid^2, \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \text{ con } \alpha > 0. \tag{4.14}$$

Tenemos también $a_i, a_0 \in C(\overline{\Omega})$, $i = 1, \ldots, n$. El problema es encontrar una función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ satisfaciendo la siguiente ecuación en derivadas parciales elíptica junto con condiciones de contorno (en este caso, nulas sobre la frontera):

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.15}$$

Una solución clásica de (4.15) es una función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfaciendo (4.15) en el sentido usual. Una solución débil de (4.15) es una función $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfaciendo:

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.16}$$

Etapa A.

Vemos que toda solución clásica es también una solución débil. Para ello, $u = 0$ en $\partial\Omega$ y multiplicando (4.15) por una función test $v \in D(\Omega)$ e integrando por partes obtenemos (4.16), teniendo en cuenta que v se anula en la frontera de Ω y $D(\Omega)$ es denso en $H_0^1(\Omega)$, por continuidad, obtenemos la etapa A.

Etapa B.

Vamos a utilizar el teorema de Lax-Milgram para poder afirmar la existencia y unicidad de soluciones de (4.16). Tomamos como espacio de Hilbert $H = H_0^1$ con la norma $\| u \|_{H_0^1} = \| \nabla u \|_{L^2}$, y la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv,$$

y el funcional lineal $F(v) = \int_\Omega fv$.

Demostramos que a, en efecto, es continua.

$$
\begin{aligned}
| a(u,v) | &= \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv \right| \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \| a_{ij} \|_{L^\infty} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| + \sum_{i=1}^n \| a_i \|_{L^\infty} \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| | v | \\
&+ \| a_0 \|_{L^\infty} \int_\Omega | u || v | \leq \sum_{i,j=1}^n \| a_{ij} \|_{L^\infty} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2 \right)^{1/2} \\
&+ \sum_{i=1}^n \| a_i \|_{L^\infty} \left(\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega | v |^2 \right)^{1/2} \\
&+ \| a_0 \|_{L^\infty} \left(\int_\Omega | u |^2 \right)^{1/2} \left(\int_\Omega | v |^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{i,j=1}^n \| a_{ij} \|_{L^\infty} \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} + \sum_{i=1}^n \| a_i \|_{L^\infty} \| \nabla u \|_{L^2} \| v \|_{L^2} \\
&+ \| a_0 \|_{L^\infty} \| u \|_{L^2} \| v \|_{L^2} \leq \sum_{i,j=1}^n \| a_{ij} \|_{L^\infty} \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} \\
&+ C_1 \sum_{i=1}^n \| a_i \|_{L^\infty} \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} + C_2 \| a_0 \|_{L^\infty} \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} \\
&\leq C \| \nabla u \|_{L^2} \| \nabla v \|_{L^2} = C \| u \|_{H_0^1} \| v \|_{H_0^1}, \qquad \forall u,v \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned}
$$

Donde hemos usado la desigualdad triangular junto a

$$a_{ij} \leq \| a_{ij} \|_{L^\infty}, \qquad \forall i,j = 1,\dots,n,$$

$$a_i \leq \| a_i \|_{L^\infty}, \qquad \forall i = 1,\dots,n,$$

$$a_0 \leq \| a_0 \|_{L^\infty} .$$

Gracias a estas desigualdades hemos podido acotar las integrales. Después hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwartz para poder separar las integrales y, por último, la desigualdad de Poincaré. Y con esto, tenemos que nuestra forma bilineal $a(u,v)$ es continua. Para poder aplicar el teorema de Lax Milgram tenemos que exigirle que también sea coerciva pero no en todos los casos va a ser cierto. Para ello, veamos el siguiente lema:

Lema 4.4.1. *Dada la forma bilineal, previamente definida, $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ entonces,*

$$\exists \alpha, \gamma \geq 0 : \qquad \alpha \parallel u \parallel^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u,u) + \gamma \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \tag{4.17}$$

Demostración. Gracias a la condición de elipticidad existe un $\theta > 0$ tal que

$$\theta \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u - \int_\Omega a_0 \mid u \mid^2 . \tag{4.18}$$

Usando la desigualdad de Young:

$$ab \leq \epsilon a^2 + \frac{1}{4\epsilon} b^2, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall \epsilon \in \mathbb{R}^+.$$

y que $a_0 \leq \parallel a_0 \parallel_{L^\infty(\Omega)}$ obtenemos:

$$\begin{aligned} a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} u - \int_\Omega a_0 \mid u \mid^2 \leq a(u,u) \\ + \sum_{i=1}^n \parallel a_i \parallel_{L^\infty(\Omega)} \left(\epsilon \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 + \frac{1}{4\epsilon} \int_\Omega \mid u \mid^2 \right) + \parallel a_0 \parallel_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \mid u \mid^2 . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Tomamos ϵ tal que

$$\epsilon \sum_{i=1}^n \parallel a_i \parallel_{L^\infty(\Omega)} \leq \frac{\theta}{2},$$

Enlazando (4.18) y (4.19) tenemos que

$$\theta \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \leq a(u,u) + \frac{\theta}{2} \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 + \left(\frac{1}{4\epsilon} \sum_{i=1}^n \parallel a_i \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \parallel a_0 \parallel_{L^\infty(\Omega)} \right) \int_\Omega \mid u \mid^2 .$$

Entonces

$$\frac{\theta}{2} \int_\Omega \mid \nabla u \mid^2 \leq a(u,u) + \left(\frac{1}{4\epsilon} \sum_{i=1}^n \parallel a_i \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \parallel a_0 \parallel_{L^\infty(\Omega)} \right) \int_\Omega \mid u \mid^2 .$$

Tomando

$$\alpha = \frac{\theta}{2} \text{ y } \gamma = \frac{1}{4\epsilon}\sum_{i=1}^{n} \| a_i \|_{L^\infty(\Omega)} + \| a_0 \|_{L^\infty(\Omega)},$$

conseguimos la desigualdad inicial (4.17) .

■

De forma general, la forma bilineal a no satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram ya que falla la coercividad excepto cuando el γ del lema anterior es igual a 0. Vamos a ver un teorema en el que obtendremos la existencia y unicidad de solución bajo ciertas restricciones de los coeficientes.

Teorema 4.4.1. *Existe una constante $\gamma \geq 0$ tal que para cada $\mu \geq \gamma$ y cada $f \in L^2(\Omega)$ el problema*

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u + \mu u = f \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.20}$$

tiene una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$.

Demostración. Definimos para cada $\mu \geq \gamma$

$$a_\mu(u,v) = a(u,v) + \mu\int_\Omega uv, \quad \forall u,v \in H_0^1(\Omega),$$

donde $a(u,v)$ es la forma bilineal del lema 4.4.1. a_μ es bilineal ya que es combinación lineal de dos formas bilineales y también es continua por ser suma de dos formas bilineales continuas. Pero también a_μ es coerciva ya que usando el lema 4.4.1 tenemos

$$\alpha \| u \|^2_{H_0^1(\Omega)} \leq a(u,u) + \gamma \| u \|^2_{L^2(\Omega)} = a_\gamma(u,u) \leq a_\mu(u,u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Ahora sí estamos en las condiciones de poder aplicar el teorema de Lax-Milgram, por tanto el problema (4.20) tiene una única solución débil u en $H_0^1(\Omega)$.

$\blacksquare$

Etapa C.

Con el siguiente teorema obtendremos la regularidad de la solución.

Teorema 4.4.2. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado de clase C^1, $a_{ij}, a_i \in C^1(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, $a_0 \in C^0(\overline{\Omega})$ y $f \in L^2(\Omega)$. Si $u \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \qquad en \qquad \Omega,$$

entonces $u \in H^2_{loc}(\Omega)$ y

$$\| u \|_{H^2(\Omega')} \leq C(\| f \|_{L^2(\Omega)} + \| u \|_{L^2(\Omega)}),$$

donde C depende de $\Omega, \Omega', a_{ij}, a_i$ y a_0.

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [7].

$\blacksquare$

Dependiendo de la regularidad de los datos del problema podemos ir esperando más regularidad de la solución, en particular, tenemos el siguiente teorema donde vemos que podemos obtener una solución diferenciable en sentido clásico.

Teorema 4.4.3. *Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto acotado de clase C^∞, $a_{ij}, a_i, a_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$ y $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Si $u \in H_0^1(\Omega)$ es una solución débil de*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0 u = f \ \text{ en } \Omega, \\ u = 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

entonces $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demostración. La demostración la podemos encontrar en [7].

■

Etapa D.

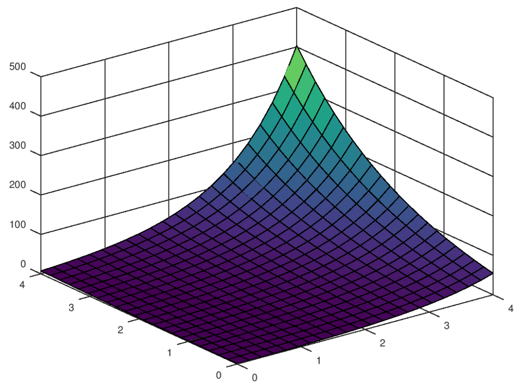
Sea $u \in H_0^1(\Omega)$ solución débil de 4.15, y suponiendo que $u \in C^2(\overline{\Omega})$, tenemos que $u = 0$ en $\partial\Omega$ e integrando por partes 4.16 tenemos que

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) v + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega a_0 uv = \int_\Omega fv, \quad \forall v \in D(\Omega),$$

que al ser una igualdad puntual, $u \in H_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ es una solución clásica de (4.15).

4.4.2. Problema de la membrana

Figura 4.1: Problema de la membrana



Sea Ω un subconjunto abierto del plano horizontal en $\mathbb{R}^3$, acotado y de clase C^1. Consideramos una membrana elástica sobre Ω, bajo la fuerza vertical de densidad $F = \tau f$ donde τ mide la tensión de la membrana y cuyo desplazamiento vertical es $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, el cual es igual a una función u_0 a lo largo de $\partial\Omega$. Por ejemplo, podemos considerar que $u_0 = 0$. El problema de la membrana consiste en buscar la posición de equilibrio de la membrana bajo dicha fuerza. Ya que no hay evolución en tiempo el desplazamiento vertical de la membrana puede ser descrito por $u = u(x)$. Es la solución del problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u = f \qquad \text{en} \quad \Omega, \\ u = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.21}$$

Con $f \in L^2(\Omega)$, por ejemplo. Se conoce a esta EDP como la ecuación de Poisson, un ejemplo típico de ecuación elíptica. Multiplicando por una función test v, integrando en Ω y usando la fórmula de integración por partes llegamos a la formulación débil del problema:

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla v >= \int_\Omega fv, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.22}$$

Donde el producto escalar de los gradientes es el producto escalar usual de $\mathbb{R}^2$

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla v >= \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

.

Nuestro objetivo es encontrar un $u \in H_0^1(\Omega)$ que verifique (4.22). Gracias al teorema de Lax-Milgram, con unos razonamientos similares a los problemas de contorno anteriormente expuestos, podemos asegurar la existencia y unicidad de solución de (4.22). Para luego poder garantizar la existencia y unicidad de solución clásica del problema. (Para una prueba detallada consultar [2] y [5]).

Podemos afirmar entonces, que el desplazamiento $u \in H_0^1(\Omega)$ es aquel que minimiza el funcional de energía de la membrana $J : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

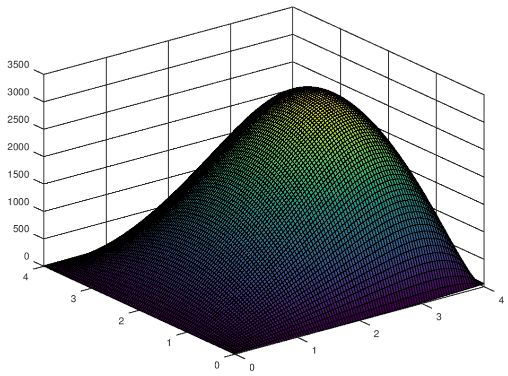
$$J(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega \mid \nabla v \mid^2 - \int_\Omega fv \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Vemos, así pues, la relación que existe entre la ecuación que modela una situación física en estado de equilibrio con la minimización de un cierto funcional.

4.5. Inecuaciones variacionales

4.5.1. Problema del obstáculo

Figura 4.2: Problema del obstáculo.



El problema del obstáculo es un ejemplo clásico el cual motiva el estudio de inecuaciones variacionales y problemas de frontera libre. El objetivo es encontrar la posición de equilibrio de una membrana elástica que está fijada, y la cual está obligada a permanecer por encima de un obstáculo dado. [2]

Sea Ω un subconjunto abierto del plano horizontal en $\mathbb{R}^3$, acotado de clas C^1. El óbstaculo será $\phi \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, siendo $\phi \leq 0$ en $\partial\Omega$. El desplazamiento vertical de u será el mínimo del funcional J, el mismo que en el problema de la membrana, pero no sobre $H_0^1(\Omega)$ sino sobre el conjunto $K := \{v \in H_0^1(\Omega) : v \geq \phi \text{ casi por doquier en } \Omega\}$.

Lema 4.5.1. *El subconjunto de $H_0^1(\Omega)$,*

$$K := \{v \in H_0^1(\Omega); v \geq \phi \textit{ casi por doquier en } \Omega\},$$

es no vacío, cerrado y convexo.

[2] Es un problema parecido al de la membrana, pero en este caso, tenemos un obstáculo que impone a la membrana a permanecer por encima de él.

Demostración. La función $\max\{0,\phi\} \in K$, para una prueba de este resultado que no es trivial consultar [4]. Comprobemos que K es cerrado. Sea $\{v_n\}$ una sucesión de elementos de K. Supongamos que $\{v_n\} \to v$ en $H_0^1(\Omega)$ pero $v \notin K$. Esto es, supongamos que $v < \phi$ en un conjunto de medida positiva. Existe un $\epsilon > 0$ y un conjunto de medida positiva $A \subset \Omega$ tal que $v + \epsilon \leq \phi$. Pero entonces

$$\int_\Omega | v_n - v |^2 \geq \int_A | v_n - v |^2 \geq \int_A | \phi - v |^2 \geq \epsilon^2 m(A), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde $m(A)$ es la medida de Lebesgue de A. Esto implica que $\{v_n\}$ no converge a v en sentido $L^2(\Omega)$ pero, esto es, una condición necesaria para que converja en $H_0^1(\Omega)$ ya que

$$\int_\Omega | v - v_n |^2 + | \nabla v - \nabla v_n |^2 \geq \int_\Omega | v - v_n |^2, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

Obtenemos una contradicción, por ende, $v \in K$. Así, K es cerrado. Ahora consideremos $0 \leq \lambda \leq 1$ y supongamos $v, w \in K$. Entonces $\lambda v + (1-\lambda) w \in H_0^1(\Omega)$ ya que $H_0^1(\Omega)$ es un espacio vectorial. Además,

$$\lambda v + (1-\lambda) w \geq \lambda \phi + (1-\lambda)\phi = \phi,$$

ya que λ y $(1-\lambda)$ son no negativos. Por tanto, $\lambda v + (1-\lambda) w \in K$ y K es convexo.

■

Consideramos la siguiente inecuación variacional:

Problema 4.5.1. *Dado $f \in L^2(\Omega)$ encontrar $u \in K$ tal que*

$$\int_\Omega < \nabla u, \nabla (v-u) > \geq \int_\Omega f(v-u), \quad \forall v \in K.$$

Teorema 4.5.1. *Existe una única solución del problema 4.5.1. Dicha solución está* *caracterizada por ser el único mínimo del funcional:*

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \mid \nabla v \mid^2 - \int_{\Omega} fv \quad \forall v \in K. \tag{4.23}$$

Demostración. Consideremos el espacio de Hilbert $H = H_0^1(\Omega)$ con el producto escalar $< u, v >= \int_{\Omega} < \nabla u, \nabla v >$. Como K es no vacío, cerrado y convexo, estamos en condiciones de aplicar el teorema de Stampacchia si conseguimos demostrar que la forma bilineal

$$a(u, v) = \int_{\Omega} < \nabla u, \nabla v >, \quad \forall u, v \in H_0^1,$$

es continua y coerciva, pero es el producto escalar del espacio, así que es continua y coerciva con ambas constantes igual a 1. Lo único que nos queda por comprobar es que el funcional lineal $F(v) = \int_{\Omega} fv,\ \forall v \in H_0^1$ y con $u \in K$ es continuo. Esto es inmediato usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz seguida de la desigualdad de Poincaré:

$$\int_{\Omega} fv \leq \parallel f \parallel_{L^2(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C \parallel \nabla v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C \parallel v \parallel_{H_0^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Por el teorema de Stampacchia, existe un único $u \in K$ que satisface la inecuación variacional y, como la forma bilineal es simétrica, está caracterizado por ser el único mínimo en K del funcional (4.23).

■

Hemos probado que existe una única solución al problema del obstáculo, lo cual no contradice nuestra intuición física.

Proposición 4.5.1. *Una solución $u \in H^2(\Omega)$ del problema del obstáculo (4.5.1) cumple el siguiente problema de contorno:*

$$-\Delta u = f \qquad en\ \Omega^+ = \{x \in \Omega : u(x) > \phi(x)\},$$

$$-\Delta u \geq f \qquad en\ \Omega^0 = \{x \in \Omega : u(x) = \phi(x)\},$$

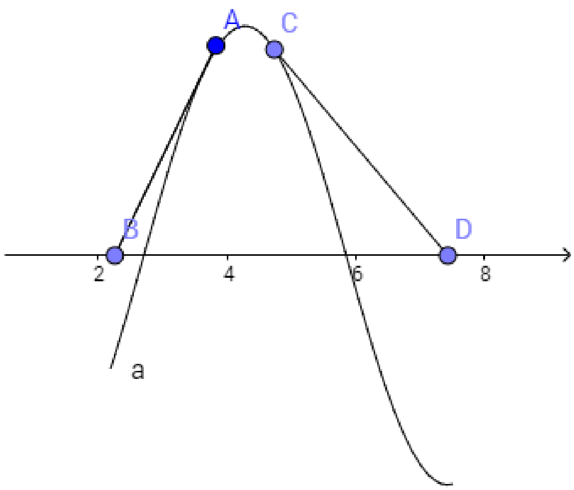
$$u \geq \phi \ en\ \overline{\Omega},$$

$$u = 0 \ en\ \partial\Omega.$$

Demostración. Se puede consultar en [4]

■

En el problema de la membrana podemos obtener una solución todo lo regular que queramos, sin embargo, en el problema del obstáculo la solución, en general, no tiene porque ser regular, aunque los datos dados sean muy regulares. Podemos observar un ejemplo en [4] que a pesar de ser $f = 0$ y ϕ todo lo diferenciable que queramos, nuestra solución u no será $C^2(\Omega)$. Este ejemplo del problema del obstáculo en dimensión 1, lo ilustramos con la siguiente imagen.



La solución es una recta en la región donde no toca el obstáculo, sea cual sea la regularidad de ϕ, la segunda derivada de u presentará discontinuidades en A y C. Por consiguiente, la solución u estará en el espacio $H^2(\Omega)$.

Esta aplicación, es un ejemplo, de como la formulación débil tiene sentido en problemas físicos y como no podemos esperar siempre soluciones clásicas de problemas procedentes de la física, lo cuales, nuestra intuición nos dice que tienen solución.

Apéndice A

Conceptos previos

Comenzaremos repasando los conceptos previos de análisis funcional, la gran mayoría de los cuales los hemos estudiado en el grado, que nos harán falta para enunciar y demostrar el Teorema de Lax-Milgram. Para esta introducción de análisis funcional nos apoyaremos en [2], [3] y [9].

A.1. Espacios métricos

Definición A.1.1 (Espacio métrico)**.** *Una métrica en un conjunto X es una aplicación $d(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:*

I) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$

II) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y, \qquad \forall x, y \in X.$

III) $d(x, y) = d(y, x) \qquad \forall x, y \in X.$

IV) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \qquad \forall x, y, z \in X$

Si disponemos de una métrica d definida en conjunto X entonces decimos que X es un espacio métrico.

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de X converge a $x \in X$ en un espacio métrico si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : d(x, x_n) < \epsilon$, $\forall n \geq n_0(\epsilon)$. Si tenemos que $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N} : p, q \geq n_0 \Rightarrow d(x_p, x_q) < \epsilon$, se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Definición A.1.2 (Espacio métrico completo)**.** *Un espacio métrico X es completo si toda sucesión de Cauchy en X es convergente a algún elemento de X.*

A.2. Espacios normados

Definición A.2.1 (Espacio Normado)**.** *Una norma en un espacio vectorial real X es una aplicación $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ verificando:*

I) $\| x \| \geq 0 \quad \forall x \in X$, $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

II) $\| \lambda x \| = | \lambda | \, \| x \| \; \forall x \in X, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

III) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|, \quad \forall x, y \in X$.

Se dice que X es un espacio normado si se puede definir una norma (que fijamos) $\| \cdot \|$ en dicho espacio.

Definición A.2.2 (Espacio de Banach)**.** *Un espacio de Banach es un espacio vectorial normado completo. Es decir, X es un espacio métrico completo respecto de la métrica $d(x, y) = \| x - y \|$.*

Sean X e Y espacios vectoriales, una aplicación L es lineal si $L : X \to Y$ cumple $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y), \quad \forall x, y \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Definición A.2.3. *Sean X, Y espacios normados, y $f : D(f) \subseteq X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces llamamos dominio de la aplicación al subespacio vectorial de X donde está definida, denotado como $D(f)$, rango o imagen de la aplicación al conjunto $R(f) = \{y \in Y : y = f(x), x \in D(f)\}$. Mientras que el núcleo de la aplicación es $N(f) = \{x \in D(f) : f(x) = 0\}$.*

Se dice que es una forma lineal o funcional lineal si $Y = \mathbb{R}$. Llamaremos operador lineal a la aplicación lineal que se aplica sobre el mismo espacio, es decir, $L : X \to X$.

Vamos a ver caracterizaciones de las aplicaciones lineales continuas entre espacios normados. A las aplicaciones lineales continuas también las llamaremos acotadas debido a la siguiente caracterización, la cual dice que una aplicación lineal es continua si y sólo si es acotada en subconjuntos acotados, a su vez esto es equivalente a que sea acotada en la bola cerrada unidad.

Definición A.2.4. *Decimos que una aplicación lineal $L : X \to Y$ entre espacios normados es acotada si existe una constante real positiva C tal que*

$$\| L(x) \| \leq C \| x \|, \quad \forall x \in X.$$

Teorema A.2.1. *Sea X, Y espacios normados y $L : X \to Y$ una aplicación lineal. Entonces L es continua si y sólamente si es acotada.*

Demostración. Si L es acotada, probaremos que L es continua en cualquier $x \in X$. En efecto, si $\{x_n\} \to x$ entonces

$$\{\| L(x_n) - L(x) \|\} = \{\| L(x_n - x) \|\} \leq C\{\| x_n - x \|\} \to 0 \Rightarrow \{L(x_n)\} \to L(x),$$

esto implica que L es continua en $x, \quad \forall x \in X$

Recíprocamente, supongamos que L es continua. Sea $B_r(Y) = \{v \in Y / \| v \| < r\}$ es abierto, luego $A = \{x \in X / f(x) \in B_1(Y)\} = L^{-1}(B_1(Y))$ es abierto por ser L continua.

$0 \in A \Rightarrow \exists C > 0 / B_C(X) \subseteq A$, quiere decir que, $L(u) \in B_1(Y) \quad \forall u \in B_C(X)$, es decir, $\| L(u) \| \leq 1 \quad \forall u \in B_C(X)$.

Para cualquier $w \in X, w \neq 0$,

$$\| L(w) \| = \left\| L\left(\frac{C}{2 \| w \|} w \frac{2 \| w \|}{C}\right)\right\| = \left\| L\left(\frac{Cw}{2 \| w \|}\frac{2 \| w \|}{C}\right)\right\|$$
$$= \left\| L\left(\frac{Cw}{2 \| w \|}\right)\right\| \frac{2 \| w \|}{C} \leq \frac{2}{C} \| w \| .$$

Entonces L es acotada como queríamos probar.

■

Definición A.2.5. *Definimos la norma de una aplicación lineal continua $L : X \to Y$ como*

$$\| L \| = sup\left\{\frac{\| L(x) \|}{\| x \|} : x \neq 0\right\} = sup\{\| Lx \| : \| x \| \leq 1\} = sup\{\| Lx \| : \| x \| = 1\}$$

Definición A.2.6. *Sea X un espacio normado, llamamos dual algebraico de X a $X^{\#} = \{f : X \to \mathbb{R}$ tal que f es lineal$\}$, también podemos definir el dual topológico de X como $X^* = \{f : X \to \mathbb{R}$ tal que f es lineal y continuo$\}$ que es el espacio de funcionales lineales y continuos. Análogamente, se define el espacio bidual X^{**} como el espacio de funcionales lineales y continuos en X^*.*

Se define la inmersión canónica $J : X \to X^{**}$ como $(J(x))[f] := f(x), \quad \forall x \in X, \quad \forall f \in X^*$. Esta aplicación es una isometría lineal de X en $J(X)$ consecuencia del Teorema de Hahn-Banach ([2]): teniendo en cuenta que

$$\| x \| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| \leq 1}} | f(x) | \quad \forall x \in X,$$

(esta igualdad se puede consultar en [2], p.4), tenemos que

$$\| J(x) \| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| \leq 1}} | Jx(f) | = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \| f \| \leq 1}} | f(x) | = \| x \|,$$

y de aquí deducimos que tiene que ser inyectiva ya que conserva las normas

$$0 = \| J(x_1) - J(x_2) \| = \| x_1 - x_2 \| \Rightarrow x_1 = x_2,$$

por tanto será un isomorfismo lineal isométrico de X en $J(X)$ cuando sea sobreyectiva. Se dice que un espacio normado X es *reflexivo* si la inmersión canónica en su bidual es un isomorfismo isométrico biyectivo. En este caso, podremos identificar X con X^{**}. El único requisito para que X sea reflexivo entonces es que $J(X) = X^{**}$.

Definición A.2.7. *Sea X un espacio normado sobre $\mathbb{R}$, $a : X \times X \to \mathbb{R}$, decimos que a es una* forma bilineal *si cumple:*

1. $a(\alpha x + y, z) = \alpha a(x, z) + \beta a(y, z), \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

2. $a(x, \alpha y + \beta z) = \alpha a(x, y) + \beta a(x, z), \quad \forall x, y, z \in X. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Definición A.2.8 (Forma bilineal coerciva)**.** *Sea X una espacio normado sobre $\mathbb{R}$ y $a(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineal. Se dice que a es* coerciva *o X-elíptica*[1] *si existe una constante real positiva α tal que:*

$$a(x, x) \geq \alpha \| x \|^2, \quad \forall x \in X.$$

Una forma bilineal a se dice positiva si $a(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in X$, (véase que está condición es más débil que ser coerciva).

Teorema A.2.2 (Forma bilineal continua)**.** *Sean X, Y, Z espacios normados y $a(\cdot, \cdot) : X \times Y \to Z$ una aplicación bilineal. Entonces a es continua si y sólamente si a es acotada, es decir, existe una constante real positiva C tal que:*

$$\|a(x, y)\| \leq C \| x \| \| y \|, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in X.$$

[1] Se le llama así porque está relacionada con los operadores en derivadas parciales uniformemente elípticos y los problemas de contorno elípticos de segundo orden (pero no son equivalentes).

Demostración. Para esta prueba trabajaremos en el espacio producto $X \times Y$, que es un espacio normado con la norma $\| (x, y) \| = \text{máx}\{\| x \|, \| y \|\}$. Supongamos que a es continua, en particular, es continua en 0. Por lo tanto existe una bola de radio $\epsilon > 0$ en $X \times Y$ centrada en 0 tal que $\| a(w) \| \leq 1$, $\forall w \in B_\epsilon(X \times Y)$. Ya que $a(\lambda w) = \lambda^2 a(w)$ con λ un escalar y w en el espacio producto, tenemos que $\| a(w) \|$ está acotada en cada subconjunto acotado de $X \times Y$. En particular, a estará acotada en $B_1(X \times Y)$ y definimos la norma de nuestra a como

$$\| a \| = sup\{\| a(w) \| : w \in B_1(X \times Y)\}$$

Sea $w = (x, y)$ tal que x, y son ambos no nulos, por lo tanto $\bar{w} = (\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})$ pertenece a $B_1(X \times Y)$ así que

$$\left\| a\left(\frac{x}{\| x \|}, \frac{y}{\| y \|}\right) \right\| \leq \| a \|, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

de dónde se obtiene que

$$\| a(x, y) \| \leq \| a \| \| x \| \| y \|, \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

que es lo que estabamos buscando. Es más, vemos que una constante C que cumple eso es la norma de la aplicación a, se puede comprobar que es la mejor constante que lo cumple.

Recíprocamente, suponemos que a está acotada. Fijado (x, y) en $X \times Y$ veamos que a es continua en ese punto. Entonces tomando $\{(x_n, y_n)\} \to (x, y)$ una sucesión convergente en $X \times Y$, es decir, $\{x_n\} \to x$ y $\{y_n\} \to y$ sucesiones convergentes en X y en Y.

$$\| a(x_n, y_n) - a(x, y) \| = \| a(x_n - x + x, y_n) - a(x, y) \| =$$
$$\| a(x_n - x, y_n) + a(x, y_n) - a(x, y) \| = \| a(x_n - x, y_n) - a(x, y - y_n) \|$$
$$\leq \| a(x_n - x, y_n) \| + \| a(x, y - y_n) \| \leq C \| x - x_n \| \| y \|$$
$$+ C \| x \| \| y - y_n \|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tenemos que, $\{a(x_n, y_n)\} \stackrel{n\to\infty}{\to} a(x, y)$ y como (x, y) era arbitrario obtenemos esto para cada $(x, y) \in X \times Y$.

■

Cómo caso particular, vemos que las formas bilineales sobre $\mathbb{R}$ son continuas si y sólamente si son acotadas, lo cual nos servirá para entender una de las hipótesis requerida para el teorema de Lax-Milgram.

A.3. Espacios de Hilbert

Estamos llegando al concepto de espacio de Hilbert. A continuación presentaremos qué es un producto escalar, el cual dotará de estructura de espacio prehilbertiano a nuestro espacio vectorial.

Sea X un espacio vectorial real, un producto escalar es una aplicación $< \cdot, \cdot >$: $X \times X \to \mathbb{R}$ que cumple:

1. $< \alpha x + \beta y, z > = \alpha < x, z > + \beta < y, z >, \quad \forall x, y, z \in X, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

2. $< x, y > = < y, x >, \quad \forall x, y \in X.$

3. $< x, x > \geq 0$ y $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0, \quad \forall x \in X.$

Un espacio prehilbertiano es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial que tiene definido un producto escalar en él.

Si X es un espacio prehilbertiano se da lo que se conoce como la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|< x, y >| \leq < x, x >^{1/2} < y, y >^{1/2}, \quad \forall x, y \in X.$$

En todo espacio prehilbertiano se puede definir una norma, gracias a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, a partir del producto escalar, $\| x \| = < x, x >^{1/2}, \quad \forall x \in X$.

Definición A.3.1. *Se dice que dos elementos x, y de un espacio prehilbertiano X son ortogonales si $< x, y > = 0$. Asimismo, sea M un subconjunto de H, se define el ortogonal de M, como $M^{\perp} = \{x \in X :< x, m >= 0 \quad \forall m \in M\}$.*

Definición A.3.2 (Espacio de Hilbert)**.** *Sea H un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con un producto escalar, se dice que X es un espacio de Hilbert si X es completo con la norma inducida de dicho producto escalar, es decir, con la norma $\| x \| = < x, x >^{1/2}$, $\forall x \in H$.*

En los espacios prehilbertianos se cumple lo que se conoce como la *identidad del paralelogramo* (se puede consultar la demostración en [1]) :

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 \| + \| y \|^2), \qquad \forall x, y \in H.$$

Esta identidad caracteriza a los espacios prehilbertianos, es decir, si en un espacio normado se cumple esta identidad podemos encontrar un producto escalar tal que la norma inducida por él es la norma dada.

Vamos a expresar uno de los resultados más importantes en espacios de Hilbert, el Teorema de la Proyección, el cuál tiene distintas versiones, a continuación, enunciaremos y demostraremos la versión que concretamente nos hace falta para demostrar el teorema de representación de Riesz-Fréchet y posteriormente el teorema de Lax-Milgram.

Teorema A.3.1 (de la proyección)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y M un subespacio cerrado de H entonces $H = M \oplus M^{\perp}$, (suma directa y topológica).*

Demostración. Si $x \in M$ y $x \in M^{\perp}$ simultáneamente, entonces tenemos que $< x, x >= 0 \Rightarrow x = 0$. Así que, $M \cap M^{\perp} = 0$. Sólo nos queda ver que $M + M^{\perp} = H$. Sea $x \in H$ arbitrario. Veremos que el conjunto $x - M = \{y \in H : y = x - m, m \in M\}$ tiene un elemento de norma mínima.

Sea $\delta = inf\{\| u \| : u \in x - M\}$, escogemos $\{u_n\} \in x - M \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\| u \| \rightarrow \delta$. Como $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in x - M \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\| u_n + u_m \| \geq 4\delta^2$. Si combinamos esto con la ley del paralelogramo obtenemos

$$2 \| u_n \|^2 + 2 \| u_m \|^2 - \| u_n - u_m \|^2 = \| u_n + u_m \|^2 \geq 4\delta^2, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Como $2 \| u_n \|^2 + 2 \| u_m \|^2 \rightarrow 4\delta^2$ cuando $n, m \rightarrow \infty$ tenemos que $\| u_n - u_m \|^2 \rightarrow 0$ cuando $n, m \rightarrow \infty$, lo cual nos muestra que la sucesión $\{u_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y al ser H completo y M un subespacio cerrado de H, $\{u_n\}$ converge a algún $u \in x - M$ tal que $\| u \| = \delta$. Por lo tanto, existe $x_1 \in M$ minimizando $\| x - m \|$, $m \in M$.

Sea $x_2 = x - x_1$, entonces $\| x_2 \| \leq \| x_2 + y \|$ para todo $y \in M$. Lo cual es equivalente a

$$\| x_2 \| \leq \| x_2 - \lambda y \|, \quad \forall y \in M.$$

donde $\lambda = \frac{< x_2, y >}{\| y \|^2}$. Elevamos al cuadrado y desarrollamos

$$\begin{aligned} \| x_2 \|^2 \leq \| x_2 - \lambda y \| &= \| x_2 \|^2 + 2\lambda < x_2, y > + \lambda^2 \| y \|^2 \\ &= \| x_2 \|^2 - 2\frac{< x_2, y >^2}{\| y \|^2} + < x_2, y >^2 \frac{\| y \|^2}{\| y \|^4} = \| x_2 \|^2 - \frac{< x_2, y >^2}{\| y \|^2}. \end{aligned}$$

Es claro que $< x_2, y >$ tiene que ser 0, por lo que $x_2 \in M^{\perp}$. Hemos conseguido que, $x = x_1 + x_2$ con $x_1 \in M$ y $x_2 \in M^{\perp}$ $\forall x \in H$, lo cual implica que $H = M + M^{\perp}$.

■

Teorema A.3.2 (de Riesz-Fréchet)**.** *Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$(dual topológico de H). Entonces existe un único $v \in H$ tal que $f(x) =< x, v >$, $\forall x \in H$. Además, $\| f \|=\| v \|$.*

Demostración. Si $f \equiv 0$, trivialmente tenemos que v=0.

Si $f \neq 0$, $\exists u \in H/f(u) \neq 0$. Como $f \in H^* \Rightarrow N(f)$ es un subespacio vectorial cerrado de H (es cerrado ya que $N(f) = \{f^{-1}(0)\}$ y $f \in H^*$). Por el teorema de la proyección ortogonal: $H = N(f) \bigoplus N(f)^\perp$

Debe existir $z \in N(f)^\perp / f(z) \neq 0$, esto nos da que $f(\frac{z}{f(z)}) = 1$ con $\frac{z}{f(z)} \in N(f)^\perp$, por lo tanto existe $w \in N(f)^\perp$ tal que $f(w) = 1$ (en efecto, $w = \frac{z}{f(z)}$).

Entonces, para todo $x \in H$, $\quad x - f(x)w \in N(f)$ ya que $f(x - f(x)w) = f(x) - f(x) = 0$. Obtenemos así la siguiente igualdad:

$$< \overbrace{x - f(x)w}^{\in N(f)}, \overbrace{w}^{\in N(f)^\perp} >= 0, \quad \forall x \in H.$$

y despejando $f(x)$ obtenemos la expresión buscada,

$$< x - f(x)w, w >=< x, w > -f(x) < w, w >= 0$$
$$\Rightarrow f(x) =< x, \frac{w}{< w, w >} >, \quad \forall x \in H.$$

Por consiguiente, $v = \frac{w}{<w,w>}$.

Además v es única, porque si $< x, v_1 >=< x, v_2 > \forall x \in H$, tenemos que $< x, v_1 - v_2 >= 0 \ \forall x \in H$ lo cual implica que tomando $x = v_1 - v_2$, tenemos $< v_1 - v_2, v_1 - v_2 >= 0$, por lo tanto, $v_1 = v_2$.

La norma del funcional lineal es la misma que la de v:

$$| f(x) |=|< x, v >| \overset{C-S}{\leq} \| x \| \| v \| \quad \forall x \in H \Rightarrow \| f \| \leq | \| v \| .$$

Combinando la anterior desigualdad con la siguiente igualdad, vemos que la norma se alcanza:
$f\left(\frac{v}{\parallel v \parallel}\right) =< \frac{v}{\parallel v \parallel}, v >=\parallel v \parallel \Rightarrow \parallel f \parallel = \parallel v \parallel$, ya que $\left\| \frac{v}{\parallel v \parallel} \right\| = 1$ y
$\parallel f \parallel = sup\{\parallel f(x) \parallel : \parallel x \parallel \leq 1\}$.

$\blacksquare$

Gracias a este teorema podemos identificar un espacio de Hilbert con su dual y éste con su bidual, lo cual nos conduce a que los espacios de Hilbert son reflexivos (para más información [2], pp.136-137).

Bibliografía

[1] Álvarez, David: *El Teorema de Lax-Milgram, Generalizaciones y Aplicaciones.* BSc Thesis. Instituto Tecnológico Autónomo de México, 2011.

[2] Brezis, H.: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer, Nueva York, 2011.

[3] Choquet, G.: *Topology.* Academic Press, Nueva York, 1966.

[4] Ciarlet, P.G.: *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2013.

[5] Collantes, J.L. y Coronel, A.: *Formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales.* En *Revista Integración*, Vol. 28, no. 2, páginas 133–152. Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia, 2010.

[6] Duvaut, G. y Lions, J. L.: *Inequalities in Mechanics and Physics.* Springer, Nueva York, 1976.

[7] Evans, L. C.: *Partial differential equations.* Americal Mathematical Society, second ed., 1998.

[8] Lax, P. D. y Milgram, A. N.: *Parabolic equations.* En *Contributions to the theory of partial differential equations*, Annals of Mathematics Studies, no. 33, páginas 167–190. Princeton University Press, Princeton, 1954.

[9] Lax, P.: *Functional Analysis.* Wiley-Interscience, Nueva York, 2003.

[10] Salsa, S.: *Partial differential equations in action*, volumen 86 de *Unitext*. Springer, 2015.

[11] Stampacchia, G. y Kinderlehrer, D.: *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*. Academic Press, Nueva York, 1980.

[12] Stampacchia, G.: *Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes*. En *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, vol. 258, página 4413–4416. Académie des Sciences de Paris, Paris, 1964.

[13] Tartar, L.: *An introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*. Springer, Nueva York, 2007.