FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

TRABAJO FIN DE GRADO:

CONJUNTOS DE UNICIDAD PARA SERIES TRIGONOMÉTRICAS

Trabajo presentado por Manuel Ruiz Cárdenas
Grado en Matemáticas por la Universidad de Granada

Supervisado por:
Antonio Cañada Villar

Índice

toc

Introducción y resumen

Introducción

El presente trabajo de fin de grado titulado ”Conjuntos de Unicidad para Series Trigonométricas” pertenece a la categoría Complementario de profundización y consta de los siguientes capítulos:

- Algunos resultados previos sobre la convergencia puntual de las Series de Fourier.
- Unicidad para series Trigonométricas.
- El problema en dimensiones superiores. Series trigonométricas y conjuntos de unicidad múltiples.

Este compendio pretende hacer una introducción al problema de los conjuntos de unicidad para las series trigonométricas así como dar ciertas nociones de los avances desarrollado hasta el día de hoy en esta cuestión. Los objetivos a alcanzar son los siguientes:

- Resumir los resultados principales e ideas mostradas en la asignatura *Análisis de Fourier* del Grado en Matemáticas, sobre convergencia puntual de series de Fourier.
- Noción de *conjunto de unicidad para series trigonométricas*. Demostración del resultado de Cantor.
- Generalizaciones y extensiones del Teorema de Cantor. Descripción de diversos conjuntos de unicidad.
- El problema en dimensiones superiores.

Estos objetivos han sido alcanzados. Las dificultades que se han presentado a lo largo del desarrollo del trabajo han sido por un lado la dificultad teórica de las demostraciones, la poca bibliografía disponible sobre el tema abordado, en menor medida el manejo del lenguaje LaTeX y además de las dudas que han sido aclaradas por mi tutor Antonio Cañada.

Resumen

Las series trigonométricas son una parte del análisis que probablemente se conoce cuando se estudia Análisis de Fourier. En este contexto las series trigonométricas son la forma de darle sentido a la extensión a los espacios L^2 del concepto de base en espacios vectoriales de dimensión finita. La convergencia en norma de L^2 sustituye en este caso a la igualdad en el caso de dimensión finita.

Históricamente hablando las series trigonométricas y los problemas relacionados con ellas surgen en la época de Fourier cuando muchos matemáticos intentaban solucionar problemas como el de la cuerda vibrante y el problema de la difusión del calor. Una vez se supo de la existencia de soluciones de estas ecuaciones relacionadas con las funciones trigonométricas básicas se usó la linealidad para poder acoplar o combinar dichas soluciones básicas y poder adaptarlas a cualquier condición inicial. Es en este momento es cuando surge el problema natural de ver qué hipótesis tiene que cumplir una función para que exista una combinación infinita que converja puntualmente a la misma.

Numerosos matemáticos como Fourier, Cantor, Daniel Bernouilli, Dirichlet, Riemann y Gauss se dedicaron sin éxito a resolver por completo este problema. Las consecuencias de las investigaciones entorno a las series trigonométricas han tenido efectos colaterales sorprendentes en la historia de las matemáticas. Primeramente es obligatorio señalar que las series trigonométricas propiciaron la definición moderna de función atribuida a Dirichlet (véase [18]).

Las definición geométrica (que veía a las funciones como curvas) así como la definición analítica de Euler (que consideraba funciones a toda combinación basada en operaciones básicas con funciones *analíticas*) quedaron obsoletas al salir a la luz ejemplos de series trigonométricas que convergían a funciones con discontinuidades de salto. También otros ejemplos de funciones íntimamente ligados con las series trigonométricas ayudaron a clarificar la arquitectura de las funciones actual, como es el caso de la función de Weierstrass (función continua pero no derivable en ningún punto).

En segundo lugar es un hecho que la definición de Integral de Riemann, precursora directa de la integral de Lebesgue estuvo motivada por el problema de las series trigonométricas. Riemann tuvo que definir una integral que diera cabida a nuevas funciones y eso implicó hacer un concepto de integral completamente desligado de la teoría de la diferenciación y la continuidad.

Situados en este contexto nos centramos en las funciones reales de variable real f para las que existe una serie de funciones trigonométricas que converge a f puntualmente. Estas funciones son llamadas funciones representables. El problema de decidir si una función es representable o no (problema de la representabiliad) está todavía abierto y es de una importancia trascendental, pues está relacionado con el problema hacer posible la posibilidad de descomponer las funciones como combinación de otras no necesariamente trigonométricas como son las funciones de Bessel. De este modo el problema de representabilidad está ligado a las ecuaciones diferenciales y los problemas de contorno, así como a sus aplicaciones prácticas. Como ya se puede adivinar el problema de la unicidad consiste en averiguar si una función representable tiene una o más representaciones. Este problema también ha provocado la creación de teorías matemáticas útiles e interesantes. El problema de la unicidad llevó a Cantor a publicar dos resultados

Teorema 1 Sea una serie trigonométrica tal que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0 \ , \forall x \in E$$

siendo $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de medida positiva. Entonces $\{a_n\}, \{b_n\} \mapsto 0$

Teorema 2 Si tenemos una serie tal que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces

$$c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

Una vez Cantor demostró que la representación de una función haciendo uso de funciones trigonométricas era única en intervalos se dio cuenta de que podía omitir la coincidencia de las series en ciertos conjuntos sin que esto afectara a la conclusión de que las series deberían ser idénticas. Aquí nace pues la teoría de los conjuntos de unicidad, que se encarga de tratar de arrojar luz sobre este tipo de conjuntos.

Este problema motivó a Cantor a definir el conjunto derivado de otro como el menor conjunto perfecto contenido en el primero y otros conceptos topológicos. Un hecho revelador es que Cantor desarrolló la teoría de conjuntos pensando en solucionar este teorema, sabiendo esto el lector estará de acuerdo en que la dificultad que plantea el problema es alta y los elementos analíticos implicados son de carácter patológico. Como ya se ha dicho el problema de la unicidad, el de la representación y en general las cuestiones profundas de las series trigonométricas se encuentran cerca de los pilares del análisis. Se trata en definitiva de un problema clásico de las matemáticas que ha motivado la creación de herramientas totalmente básicas e indispensables para construir el resto de las matemáticas de forma satisfactoria. Se procede ahora a hacer un resumen de cada capítulo que conforma el trabajo:

Capítulo 1: Algunos resultados previos sobre convergencia puntual de Series de Fourier

Este capítulo comienza con una reseña histórica detallada de cómo surgieron las series de Fourier justificando la posterior definición formal de serie de Fourier para funciones reales de variable real integrables y definidas en un intervalo de longitud 2π. A continuación se dan dos ejemplos de cálculo de series de Fourier de funciones elementales escogidas con la intención de dar una primera muestra del comportamiento de las series de Fourier de una función f con respecto a la regularidad de f. A continuación se comenta uno de los primeros resultados de convergencia de series de Fourier con hipótesis de carácter global, el Teorema de Dirichlet. Se continúa con el célebre ejemplo de Du Bois-Remond de función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto seguido de otro ejemplo de una función familiar cuya serie de Fourier también diverge en un punto. Seguidamente se proporciona la herramienta más valiosa de este capítulo que es el Criterio de Dini sobre convergencia de las series de Fourier con su correspondiente demostración rigurosa acompañado de un práctico corolario. Se termina el capítulo uno con una serie de notas finales que versan sobre la dependencia local de la convergencia de la serie de Fourier de una función f (Principio de Riemann), varios resultados reveladores sobre convergencia y un último comentario extraído del análisis funcional de la categoría del conjunto de funciones con serie de Fourier convergente.

Capítulo 2: Unicidad para series trigonométricas

Esta parte empieza con la definición general de serie trigonométrica acompañado de definiciones para aclarar la notación de estas. A continuación se plantean formalmente los problemas de representación y unicidad de la misma de una función dada. A continuación se expone la teoría de Riemann para el tratamiento del problema de la unicidad de la representación en forma de un conjunto de teoremas y otros resultados debidamente demostrados. Se sigue incorporando resultados sobre sumabilidad y otros resultados analíticos como el Lema de Cantor-Lebesgue con la intención de demostrar el Teorema de Cantor para solucionar el problema de la unicidad en la recta real satisfactoriamente. Se sigue el capítulo dando diversas extensiones del Teorema de Cantor con la intención de motivar la definición de conjunto de unicidad acompañada de diversos comentarios aclaratorios. Sin dejar de prestar atención al problema de los conjuntos de unicidad el capitulo continúa dando definiciones y resultados oportunos sobre teoría de ordinales, conjuntos perfectos y conjuntos derivados preparando la demostración del segundo resultado importante del capítulo: el Teorema de Cantor-Lebesgue. Este resultado da el primer ejemplo no trivial y satisfactorio de conjunto de unicidad. Se termina el capítulo dos dando una serie de notas y teoremas que proporcionan ejemplos de los conjuntos de unicidad , así como unas últimas reseñas sobre las diversas características generales de estos.

Capítulo 3: Series trigonométricas y unicidad en dimensiones superiores.
El tercero y último capítulo del trabajo comienza preparando una definición de serie trigonométrica con suficiente riqueza conceptual como para adaptarse a las dimensiones no triviales pero a la vez guardando una analogía satisfactoria con el caso real. Después de unas definiciones y aclaraciones formales como son la extensión al caso n-dimensional del concepto de base trigonométrica se proporciona la definición de serie trigonométrica n-dimensional en el n-cubo. Esta última pérdida de generalidad

se hace con la intención de contextualizar mejor los conceptos. Se sigue la analogía dando la versión n-dimensional del concepto de serie de Fourier. Por completitud se dan a continuación varias nociones de convergencia de las series en dimensión n. Todo esto es necesario para poder definir con rigor el concepto de conjunto de unicidad n-dimensional, que se hace dependiente del concepto de convergencia escogido. Se avanza en el capítulo dando resultados que doten de sentido al concepto de conjunto de unicidad n-dimensional y que extiendan a los ya dados en el caso real. Finaliza el trabajo dando un teorema interesante que proporciona condiciones suficientes para la nulidad de una serie en el que se ven implicadas la convergencia esférica y el concepto de series sumables (C, k). Durante la confección del trabajo se han incluido en la medida de lo posible notas con anécdotas históricas o reseñas teóricas con el fin de hacer más amena la lectura y comprensión del mismo.

Por último me gustaría constatar que ha sido para mí una experiencia nueva y enriquecedora el estudiar libremente y de forma autónoma sobre un tema tan formal y clásico como este dado que fui yo quien propuse a mi tutor Antonio Cañada el elaborar mi trabajo de fin de grado apuntando a esta controvertida y trascendental rama del Análisis Matemático.

Introduction and summary

Introduction

The present work of end of degree titled "Uniqueness Sets for Trigonometric Series"belongs to the category of complement of deepening and consists of the following chapters:

- Some previous results on the point convergence of the Fourier Series.
- Uniqueness for trigonometric series.
- The problem in higher dimensions. Trigonometric series and multiple uniqueness sets.

This compendium intends to make an introduction to the problem of the sets of uniqueness for the trigonometric series as well as to give certain notions of the advances developed till today in this question. The objectives to achieve are the followings:

- To summarize the main results and ideas shown in the subject *Fourier Analysis* of the Degree in Mathematics, on point convergence of Fourier series.
- Notion of *set of uniqueness for trigonometric series*. Demonstration of the result of Cantor.
- Generalizations and extensions of Cantor's Theorem. Description of various sets of uniqueness.
- The problem in higher dimensions.

These objectives have been achieved. The difficulties encountered during the development of the work have been on the one hand the theoretical difficulty of the demonstrations, the little bibliography available on the subject addressed, to a lesser extent the language handling LaTeX and besides the doubts that have been clarified by my tutor Antonio Cañada.

Summary

The trigonometric series are a part of the analysis that is probably known when one study Fourier Analysis. In this context the trigonometric series are the way to give sense to the extension to the L^2 spaces of the concept of base in vector spaces of finite dimension. The convergence in norm of L^2 replaces in this case to the equality in the case of finite dimension.

Historically, speaking the trigonometric series and the problems related to them arose in the Fourier era when many mathematicians tried to solve problems such as the vibrating string and the problem of heat diffusion. Once it was known that the basic trigonometric functions were solutions of these equations linearity was used to be able to couple or combine these basic solutions and to adapt them to any initial condition. It is at this moment when the natural problem arises to what hypothesis a function has to fulfill so that there is an infinite combination that converges punctually to it. (see [18])

Numerous mathematicians such as Fourier, Cantor, Daniel Bernouilli, Dirichlet, Riemann and Gauss were unsuccessful in solving this problem completely. The consequences of the investigations surrounding the trigonometric series have had surprising side effects in the history of mathematics. First it is obligatory to point out that the trigonometric series favored the modern definition of function attributed to Dirichlet. The geometric definition (which saw functions as curves) as well as Euler's analytic definition (which considered functions to any combination based on basic operations with *analytic functions*) became obsolete when trigonometric series converged to functions with jumping discontinuities. Also other examples of functions closely linked to the trigonometric series helped to draw the current architecture of functions, as is the case of the Weierstrass function (continuous function but not derivable at any point).

Secondly, it is a fact that the definition of Riemann Integral, the direct precursor of the Lebesgue integral was motivated by the problem of trigonometric functions. Riemann had to define an integral that would accommodate new functions and that involved making a concept of integral completely detached from the theory of differentiation and continuity.

Located in this context we focus on the real functions of real variable f for which there is a series of trigonometric functions that converges to f punctually. These functions are called *representable functions*. The problem of deciding whether a function is representable or not (problem of representability) is still open and of transcendental importance because it is related to the problem to make possible the possibility of decomposing the functions as a combination of others not necessarily trigonometric as they are The functions of Bessel. In this way the problem of representability is linked to differential equations and boundary problems, as well as to their practical applications. As it can be guessed the problem of uniqueness is to find out if a representable function has one or more representations. This problem has also led to the creation of useful and interesting mathematical theories. The problem of uniqueness led Cantor to publish two results

Theorem 1 If a trigonometric serie such that

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0 \ , \forall x \in E$$

being $E \subseteq \mathbb{R}$ a set of positive measure. Then $\{a_n\}, \{b_n\} \mapsto 0$

Theorem 2 If we had a serie such that $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ then

$c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$

Once Cantor demonstrated that the representation of a function using trigonometric functions was unique in intervals he realized that he could omit the coincidence of the series in certain sets without this affecting the conclusion that the series should be identical. Here, therefore the theory which s responsible for trying to shed light on this type on this type of ensembled is born. This problem motivated Cantor to define the set derived from another as the less perfect set contained in the first and many other concepts. A revealing fact is that Cantor developed the theory of sets thinking of solving this theorem, knowing this the reader will agree that the difficulty of the problem is high and the analytical elements involved are pathological in character. As has already been said the problem of uniqueness, that of representation and in general the question in the trigonometric series are close to the pillars of analysis. It is a classic problem of mathematics that has motivated the creation of absolutely basic tools and indispensable to build the rest of mathematics in a satisfactory way. It is now necessary to make a summary of each chapter that forms the work:

Chapter 1: Some previous results on Fourier Series point convergence

This chapter begins with a detailed historical review of how the Fourier series arose historically, justifying the later formal definition of Fourier series for real functions defined in a interval of lenght 2π. Following are two examples of Fourier series calculation of elementary functions but chosen with the intention of giving a first sample of the behavior of the Fourier series of a function f with respect to the regularity of f. The following is one of the first results of Fourier series convergence with global hypotheses, Dirichlet's Theorem. We continue with the famous example of Du Bois-Remond whose continuous Fourier series diverges at a point followed by another example of an well-known function whose Fourier series also diverges at one point. The most valuable tool in this chapter is the Dini Criterion on Fourier Series convergence with its corresponding rigorous demonstration accompanied by a practical corollary. Chapter one ends with a series of final notes dealing with the local dependence of the convergence of the Fourier series of a f (Riemann Principle) function, several revealing results on convergence, and a last comment extracted from the functional analysis of the function set with convergent Fourier series.

Chapter 2: Uniqueness for trigonometric series

This part begins with the general definition of trigonometric series accompanied by definitions to clarify the notation of these. Then the problems of representation and uniqueness of a given function formally arise. The following is the Riemann theory for the treatment of the problem of the uniqueness of representation in the form of a set of theorems and other duly demonstrated results. It continues to incorporate results on summability and other analytical results such as the Cantor-Lebesgue Lemma with the intention of demonstrating Cantor's Theorem to solve the problem of uniqueness satisfactorily. It follows the chapter giving diverse extensions of the Theorem of Cantor with the intention to motivate the definition of the unicity set accompanied by diverse explanatory comments. Without neglecting the problem of uniqueness sets, the chapter continues to give definitions and timely results on the theory of ordinals, perfect sets, and ensembles by preparing the demonstration of the second important result of the chapter: the Cantor-Lebesgue Theorem. This result gives the first nontrivial and satisfactory example of uniqueness set. We conclude chapter two by giving a series of notes and theorems which provide examples of uniqueness sets, as well as a few later reviews on the various general traits of these.

Chapter 3: Trigonometric series and uniqueness

The third and final chapter of the work begins by preparing a definition of a trigonometric series with sufficient conceptual richness to adapt to non-trivial dimensions but at the same time keeping a satisfactory analogy with the real case. After some definitions and formal clarifications such as the extension to the n -dimensional case of the concept of trigonometric base, the definition of trigonometric series n -dimensional in the n -cubo is provided. This last loss of generality is done with the intention of contextualizing the concepts better. The analogy is followed by giving the n-dimensional version of the Fourier series concept. For completeness we give below several notions of convergence of the series in dimension n. All this is necessary to be able to define with rigor the concept of unity of n-dimensional unicity, which becomes dependent on the concept of convergence chosen. It advances in the chapter giving results that give meaning to the concept of uniqueness n-dimensional and extend to those already given in the real case. It ends the work by giving an interesting theorem that provides sufficient conditions for the nullity of a series in which spherical convergence and the concept of summative series (C, k) are involved. Have included, as far as possible, notes with historical anecdotes or theoretical reviews in order to make reading and understanding more enjoyable.

Finally I would like to highlight that it has been a new and enriching experience for me to study freely and autonomously on such a formal and classic subject as this given the one who was proposed by me to my tutor Antonio Cañada to elaborate my end-of-degree project pointing to this controversial and transcendental branch of Mathematical Analysis.

1. Algunos resultados previos sobre convergencia puntual de Series de Fourier

1.1. Origen del problema de la convergencia de las Series de Fourier

Los primeros que debatieron indirectamente sobre sobre la cuestión de la Serie de Fourier posiblemente fueron D'Alembert y Euler.
En la década de 1740 ambos estaban trabajando en el problema de la cuerda vibrante, modelizado ya con una ecuación diferencial (consúltese [8] y [10]). La disputa entre ellos fue qué tipo de condiciones iniciales (funciones) podía tener esa ecuación, lo que llevó a plantearse el concepto mismo de función.

Si bien Euler y D'alembert participaron en el planteamiento de este problema no fue sino Daniel Bernouilli en 1753 (véase [5]) quién dió otra idea fundamental al resolver el problema anterior en casos particulares utilizando superposiciones de funciones trigonométricas. Tuvo la intuición de plantearse que en el caso de poder expresar la condición inicial como superposición de sus soluciones (funciones trigonométricas) podría resolver el problema. No dudó en afirmar que cualquier función gozaría de esa propiedad eligiendo los coeficientes que multiplican a las funciones base convenientemente.

Bernouilli no estuvo exento de críticas por parte de la comunidad matemática al pronunciarse de esta forma. La controversía y falta de claridad rodearon este problema durante 54 años hasta que Jean Bapstiste-Joseph Fourier publicó su trabajo sobre la Teoría sobre la conducción del calor (véase [11]).

Partiendo de las ideas de Bernouilli Fourier buscó soluciones sencillas para la ecuación del calor e intuyó que si una condición inicial, pensada como una función, se puede expresar como superposición infinita de soluciones sencillas hallaríamos la solución del problema del calor para dicho dato inicial. Al igual que Bernouilli Fourier afirmó que para cualquier condición inicial se puede encontrar un desarrollo usando funciones elementales. Sin embargo Fourier se ganó un papel en esta historia al encontrar una expresión explícita de los valores de los coeficientes.

Fourier no fue riguroso a la hora de hallar dichas expresiones, lo que propició que las autoridades en la matemática de la época siguieran desconfiando de la corazonada de Fourier y Bernouilli.

1.2. Contexto y definiciones previas

Para probar los resultados de este capítulo fijaremos primero la notación básica y demostraremos las proposiciones auxiliares pertinentes. Empezaremos definiendo los coeficientes de Fourier para funciones de $L^1(]-\pi,\pi[)$ para cubrir con holgura la generalidad de los resultados que se demostrarán.

Definición 1.2.1 (Serie de Fourier de funciones integrables)

Sea $f \in L^1(]-\pi,\pi[)$. La serie de Fourier de f es la serie de funciones

$$\{S[f]_n :]-\pi,\pi[\mapsto \mathbb{R}\} : n \in \mathbb{N}\}$$

definida por

$$S[f]_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n}(a_j cos(jx) + b_j sen(jx)),\ \forall x \in]-\pi,\pi[\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

tal que

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

y además

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En numerosas ocasiones se hará referencia a la Serie de Fourier de la función f usando el símbolo $S[f] \equiv \{S[f]_n, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

▲

Para hacer más cercano el problema se darán a continuación dos ejemplos de funciones cuyas serie de Fourier presentan comportamientos diferentes.

Ejemplo 1 Consideramos en primer lugar la función $g :]-\pi,\pi[\mapsto \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 1,\ \forall x \in]-\pi,\pi[$. Calculando los coeficientes de Fourier obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)cos(nx)dx = 0\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)sen(nx)dx = 0\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S[g]_n(x) = 1 = g(x),\ \forall x \in]-\pi,\pi[\ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Vemos que $\{S[g]_n\}$, en este caso, converge puntual y trivialmente a la función g.

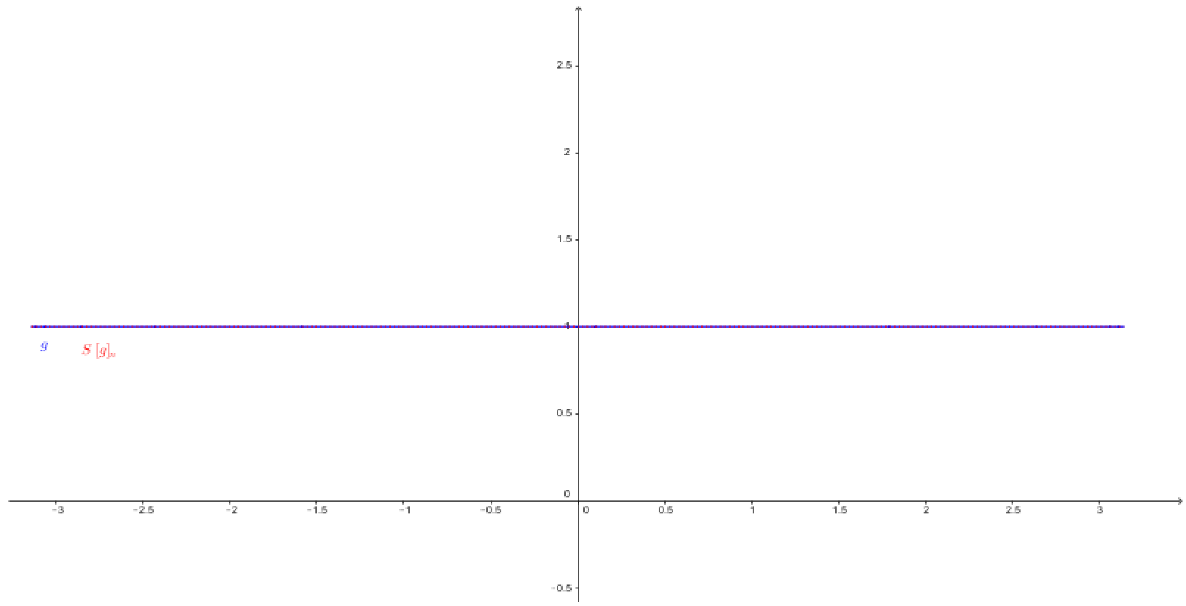

Imagen 1: Podemos apreciar que la función g y todas las sumas parciales de su serie de Fourier se identifican completamente.

♦

Ejemplo 2 Consideramos en ahora la función $h :]-\pi, \pi[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < x \leq 0 \\ 1 & \text{si } \pi > x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

Calculando los coeficientes de Fourier obtenemos:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)dx = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)cos(nx)dx = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)sen(nx)dx = \frac{2}{n\pi} \left(1 - (-1)^n\right) \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$S\left[h\right]_n(0) = 0 = \frac{h(0^-) + h(0^+)}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En este caso vemos que $\{S\left[h\right]_n(0)\}$ no converge a $h(0)$, se tiene por el contrario que $\{S\left[h\right]_n(0)\}$ presenta un comportamiento interpolador de los valores $\lim_{x\mapsto 0^+} h(x)$ y $\lim_{x\mapsto 0^-} h(x)$

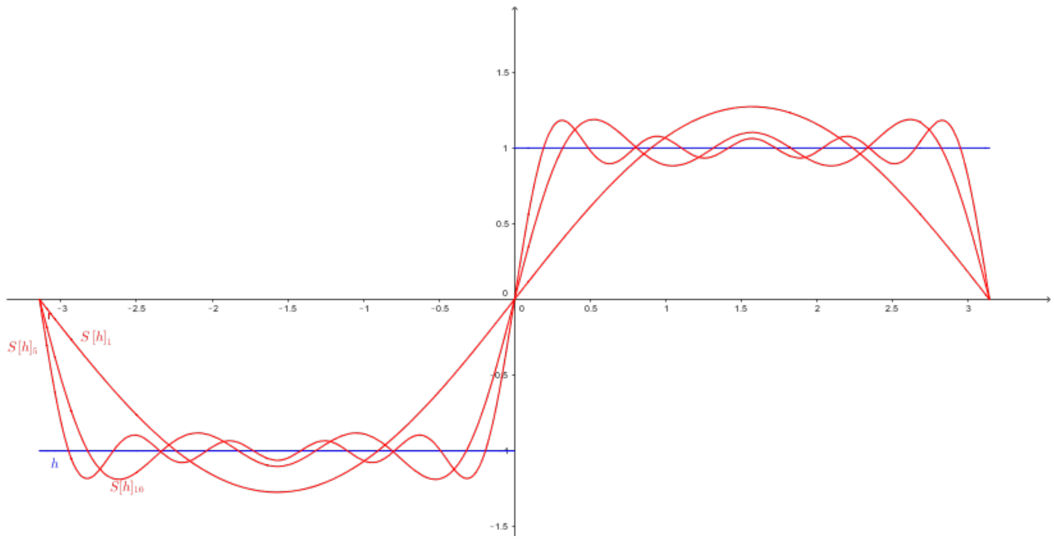

Imagen 2: Se ilustra el comportamiento de las primeras sumas parciales de la serie de Fourier de h.

♦

Es bastante inspirador ahora pensar en las diferencias entre g y h y cómo afecta eso a la convergencia de sus respectivas Series de Fourier. Sabemos que $\{S[g]_n(0)\}$ sí converge a $g(0)$ mientras que $\{S[h]_n(0)\}$ tiene otro comportamiento muy diferente. Precisamente advertimos que la principal diferencia esencial entre h y g se produce en el punto $x = 0$. Mientras que g es una función infinitamente derivable en 0 el cociente incremental de h centrado en 0 no goza de esa regularidad, llegando a no ser integrable.

Volviendo a la historia debemos reseñar que pasaron varios años desde la puclicación del trabajo de Fourier sobre el calor y no fue hasta 1829 cuando Dirichlet encontró condiciones de carácter global suficientes sobre una función para garantizar la convergencia puntual de su Serie de Fourier a dicha función (véase [9]).

Teorema de Dirichlet

Sea $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ una función monótona a trozos y acotada.
Entonces, $\lim_{n \mapsto \infty} S[f](x)_n = \frac{1}{2}\left(f(x^-) + f(x^+)\right), \forall x \in [-\pi, \pi]$.

A la vista de las hipótesis del Teorema de Dirichlet resulta tentador considerar que la Serie de Fourier de una función continua f es suficiente para la garantizar la convergencia puntual de la Serie de Fourier de f a dicha función en todos los números reales. De hecho en cierto momento se llegó a conjeturar durante algún tiempo que esta sería condición suficiente para asegurar la convergencia puntual de la serie de Fourier de f.

Esta conjetura era falsa y se dieron varios contraejemplos . Uno de los históricamente más célebres lo dió Du Bois-Reymond en 1873 (véase [16, pág 29]). Este matemático dió un ejemplo de función continua cuya serie de Fourier diverge en un punto prefijado.

Ejemplo 3 (Ejemplo de Du Bois-Reymond)
Primeramente consideramos la función $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x & \text{si } \pi \geq x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Como f es integrable podemos considerar entonces su Serie de Fourier:

$$S[f](x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} sen(nx) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Obviamente la anterior función es de variación acotada y por tanto esto nos garantiza que las sumas parciales de Fourier están uniformemente acotadas (véase [16, pág 29])

$$|S[f]_n(x)| \leq M \ ,\forall n \in \mathbb{N} \ ,\forall x \in \mathbb{R}$$

A continuación consideramos la serie de funciones complejas $\{g_n\}$ definidas por

$$g_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

$$g_n(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{iN_k t} \ \frac{S[f]_{M_k}(t)}{k^2} \ ,\forall t \in \mathbb{R}$$

donde $\{N_k\}$ y $\{M_k\}$ son sucesiones crecientes de números naturales cumpliendo la condición :

$$N_k + M_k < N_{k+1} - M_{k+1} \ ,\forall k \in \mathbb{N} \tag{3}$$

Apuntamos ahora la siguiente acotación del módulo complejo de los sumandos de la serie

$$\left| e^{iN_k t} \ \frac{S[f]_{M_k}(t)}{k^2} \right| \leq \frac{M}{k^2} \ ,\forall \ t \in \mathbb{R} \ ,\forall \ k \in \mathbb{N}$$

Como la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ es convergente podemos utilizar el Criterio de Weierstrass para garantizar que la sucesión de funciones $\{g_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ a una función continua G.

$$G(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{iN_k t} \ \frac{S[f]_{M_k}(t)}{k^2} \ ,\forall t \in \mathbb{R}$$

$$G(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{iN_k t} \frac{\sum_{j=1}^{M_k} \frac{2}{n} sen(nt)}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{M_k} e^{iN_k t} sen(jt) \frac{2}{jk^2} \right) \ ,\forall t \in \mathbb{R}$$

Debido a la convergencia uniforme de la serie de funciones $\{g_n\}$ podemos calcular para cada $m \in \mathbb{Z}$ la integral siguiente:

$$C_m = \int_{-\pi}^{\pi} G(t) e^{-imt} dt = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{M_k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(N_k - m)t} sen(jt) dt \right) \frac{2}{jk^2} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{M_k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} cos((N_k - m)t) sen(jt) dt + i \int_{-\pi}^{\pi} sen((N_k - m)t) sen(jt) dt \right) \frac{2}{jk^2} \right)$$

$$= i \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{j=1}^{M_k} \left(\int_{-\pi}^{\pi} sen((N_k - m)t) sen(jt) dt \right) \frac{2}{jk^2} \right) ,\forall m \in \mathbb{Z}$$

Por la propiedad (3) obtenemos que para cada $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ puede existir a lo sumo un par de números naturales k_0 y $j_0 \in \{1 \ ... \ M_{k_0}\}$ tales que $N_{k_0} - j_0 = m$, condición suficiente y necesaria para que $\int_{-\pi}^{\pi} sen((N_{k_0} - m)t) sen(j_0 t) dt \neq 0$.[1].

[1] Esta caracterización no es sino el uso del carácer ortogonal de los elementos de una base hilbertiana [6, [pág 99]

Tenemos entonces que para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $j \in \{1 \ldots M_k\}$ se tiene que

$$C_{N_k - j} = \frac{2\pi i}{jk^2}$$

y además $C_m = 0$ si $m \notin \bigcup_{k\in\mathbb{N}}\{N_k - 1 \ldots N_k - M_k\}$.

Con esto podemos considerar otra nueva serie de funciones $\{l_n\}$ definidas por

$$l_n : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$$

$$l_n(t) = \sum_{p=-n}^{n} C_p e^{-ipt} \ , \forall t \in \mathbb{R} \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Observamos ahora la serie centrada en 0

$$l_{N_k}(0) = i \sum_{p=-N_k}^{N_k} C_p \ , \forall k \in \mathbb{N}$$

$$|l_{N_k}(0)| = \sum_{p=-N_k}^{N_k} C_p \ \geq \sum_{p=1}^{N_k} C_p \geq \frac{2\pi}{k^2} \sum_{j=1}^{M_k} \frac{1}{j} \geq \frac{2\pi}{k^2} \log(M_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

[2]

Si hacemos ahora, por ejemplo, la elección $M_k = e^{k^3}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ y N_k definida por

$$N_1 = 1$$

$$N_{k+1} = \sum_{j=0}^{k-1} M_j + M_{j+1} + 1 \ , \forall k \in \mathbb{N}$$

vemos rápidamente que se cumple (3) y que

$$|l_{N_k}(0)| \geq \frac{2\pi}{k^2} k^3 = 2\pi k \ , \forall k \in \mathbb{N}$$

Para terminar tenemos que

$$\frac{1}{2\pi} C_m = \int_{-\pi}^{\pi} (Re_G(t) + iIm_G(t)) e^{-imt} dt = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} Re_G(t) cos(mt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} Re_G(t) sen(mt) dt}{2\pi}$$

$$+ \frac{\int_{-\pi}^{\pi} Im_G(t) cos(mt) dt - i \int_{-\pi}^{\pi} Im_G(t) sen(mt) dt}{2\pi} \ \forall k \in \mathbb{Z}$$

Y calculando el siguiente producto

$$\frac{1}{2\pi} C_m e^{-imt} + \frac{1}{2\pi} C_{-m} e^{imt} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re_G(t) cos(ms) ds \right) cos(mt) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Re_G(t) sen(ms) ds \right) sen(mt)$$

$$+ i \left(\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Im_G(t) cos(ms) ds \right) cos(mt) + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Im_G(t) sen(ms) ds \right) sen(mt) \right) \forall t \in \mathbb{R} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

[2] La última desigualdad se desprende trivialmente de la identidad archiconocida $\log(x) = \int_1^x \frac{1}{x} dx \ \forall x \in \mathbb{R}^+$

Con lo que

$$\frac{1}{2\pi} l_n = S[Re_G]_n + iS[Im_G]_n \forall n \in \mathbb{N}$$

Para concluir recordamos que $l_n(0) \in \mathbb{C} - \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}$ para deducir que $\{S[Im_G]_{N_k}(0)\} = \{l_{N_k}(0)\} \mapsto +\infty$ siendo Im_G continua por serlo G.

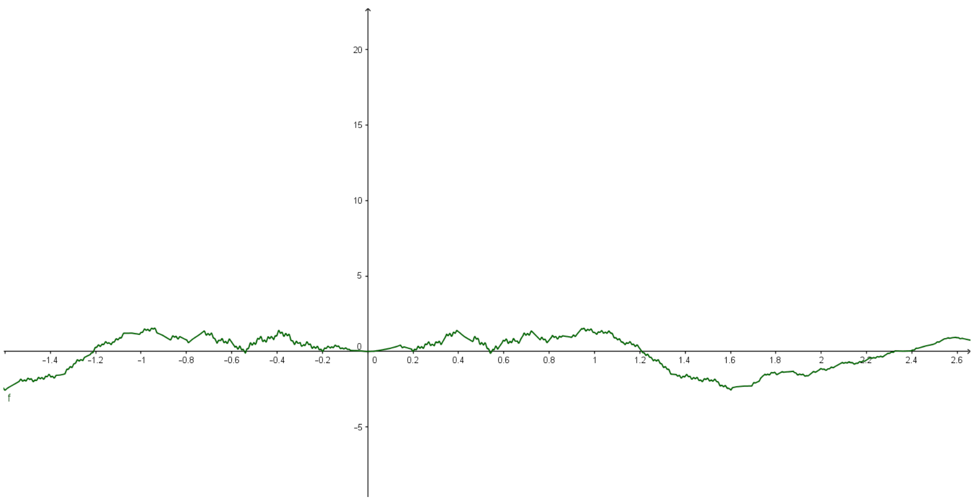

Imagen 3: En esta ilustración la sexta suma parcial de la función de Du Bois-Reymond en los alrededores de cero.

♦

Una vez visto el ejemplo de Du Bois-Reymond se podría pensar que el comportamiento patológico de las Series de Fourier es propio de funciones raras o anecdóticas. Para mostrar que esto no es así se pueden encontrar funciones familiares cuya serie de Fourier también diverge:

Ejemplo 4
Se considera primero el desarrollo en serie de Taylor para el logaritmo complejo:

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ z \neq -1$$

Sin perder generalidad podemos escribir

$$-\log(1-z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ z \neq 1$$

Si pasamos a coordenadas polares:

$$-\log(1-e^{ix}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{inx} \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

$$-\log(1-e^{-ix}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{-inx} \quad \forall x \in]0, 2\pi[$$

sumando las expresiones anteriores tenemos:

$$-\frac{1}{2}\log\left[2(1-cos(x))\right] = -\frac{1}{2}\log\left[(1-e^{ix})(1-e^{-ix})\right] = -\frac{1}{2}\log\left[(1-e^{ix})(1-e^{-ix})\right] =$$

$$-\frac{\log\left(1-e^{ix}\right)+\log\left(1-e^{-ix}\right)}{2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}cos(nx)\ \forall x\in\left]0,2\pi\right[$$

Hemos demostrado entonces que la serie trigonométrica $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}cos(nx)$ converge puntualmente a la función descrita. Por otra parte recordamos que la serie de coeficientes $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ es convergente. Podemos asegurar entonces que dicha serie trigonométrica converge según la norma de L^2 a una función $f\in L^2\left(-\pi,\pi\right)$ (véase [6, pág 128]). Es obvio que dicha serie tiene que se la serie de Fourier de f. Usando el Teorema de Riesz-Fischer [16, pág 37] deducimos que la serie trigonométrica anterior converge puntualmente casi por doquier a f. A la luz del análisis previo de la convergencia puntual de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}cos(nx)$ es fácil ver que $f(x)=-\frac{1}{2}\log\left[2(1-cos(x))\right]\ \forall x\in\left]-\pi,\pi\right[-\{0\}$.
Lo interesante de este ejemplo es que su Serie de Fourier (bien definida por ser f de cuadrado integrable) centrada en 0 diverge

$$S[f](0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$$

Este ejemplo no deja de ser interesante puesto que $f\in C^{\infty}\left(\left]-\pi,\pi\right[-\{0\}\right)$, lo que la hace cumplir de sobra las hipótesis del Corolario en todos los puntos menos en el cero.

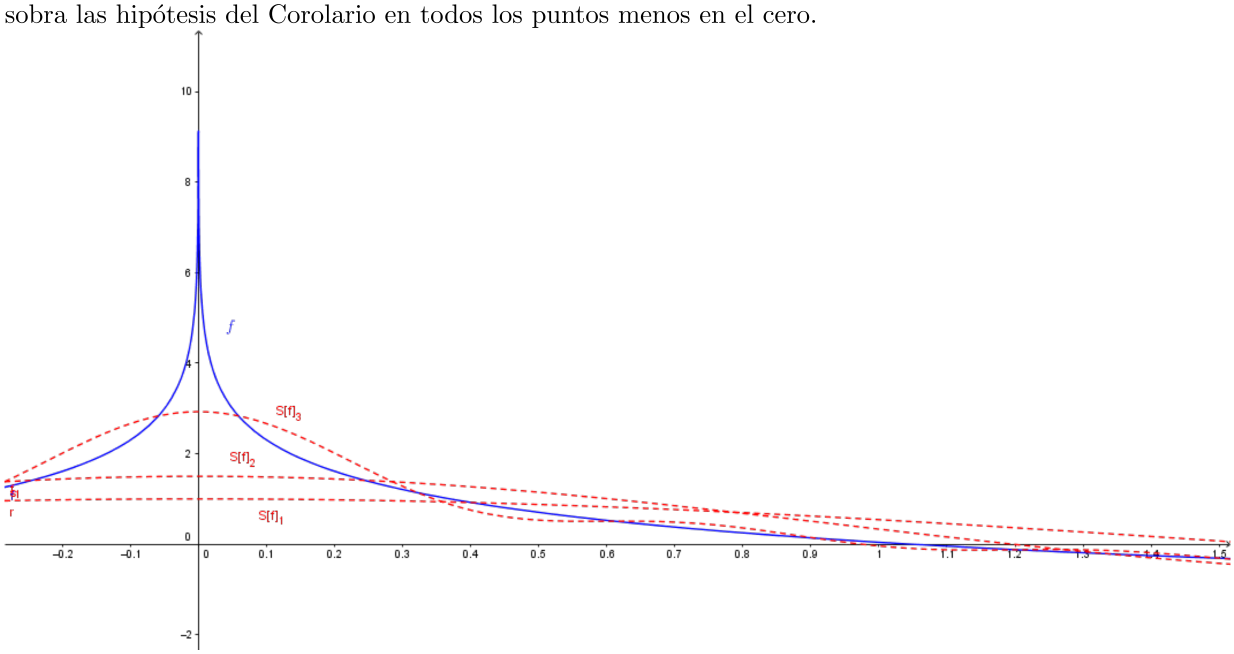

Imagen 4: En esta ilustración podemos ver la función f y sus las primeras sumas parciales de su serie de Fourier.

♦

Vistos los contraejemplos anteriores y sin quitar mérito al trabajo de Dirichlet hacemos una observacion. Queda manifiesto al ver los ejemplos anteriores que la convergencia de la Serie de Fourier tiene un carácter local. Hemos visto que la Serie de Fourier de una función puede converger en un intervalo abierto y diverger en su frontera. Por otra parte el resultado de Dirichlet nos asegura la convergencia global, reduciendo por tanto el conjunto de funciones de las que podemos obtener información. Teniendo esto en cuenta es razonable pensar que un criterio que funcione localmente puede arrojar más luz sobre la cuestión de la convergencia de las Series de Fourier.

Ahora se desarrolla la demostración del Criterio de Dini basándola en dos resultados previos, entre los que se encuentra el Lema de Riemann-Lebesgue.

1.3. Criterio de Dini sobre convergencia puntual de Series de Fourier

En 1880 Ulisse Dini publicó un artículo en el que daba condiciones locales suficientes para la convergencia de las series de Fourier. Estas condiciones implican cierta regularidad más allá de la continuidad de la función. Para más información sobre los siguientes resultados consúltese [6].

Proposición 1.3.1 Para todo $x \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ la siguiente igualdad es cierta:

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(kx)\right) sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} sen((n+\frac{1}{2})x)$$

`Demostración`

Procederemos por inducción sobre n:

Si $n = 1$ advertimos que

$$sen(\frac{x}{2})\left(2[cos(\frac{x}{2})]^2\right) = 2sen(\frac{x}{2})\left([cos(\frac{x}{2})]^2\right)$$

$$= sen(\frac{x}{2}) + sen(\frac{x}{2})\left([cos(\frac{x}{2})]^2 - [sen(\frac{x}{2})]^2\right) = 2sen(\frac{x}{2})\left([cos(\frac{x}{2})]^2\right)$$

$$= sen(\frac{x}{2}) + sen(\frac{x}{2})cos(x) = sen(x)cos(\frac{x}{2})$$

$$= sen(\frac{x}{2}) + 2sen(\frac{x}{2})cos(x) = sen(x)cos(\frac{x}{2}) + cos(x)sen(\frac{x}{2}) = sen(\frac{3x}{2})$$

$$= sen(\frac{x}{2})\left(\frac{1}{2} + cos(x)\right) = \frac{1}{2}sen(\frac{3x}{2})$$

completando la primera etapa de inducción. Supongamos ahora que

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} cos(kx)\right) sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} sen((n_0+\frac{1}{2})x) \ \forall x \in \mathbb{R}$$

para cierto $n_0 \in \mathbb{N}$. Entonces escribimos

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0+1} cos(kx)\right) sen(\frac{x}{2}) = \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} cos(kx)\right) sen(\frac{x}{2}) + cos((n_0+1)x)sen(\frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{2}sen((n_0+\frac{1}{2})x) + cos((n_0+1)x)sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}sen(\left(n_0+\frac{1}{2}\right)x) + cos((n_0+1)x)sen(\frac{x}{2})$$

$$= \frac{1}{2}sen((n_0+1-\frac{1}{2})x) + cos((n_0+1)x)sen(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2}\left(sen((n_0+1)x)cos(\frac{x}{2}) + cos((n_0+1)x)sen(\frac{x}{2})\right)$$

$$= \frac{1}{2} sen(\left(n_0 + 1 + \frac{1}{2}\right) x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

completando la inducción.

■

Lema 1.3.2 (Riemann-Lebesgue ver [6] , pág 129).
Sea $f \in L^1\left(]-\pi, \pi[\right)$. Entonces se tiene que :

$$\lim_{n \mapsto \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx = \lim_{n \mapsto \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx) dx = 0$$

`Demostración`
Se comienza por demostrar un caso particular. Si $f \in L^2\left(]-\pi, \pi[\right)$ tenemos que

$$\lim_{n \mapsto \infty} \parallel S\left[f\right]_n \parallel_{L^2(]-\pi,\pi[)} = \parallel f \parallel_{L^2(]-\pi,\pi[)}$$

Se puede decir ahora que la serie numérica $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\parallel S\left[f\right]_n \parallel_{L^2(]-\pi,\pi[)}\right)^2$ es convergente, luego su término general tiende a 0. En símbolos:

$$\lim_{n \mapsto \infty} a_n = \lim_{n \mapsto \infty} b_n = \lim_{n \mapsto \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx = \lim_{n \mapsto \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx) dx = 0$$

Hemos demostrado el lema de Riemann-Lebesgue para funciones de cuadrado integrable. Consideremos ahora g un elemento del espacio $L^1\left(]-\pi, \pi[\right)$ con su norma canónica. Definimos ahora las siguientes funciones integrables:

$$f^+ :]-\pi, \pi[\mapsto [0, +\infty[$$

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) > 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \leq 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$f^- :]-\pi, \pi[\mapsto]-\infty, 0]$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) < 0 \\ 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \end{cases} \tag{5}$$

Razonemos primeramente con f^+. Sea $\varepsilon > 0$, sabemos por la teoría de integración (véase [1, pág 428]) que existe una función simple W^+ (medible y con imagen finita) tal que $f^+(x) \geq W^+(x) \geq 0 \ \forall x \in]-\pi, \pi[$ cumpliendo que

$$\int_{]-\pi,\pi[} \left(f^+ - W^+\right) d\lambda = \int_{]-\pi,\pi[} \left|f^+ - W^+\right| d\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$$

Análogamente podemos encontrar una función simple W^- tal que $-f^-(x) \geq -W^-(x) \geq 0 \ \forall x \in]-\pi, \pi[$ con

$$\int_{]-\pi,\pi[} \left(-f^- + W^-\right) d\lambda = \int_{]-\pi,\pi[} \left|f^- - W^-\right| d\lambda < \frac{\varepsilon}{4}$$

Si ahora sumamos las dos expresiones anteriores y definimos $W = W^+ + W^-$ tenemos que W es una función simple y

$$\int_{]-\pi,\pi[} |f - W| \, d\lambda < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora podemos escribir también que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)cos(nx) - W(x)cos(nx)|\, dx < \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En este punto es vital notar que $W \in L^2\,(]-\pi,\pi[)$ para justificar la existencia de un natural m_0 tal que si $n \geq m_0$ entonces $\int_{-\pi}^{\pi} |W(x)cos(nx)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$ (usando el primer caso ya demostrado). Ahora procedemos de la siguiente manera:

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)dx\right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)cos(nx) - W(x)cos(nx) + W(x)cos(nx)|\, dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)cos(nx) - W(x)cos(nx)|\, dx$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} |W(x)cos(nx)|\, dx \leq \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$$

Ejecutando el razonamiento de manera análoga podemos deducir también que para n suficientemente grande tenemos que

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)dx\right| \leq \varepsilon$$

como se quería demostrar.

■

Proposición 1.3.3 Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función $2\pi-$periódica integrable en $]-\pi,\pi[$. Entonces la Serie de Fourier de f cumple la siguiente igualdad

$$S[f_{|]-\pi,\pi[}]_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s)\frac{sen((n+\frac{1}{2})s)}{2sen(\frac{s}{2})}ds \ ,\forall x \in\,]-\pi,\pi[\ \ ,\forall n \in \mathbb{N}$$

`Demostración`

$$S[f_{|]-\pi,\pi[}]_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} (a_j cos(jx) + b_j sen(jx)) \ \ ,\forall x \in\,]-\pi,\pi[$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(jx)cos(js) + sen(jx)sen(js)\right) ds$$

[3]

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(j(s-x))\right) ds = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(js)\right) ds$$

[4]

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(js)\right) ds$$

Se define ahora la función auxiliar

$$\nu_n :]-\pi,\pi[\mapsto \mathbb{R}$$

$$\nu_n(t) = \begin{cases} \frac{sen((n+\frac{1}{2})t)}{2sen(\frac{t}{2})} & \text{si } t \neq 0 \\ n + \frac{1}{2} & \text{si } t = 0 \end{cases} \tag{6}$$

[3] En este paso se ha usado un cambio de variable usando el difeomorfismo $\Phi(t) = t + x$.

[4] Esta igualdad se justifica por la periodicidad de f.

A la luz de la **Proposición 1.3.1** podemos decir que ν_n es una función continua y que

$$\nu_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(jt) \ ,\forall t \in \left]-\pi, \pi\right[$$

Por lo tanto podemos reescribir el último término de las igualdades anteriores por su equivalente:

$$S\left[f\right]_n(x) = a_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j cos(jx) + b_j sen(jx) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(js)\right) ds$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(s+x)\nu_n(s) ds \ \forall x \in \left]-\pi, \pi\right[$$

Como se quería demostrar.

■

A continuación haremos uso de los resultados anteriores para ofrecer un criterio local bastante versátil para saber si la Serie de Fourier de una función f en x converge a $f(x)$.

Criterio de Dini 1.3.4 (ver [6], pág 131). Sea $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ una función $2\pi-$periódica tal que $f \in L^1(-\pi, \pi)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que existe $\varepsilon > 0$ tal que la función

$$\delta_{x_0,\varepsilon} : \left]-\varepsilon, 0\right[\cup \left]0, \varepsilon\right[\longmapsto \mathbb{R}$$

$$\delta_{x_0,\varepsilon}(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad ,\forall \ 0 < |h| < \varepsilon$$

es integrable. Entonces la Serie de Fourier de $f_{|]-\pi,\pi[}$ en el punto x_0 converge a $f(x_0)$.

`Demostración`

La proposición (1.3.3) nos proporciona la siguiente igualdad Senos

$$S[f_{|]-\pi,\pi[}]_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s)\frac{sen((n+\frac{1}{2})s)}{2sen(\frac{s}{2})} ds \ ,\forall x \in \left]-\pi, \pi\right[\ ,\forall n \in \mathbb{N}$$

Por otra parte es fácil observar que :

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \nu_n(s) ds = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(js)\right) ds$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0)\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{n} cos(js)\right) ds$$

Restando estas dos últimas expresiones resulta lo siguiente:

$$\left|S\left[f\right]_n(x_0) - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(s+x_0) - f(x_0)\right)\nu_n(s) ds\right| = \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(s+x_0) - f(x_0)}{s}\right) s\nu_n(s) ds\right|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{f(s+x_0) - f(x_0)}{s}\right)\frac{s}{sen(\frac{s}{2})} sen((n+\frac{1}{2})s) ds\right|$$

Podemos definir ahora $g :]-\pi,\pi[\mapsto \mathbb{R}$ con $g(s) = \frac{f(s+x_0)-f(x_0)}{s}\frac{s}{sen(\frac{s}{2})}$, $\forall s \in]-\pi, 0[\cup]0,\pi[$ usando las otras hipótesis:

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|\frac{f(s+x_0)-f(x_0)}{s}\frac{s}{sen(\frac{s}{2})}\right|ds \leq \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} M\left|\frac{f(s+x_0)-f(x_0)}{s}\right|ds < +\infty$$

Y usando también que f es integrable deducimos que g también lo es.

$$|S[f]_n(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)sen((n+\frac{1}{2})s)ds\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)cos(\frac{s}{2})sen(ns) + g(s)sen(\frac{s}{2})cos(ns)ds\right|$$

$$\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)sen(ns)ds\right| + \left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)cos(ns)ds\right| \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Por último usamos el **Lema de Riemann-Lebesgue (1.3.2)** para deducir que :

$$\lim_{n\mapsto\infty} |S[f]_n(x_0) - f(x_0)| \leq \lim_{n\mapsto\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)sen(ns)ds\right| + \lim_{n\mapsto\infty}\left|\int_{-\pi}^{\pi} g(s)cos(ns)ds\right| = 0$$

Como se quería demostrar.

■

El Criterio de Dini da condiciones suficientes de carácter local para que la Serie de Fourier converja

Corolario 1.3.5 Sea $f \in L^1(]-\pi,\pi])$ una función y $x_0 \in]-\pi,\pi]$ con la propiedad de que las derivadas laterales existen

$$\exists \lim_{h\mapsto 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L^- \qquad \exists \lim_{h\mapsto 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L^+$$

Entonces la Serie de Fourier de f en el punto x_0 converge a $f(x_0)$.

`Demostración`

Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = f(t - 2\pi n) \ \forall t \in]-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n] \ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Obviamente g es $2\pi-$periódica e integrable en $[-\pi,\pi]$. Por hipótesis existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - L^+\right| < 1 \ , \forall h \in]0,\delta]$$

y además

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - L^-\right| < 1 \ , \forall h \in [-\delta, 0[$$

Combinando las expresiones anteriores tenemos que

$$\left|\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h} - \frac{L^+ + L^-}{2}\right| < 1 \ , \forall h \in [-\delta,\delta] - \{0\}$$

observando esto es evidente que el cociente incremental centrado en x_0 de g está acotado en $[-\delta,\delta]-\{0\}$ y por lo tanto es integrable. Usando el Criterio de Dini (1.3.5) nos aseguramos de que

$$\lim_{n\mapsto\infty} S\left[g_{|]-\pi,\pi[}\right]_n(x_0) = g(x_0) = f(x_0)$$

Y se concluye la demostración restaltando el hecho de que

$$S\left[g_{|]-\pi,\pi[}\right] = S[f]$$

■

Con el Criterio de Dini hemos demostrado que existe una amplia gama de funciones cuya Serie de Fourier presente un comportamiento benigno en términos de la convergencia puntual. Sin ir más lejos es seguro ya gracias al Corolario que toda función con derivadas laterares puede expresarse como límite puntual de su Serie de Fourier.

1.4. Notas finales del capítulo uno

Una vez desarrollados los resultados anteriores merece la pena detenerse y observar con sutileza ciertos detalles del comportamiento de las Series de Fourier. Más concretamente resulta cuanto menos curioso que los coeficientes de Fourier de una función f se calculen usando una integral en un intervalo. Sin embargo resultados como el Criterio de Dini nos ponen de manifiesto que el comportamiento **local** de f alrededor de un punto x_0 puede determinar el comportamiento de $S[f](x_0)$.

La hipótesis general de que el comportamiento local de una función pueda determinar el de su Serie de Fourier es llamado **Principio de localización de Riemann**. Dicho principio puede ser formulado así (véase [2],pág 380):

Principio de localización de Riemann
Sea $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *una función* $2\pi-$*periódica e integrable en* $]-\pi, \pi[$. *Entonces dado* $x \in \mathbb{R}$ *la sucesión* $\{S[f]_n(x)\}$ *converge si y sólo si existe* $\pi > \delta > 0$ *tal que*

$$\exists \lim_{n \mapsto +\infty} \int_0^\delta \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2} \frac{sen((n+\frac{1}{2})t)}{t} dt = L$$

en cuyo caso $\lim_{n \mapsto +\infty} \{S[f]_n(x)\} = L$

Con los ejemplos dados y la teoría desarrollada queda de manifiesto que el problema de decidir si la Serie de Fourier de una función $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ dada converge no es en absoluto trivial. De hecho este es un problema abierto en el que todavía la investigación sigue activa. En este capítulo se pretende transmitir la idea de que la regularidad de f puede asegurarnos que su Serie de Fourier converge.

Es natural preguntarse una vez asumido esto que en cuántos puntos del dominio puede $S[f]$ no converger debilitando la regularidad de f. Carleson demostró en 1966 que si f es continua entonces $S[f]$ converge casi por doquier en el dominio de f (véase [7]). Para redondear este resultado este mismo año Kahane y Katznelson probaron que si $E \subset [-\pi, \pi]$ es un conjunto con medida de Lebesgue cero existe una función continua en $[-\pi, \pi]$ cuya Serie de Fourier no converge en E
Para cerrar el capítulo se dará un resultado que puede ayudarnos a tener cierta perspectiva sobre la convergencia de las Series de Fourier.

Las funciones cuya Serie de Fourier tiene sumas parciales acotadas en el origen forma un ***conjunto de Primera Categoría*** *respecto de* $C([-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$

Teniendo en cuenta este último resultado no erramos demasiado al afirmar que la convergencia es un comportamiento **anecdótico** en las Series de Fourier de funciones continuas. Para ver su demostración (que no se expone en esta memoria por su carácter ajeno al alcance del capítulo) nos remitimos a ([15], pág 67).

2. Unicidad para series trigonométricas

2.1. Definiciones previas y plantemamiento de problemas

Definición 2.1.1.(*Serie Trigonométrica*). Sean dos sucesiones de $\mathbb{C}$, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ y un número complejo a_0. Se define la serie trigonométrica con coeficientes $\{a_0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ como la sucesión de funciones $\{S_n\}$ con

$$S_n : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$$

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k cos(kx) + b_k sen(kx)) \ \ ,\forall x \in \mathbb{R}$$

.
Si dado $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $\lim_{n \mapsto \infty} S_n(x_0) = s \in \mathbb{C}$ escribimos informalmente $s = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx_0) + b_n sen(nx_0))$.

▲

Definición 2.1.2.(*Expansión trigonométrica de una función*). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ y $f : A \longmapsto \mathbb{C}$ una función compleja definida en A. Se conviene que f admite una expansión trigonométrica en el conjunto A si existen dos sucesiones complejas $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y a_0 un número complejo tal que la serie trigonométrica con dichos coeficientes converge puntualmente a f en A.
En símbolos:

$$\{S_n(x)\} = \{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\} \to f(x) \ \forall x \in A$$

o informalmente

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx) \ \forall x \in A$$

▲

[5]

El problema natural que surge es el siguiente ¿Podemos describir con precisión el conjunto de funciones que tienen una expansión trigonométrica? O dicho de otra forma:

Dada una función $f : A \longmapsto \mathbb{C}$ ***¿Podemos asegurar que f tiene una expansión trigonométrica?***

Gracias al **Criterio 1.3.4** podemos afirmar que una buena gama de funciones integrables y continuamente derivables admite una expansión trigonométrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ y en el caso particular en que f sea esté definida sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ podemos calcular los coeficientes de la siguiente forma:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)sen(nx)dx$$

[5] Es evidente que el carácter periódico de las funciones seno y coseno es heredado por f gracias al carácter lineal de la convergencia. Podemos decir entonces que cualquier función que admita una expansión trigonométrica en $\mathbb{R}$ es 2π-periódica.

[6] Si antes nos preguntábamos acerca de la existencia de las expansiones es natural preguntarse esto otro:

¿Puede tener $f : A \longmapsto \mathbb{C}$ dos expansiones trigonométricas diferentes?

que a poco que se piense es un problema equivalente al siguiente:

Si existe un conjunto $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ y una serie trigonométrica tal que

$$0 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx) \ \forall x \in A$$

¿son entonces $a_0 = a_n = b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$?

Reformulando el problema podemos simplificar la notación haciéndola más versátil para nuestros propósitos. Si tenemos una serie trigonométrica $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ sus sumas parciales son

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \right) - ib_n \left(\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-inx} \right) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$$

donde

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2.2. Teoría de Riemann

Vamos a tratar el problema de la unicidad de las expansiones usando las ideas de Riemann, para una consulta más profunda de las mismas consúltese [12], págs 5-10. Estrenando la nueva notación consideramos una serie trigonométrica con sumas parciales

$$S_m(x) = \sum_{n=-m}^{n=m} c_n e^{inx} \ , \forall m \in \mathbb{N} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideramos la función

$$F_{Sm}(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{0 \neq n=-m}^{n=m} \frac{c_n}{n^2} e^{inx}$$

Observamos ahora que en el caso de que los coeficientes c_n estén acotados por $M \in \mathbb{R}^+$ tenemos

$$|\frac{c_n}{n^2} e^{inx}| \leq \frac{M}{n^2}$$

[6] Es importante notar que no estamos más que calculando los coeficientes de Fourier de la función f.

Usando ahora el criterio de Weirerstrass obtenemos que la serie converge uniformemente a una función continua. Si definimos entonces:

$$F_S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$$
$$F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{0 \neq n = -\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n}{n^2} e^{inx} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

La función F_S es continua en $\mathbb{R}$. Parece razonable pensar que de existir F_S'', entonces F_S'' y $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n e^{inx}$ deben coincidir. A continuación nos ocuparemos de dar condiciones suficientes para que se cumpla esta propiedad.

Definición 2.2.1 (Segunda derivada Schwartz). Sea $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : J \longmapsto \mathbb{C}$ una función compleja definida en J. Por hipótesis para cada $x_0 \in J$ existe un entorno de x_0 , $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[- \{x_0\}$ contenido en J. Se puede definir entonces en este entorno la función $\Delta^2 f(x_0, h) = f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)$ para todo h tal que $|h| < \epsilon$. Si para un x_0 existe $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\Delta^2 f(x_0,h)}{h^2} = D^2 F(x_0)$ llamaremos a $D^2 F(x_0)$ la segunda derivada Schwartz de f en x_0.

▲

Proposición 2.2.2 (ver [12], pág 6).
Sea $\emptyset \neq J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo abierto y $f : J \longmapsto \mathbb{C}$ una función compleja definida en J. Si f tiene segunda derivada en $x_0 \in J$ entonces existe $D^2 F(x_0)$ y se tiene que

$$D^2 F(x_0) = f''(x_0)$$

`Demostración.`
Por la fórmula infinitesimal del resto tenemos que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - T_2 f(x_0)(h)}{h^2} = 0$ donde $T_2 f(x_0)(h) = f(x_0) + h f'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0)$.

Si ahora hacemos

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} =$$
$$\frac{(f(x+h) - T_2 f(x_0)(h)) - 2f(x) + (f(x-h) - T_2 f(x_0)(-h)) + T_2 f(x_0)(h) + T_2 f(x_0)(-h)}{h^2} =$$
$$\frac{f(x+h) - T_2 f(x_0)(h)}{h^2} + \frac{f(x-h) - T_2 f(x_0)(-h)}{h^2} + f''(x_0)$$

inmediatamente deducimos la tesis deseada.

[7]

■

[7] El recíproco no es cierto. Tómese $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{|x|x}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ por lo que no existe $f''(0)$, sin embargo $\Delta^2 f(0, h) = 0$ $\forall h \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.2.3 (ver [12], pág 7).
Sea una sucesión $\{h_k\} \subseteq \mathbb{R}^+$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \left(\frac{sen(nh_k)}{nh_k)} \right)^2 - \left(\frac{sen((n+1)h_k)}{(n+1)h_k)} \right)^2 \right| < C < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N}$$

.

`Demostración`

Sea $u :]0,+\infty[\longmapsto \mathbb{R}$ con $u(x) = (\frac{sen(x)}{x})^2 \ \forall x \in]0,+\infty[$, u es derivable con $u'(x) = \frac{sen(2x)}{x^2} - 2\frac{(sen(x))^2}{x^3} \ \forall x \in]0,+\infty[$.
Usando la desigualdad triangular del valor absoluto obtenemos fácilmente

$$|u'(x)| = |\frac{sen(2x)x - sen(x)^2}{x^3}| \leq \frac{x+1}{x^3} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ \forall x > 0$$

Esto nos asegura que para todo $\delta > 0$ $u' \in L^1\left(]\delta, +\infty[\right)$ Por otra parte tenemos

$$u'(x) = \frac{sen(x)}{x}\frac{cos(x)x - sen(x)}{x^2} \ , \forall x \in]0,+\infty[$$

Usando ahora los siguientes límites

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \mapsto 0} \frac{cos(x)x - sen(x)}{x^2} = \lim_{x \mapsto 0} \frac{-sen(x)x + cos(x) - cos(x)}{2x} = \lim_{x \mapsto 0} sen(x) = 0$$

Entonces $\exists \lim_{x \mapsto 0} u'(x)$ y por consiguiente existe $\delta_0 > 0$ tal que $u' \in L^1\left(]0, \delta_0[\right)$ Todo esto estriba en que u' es integrable (Lebesgue) en $]0,+\infty[$. Ahora observamos

$$\int_0^{+\infty} |u'(x)| dx \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |\int_{nh_k}^{(n+1)h_k} u'(x)| = \sum_{n=1}^{\infty} |\left(\frac{sen(nh_k)}{nh_k)} \right)^2 - \left(\frac{sen((n+1)h_k)}{(n+1)h_k)} \right)^2|, \forall k \in \mathbb{N}$$

y tomando $C = \int_0^{+\infty} |u'(x)| dx$ llegamos al resultado deseado.

■

Lema de Toeplitz 2.2.4 (ver [12], pág 7).
Consideramos una aplicación $s : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$ y una sucesión $\{x_n\}$ de números complejos. Si identificamos $s(k,n) = s_{kn}$ y se cumple que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{kn} x_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{kn}$$

convergen para todo $k \in \mathbb{N}$ y notamos $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} s_{kn} x_n \ \forall k \in \mathbb{N}$. Si también se satisfacen estos enunciados:

$$i) \lim_{k \mapsto \infty} s_{kn} = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$
$$ii) \ \sum_{n=0}^{\infty} |s_{kn}| \leq C < +\infty \ \forall k \in \mathbb{N}$$
$$iii) \{x_n\} \longrightarrow 0$$

entonces $\lim_{k\mapsto+\infty} y_k = 0$.
Si además tenemos que se dan $i), ii)$ añadiendo que $iv)\{\sum_{n=1}^{\infty} s_{kn}\} \longrightarrow 1$ cuando $k \longrightarrow +\infty$ y $\{x_n\} \longrightarrow x$ entonces

$$\lim_{k\longrightarrow+\infty} y_k = x$$

.

■

Proposición 2.2.5 (ver [12], pág 6).
Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente y su suma es a entonces la serie parametrizada $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{sen(nh)}{nh}\right)^2 a_n$ es sumable para $0 < h < \epsilon$ y además

$$\lim_{h\mapsto 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{sen(nh)}{nh}\right)^2 a_n = a$$

`Demostración`
Primeramente notamos $A_m = \sum_{n=1}^{m} a_n$ y advertimos la siguientes observaciones:

$$\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{sen(nh)}{nh}\right)^2 a_n = \sum_{n=1}^{m}\left(\left(\frac{sen(nh)}{nh)}\right)^2 - \left(\frac{sen((n+1)h)}{(n+1)h)}\right)^2\right)A_n + A_m\left(\frac{sen((m+1)h)}{(m+1)h}\right)^2 \ \forall h\neq 0\ \forall m\in\mathbb{N}$$

$$\left|A_m\left(\frac{sen((m+1)h)}{(m+1)h}\right)^2\right| \leq \frac{M}{((m+1)h)^2}\ ,\forall m\in\mathbb{N}\ ,\forall h\neq 0$$

Entonces el primer término a la izquierda de la igualdad es una serie convergente (absolutamente convergente) y

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{sen(nh)}{nh}\right)^2 a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\left(\frac{sen(nh)}{nh)}\right)^2 - \left(\frac{sen((n+1)h)}{(n+1)h)}\right)^2\right)A_n$$

Consideramos una sucesión de números reales $\{h_k\}$ convergente a 0 y la aplicación

$$s:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\longmapsto\mathbb{R}$$

$$s(k,n) = \left(\frac{sen(nh_k)}{nh_k}\right)^2 - \left(\frac{sen((n+1)h_k)}{(n+1)h_k}\right)^2\ \forall (k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

s cumple claramente las propiedades $i)$ y $iv)$ requeridas por el **Lema (2.2.4)** pero también hemos demostrado que se cumple $ii)$ en la **Proposición 2.2.3** . Por otra parte es claro que $\{A_n\}\mapsto a$ entonces valiéndonos del **Lema (2.2.4)** se sigue el resultado prometido.

■

Primer Lema de Riemann 2.2.6.(ver [12], pág 6).
Sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ una serie trigonométrica convergente para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que la sucesión de coeficientes $\{c_n\}$ está acotada. Entoces existe $D^2F_S(x)\ \forall x\in\mathbb{R}$ y

$$D^2F_S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\ \forall x\in\mathbb{R}$$

`Demostración`
Recordamos la función definida anteriormente

$$F_S(x) = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{0\neq n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{inx}}{n^2}$$

Observamos que

$$\Delta^2 f(x_0,2h) = c_0 \frac{(x+2h)^2 - 2(x)^2 + (x-2h)^2}{2} - \sum_{0\neq n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{inx}(e^{i2hn} - 2 + e^{-i2hn})}{n^2}$$

$$= c_0 (2h)^2 - \sum_{0\neq n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{inx} 2(cos(2nh) - 1)}{n^2} = 4h^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{sen(nh)}{nh}\right]^2 c_n e^{inx}$$

Escrito de otra forma

$$\frac{\Delta^2 f(x_0,2h)}{(2h)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{sen(nh)}{nh}\right]^2 c_n e^{inx}$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \lim_{h\mapsto 0} \frac{\Delta^2 f(x_0,2h)}{(2h)^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$$

Aplicando la **Proposición 2.2.5** en este último paso obtenemos lo prometido.

■

Segundo Lema de Riemann 2.2.7(ver [12], pág 7)
Sea una serie trigonométrica $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ satisfaciendo que $\{c_n\} \mapsto 0$. Entonces

$$\lim_{h\mapsto 0} \frac{\Delta^2 F_S(x_0,h)}{h} = 0$$

uniformemente en x_0.
`Demostración`
De forma similar a la demostración del lema anterior tenemos:

$$\frac{\Delta^2 F_S(x_0,2h)}{4h} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{sen(nh)^2}{n^2 h} c_n e^{inx}$$

Consideremos ahora una sucesión $\{h_k\} \subseteq]0,1]$ con $\{h_k\} \mapsto 0$. Notamos ahora $t_{kn} = \frac{sen(nh_k)^2}{n^2 h_k}$ y observamos fácilmente que:
$\lim_{k\mapsto +\infty} t_{kn} = 0$ Ahora para cada $k \in \mathbb{N}$ elegimos un $N_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < N_k - 1 < {h_k}^{-1} < 2\left(N_k - 1\right)$$

Entonces observamos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |t_{kn}| = \sum_{n=1}^{N_k - 1} \frac{sen(nh_k)^2}{n^2 h_k} + \sum_{n=N_k}^{+\infty} \frac{sen(nh_k)^2}{n^2 h_k} \leq (N_k - 1)h_k + \frac{1}{h_k} \sum_{n=N_k}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\leq 1 + \frac{1}{h_k} \sum_{n=N_k}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{h_k} \sum_{n=N_k}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \frac{1}{h_k} \sum_{n=N_k}^{+\infty} \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\leq 1 + h_k \frac{1}{N_k - 1} \leq 3, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Y podemos usar el **Lema de Toeplitz 2.2.4** para asegurar la convergencia deseada.

■

2.3. El teorema de unicidad de Cantor

Se aborda a continuación el problema de la unicidad de los desarrollos trigonométricos. Para procurar que las demostraciones sean lo más limpias posibles se dan ahora unos resultados previos.

Lema 2.3.1 de Cantor-Lebesgue (ver [12], pág 8)
Sea una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ tal que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0 \ , \forall x \in E$$

siendo $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto de medida positiva. Entonces $\{a_n\}, \{b_n\} \mapsto 0$
`Demostración`

$$0 \leq (asen(x) + bcos(x))^2 \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 2absen(x)cos(x) \leq a^2 sen(x)^2 + b^2 cos(x)^2$$

$$2absen(x)cos(x) \leq a^2 \left(1 - cos(x)^2\right) + b^2 \left(1 - sen(x)^2\right) \leq a^2 + b^2$$

$$\Downarrow$$

$$(acos(x) + bsen(x))^2 \leq a^2 + b^2 \ , \forall a, b, x \in \mathbb{R}$$

El razonamiento anterior es necesario para justificar la existencia de los siguientes elementos. Definimos ahora las sucesiones de números reales siguientes: $\rho_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{\varphi_n\}$ tal que

$$a_n cos(nx) + b_n sen(nx) = \rho_n cos(nx + \varphi_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Procedamos ahora mediante la reducción al absurdo. Supongamos que $\{\rho_n\}$ no converge a 0. Existe entonces una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ estrictamente creciente y $\varepsilon_0 > 0$ tales que $\rho_{\sigma(n)} > \varepsilon_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte tenemos que

$$\lim_{n \mapsto +\infty} a_n cos(nx) + b_n sen(nx) = \lim_{n \mapsto +\infty} \rho_n cos(nx + \varphi_n) = 0 \ \forall x \in E$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \rho_{\sigma(n)} cos(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \mapsto +\infty} \cos(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}) = 0 \Rightarrow \lim_{n \mapsto +\infty} \left(cos(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)})\right)^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} 1 + cos(2\left(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}\right)) = 0 \ \forall x \in E$$

Dada la periodicidad de las funciones *seno* y *coseno* hacen que no sea restrictiva la asunción de que $E \subseteq [0, 2\pi]$. Contando con ello se resalta que

$$|1 + cos(2\left(\sigma(n)x + \varphi_{\sigma(n)}\right))| \leq 3 \ \forall x \in E \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Pero como E es acotado lo anteriormente escrito puede reinterpretarse pensando en que hemos encontrado una función definida en E integrable que acota absolutamente a todas las funciones de la sucesión que manejamos. Además hemos demostrado la convergencia puntual de dicha sucesión de funciones a la función nula en E. Estamos en condiciones de usar el **Teorema de la Convergencia Dominada** ([1],pág 455), que nos proporciona

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \int_{[0,2\pi]} \chi_E(s) \left(1 + cos(2\left(\sigma(n)s + \varphi_{\sigma(n)}\right))\right) ds = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda(E) + \lim_{n \mapsto +\infty} \int_{[0,2\pi]} \chi_E(s) cos(2\left(\sigma(n)s + \varphi_{\sigma(n)}\right)) ds = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \lambda(E) + \left[\hat{\chi}_E(2\sigma(n)) cos(2\varphi_{\sigma(n)}) + \hat{\chi}_E(2\sigma(n)) sen(2\varphi_{\sigma(n)})\right] = 0$$

Pero si ahora usamos el **Lema de Riemann-Lebesgue** podemos concluir que $\lambda(E) = 0$ encontrando una flagrante contradicción.

$\blacksquare$

Proposición 2.3.2 (ver [12], pág 9)
Sea $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ una función continua. Si $D^2 f(x) \geq 0 \ \forall x \in]a,b[$ entonces f es convexa. En el caso particular de que $D^2 f(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[$ entonces f es lineal.
`Demostración`
Para cada $\varepsilon > 0$ se define la función $f_\varepsilon :]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ como $f_\varepsilon(x) = f(x) - \varepsilon x^2 \ \forall x \in]a,b[$

$$D^2 f_\varepsilon(x) = D^2 f(x) + \varepsilon > 0 \ \forall x \in]a,b[$$

Supongamos ahora que f_ε no es convexa. Entonces existen $x_0, y_0 \in]a,b[$ con $x_0 < y_0$ y $t_0 \in [0,1]$ tales que:

$$f_\varepsilon(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) > f_\varepsilon(x_0) + t_0(f_\varepsilon(y_0) - f_\varepsilon(x_0))$$

Se define entonces

$$g : [x_0, y_0] \longmapsto \mathbb{R}$$

$$g(x) = f_\varepsilon(x) - \left(f_\varepsilon(x_0) + \frac{x - x_0}{y_0 - x_0} \left(f_\varepsilon(y_0) - f_\varepsilon(x_0)\right) \right) \ \forall x \in [x_0, y_0]$$

Se observa rápidamente que g es continua y que $D^2 g(x) = D^2 f_\varepsilon(x) > 0 \ \forall x \in [x_0, y_0]$. También hay que tener en cuenta que $g(x_0) = g(y_0) = 0$ y que $g(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) > 0$.
Como g es continua y está definida sobre un compacto alcanza entonces su máximo en dicho compacto. Notamos:

$$g(x_1) = max\{g(x) : x \in [x_0, y_0]\} \geq g(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) > 0$$

Es importarse también darse cuenta del hecho de que $g(x_1) > 0$ estribe en que $x_1 \in]x_0, y_0[$. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_1| < \delta$ entonces por definición de máximo se tiene que $g(x_1 + h) \leq g(x_1) \ \forall h : |h| < \delta$. Entonces $D^2 g(x_1) \leq 0$ lo que supone una contradicción. Se tiene por tanto que f_ε es convexa para todo $\varepsilon > 0$. Por continuidad deducimos entonces que f es convexa.

En el caso de que $D^2 f(x) = 0 \ \forall x \in]a,b[$ tenemos que f es convexa por ser un caso particular del anterior. Ahora análogamente procedemos de la siguiente forma:
Para cada $\varepsilon > 0$ se define la función $f_\varepsilon :]a,b[\longmapsto \mathbb{R}$ como $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon x^2 \ \forall x \in]a,b[$

$$D^2 f_\varepsilon(x) = D^2 f(x) - \varepsilon < 0 \ \forall x \in]a,b[$$

Supongamos ahora que f_ε no es cóncava. Entonces existen $x_0, y_0 \in]a, b[$ con $x_0 < y_0$ y $t_0 \in [0,1]$ tales que:

$$f_\varepsilon(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) < f_\varepsilon(x_0) + t_0(f_\varepsilon(y_0) - f_\varepsilon(x_0))$$

Se define entonces

$$g : [x_0, y_0] \longmapsto \mathbb{R}$$

$$g(x) = f_\varepsilon(x) - \left(f_\varepsilon(x_0) + \frac{x - x_0}{y_0 - x_0} \left(f_\varepsilon(y_0) - f_\varepsilon(x_0)\right) \right) \ \forall x \in [x_0, y_0]$$

Se observa rápidamente que g es continua y que $D^2 g(x) = D^2 f_\varepsilon(x) > 0 \ \forall x \in [x_0, y_0]$. También hay que tener en cuenta que $g(x_0) = g(y_0) = 0$ y que $g(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) < 0$.
Como g es continua y está definida sobre un compacto alcanza entonces el su mínimo en dicho compacto. Notamos:

$$g(x_1) = min\{g(x) : x \in [x_0, y_0]\} \geq g(x_0 + t_0(y_0 - x_0)) < 0$$

Es importarse también darse cuenta del hecho de que $g(x_1) < 0$ estribe en que $x_1 \in]x_0, y_0[$. Por lo tanto existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_1| < \delta$ entonces por definición de mínimo se tiene que $g(x_1 + h) \geq g(x_1) \ \forall h : |h| < \delta$. Entonces $D^2 g(x_1) \geq 0$ lo que supone una contradicción. Se tiene por tanto que f_ε es cóncava para todo $\varepsilon > 0$. Por continuidad deducimos entonces que f es cóncava.
Se tiene por tanto que f es cóncava y convexa a la vez, por lo tanto f es lineal.

■

Teorema 2.3.3 (Cantor-1870).(ver [12], pág 9) Si tenemos una serie tal que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ entonces

$$c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{Z}$$

`Demostración`
El **Lema de Cantor-Lebesgue 2.3.1** nos proporciona que $\{c_n\} \mapsto 0$. En particular $\{c_n\}$ está acotada. Por el **Primer Lema de Riemann 2.2.6** se tiene que $D^2 F_S(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces la **Proposición 2.3.4** nos proporciona que F_S es lineal.

$$F_S(x) = ax + b = \frac{c_0 x^2}{2} - \sum_{0 \neq n = -\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{inx}}{n^2} \ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F_S(\pi) - F_S(-\pi) = 0 = a(2\pi) \ \Rightarrow a = 0$$

$$F_S(2\pi) - F_S(0) = c_0 \frac{(2\pi)^2}{2} = b - b = 0 \Rightarrow c_0 = 0$$

Entonces se tiene que $b = -\sum_{0 \neq n = -\infty}^{n=+\infty} \frac{c_n e^{inx}}{n^2}$ y como la serie converge uniformemente tenemos que para todo $m \in \mathbb{N}$:

$$0 = \int_0^{2\pi} b e^{-imx} dx = -\sum_{0 \neq n = -\infty}^{n=+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{c_n e^{i(n-m)x}}{n^2} dx = \frac{c_m}{m^2} \ \Rightarrow c_m = 0$$

Lo que nos da la tesis deseada.

■

Nota: Kronecker sugirió que la demostración anterior puede realizarse sin tener que probar que $\{c_n\} \mapsto 0$. Para comprobarlo supongamos que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(x+u)} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(x-u)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} cos(nu) = 0 \ \forall x, u \in \mathbb{R}$$

Fijamos ahora $x \in \mathbb{R}$ y utilizando lo anterior y la definición de los coeficientes c_n tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) \, cos(nu) = 0 \ \forall u \in \mathbb{R}$$

Entonces por la sumabilidad de la serie anterior tenemos que $\{a_n cos(nx) + b_n sen(nx)\} \mapsto 0$. Ahora aplicamos la demostración del teorema anterior para concluir que $a_n cos(nx) + b_n sen(nx) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ donde x es fijo pero arbitrario.
Es decir

$$a_n cos(nx) + b_n sen(nx) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = b_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$$

2.4. Conjuntos de unicidad y extensiones del Teorema de Cantor

2.4.1. Primera extensión del Teorema de Cantor y concepto de Conjunto de unicidad

Cantor extendió su teorema de unicidad en 1871 relajando las hipótesis ligeramente:

Teorema 2.4.1.1 (ver [12], pág 10)
Si tenemos un conjunto finito de $\mathbb{R}, \Theta$, y una serie tal que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \Theta$ entonces

$$c_n = 0 \ , \forall n \in \mathbb{Z}$$

`Demostración`
Sea $x \in \Theta$, como Θ es finito existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x + 2k\pi \notin \Theta$, entonces $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in(x+2k\pi)} = 0 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ esto prueba que la serie se anula en todos los números reales y podemos usar el **Teorema de Unicidad de Cantor 2.3.3** para deducir lo prometido.

■

Definimos por fin el concepto de conjunto de unicidad:

Definición 2.4.1.2 (Conjunto de Unicidad). Sea $E \subsetneq \mathbb{R}$. E es un conjunto de unicidad si para toda serie trigonométrica puntualmente convergente en $\mathbb{R}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ que sume 0 para todo x tal que $x \in \mathbb{R} \setminus E$ se pueda asegurar que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Si E no es un conjunto de unicidad se dice que es un **conjunto de multiplicidad**.

▲

Para tener una visión más práctica de la definición anterior consideremos ahora $\Lambda \subsetneq \mathbb{R}$ un conjunto de unicidad y consideremos ahora una serie trigonométrica puntualmente convergente en $\mathbb{R}$ $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ que suma 0 para todo x con $x \in \mathbb{R} \setminus \Lambda$.
Tenemos entonces de la definición anterior que la anterior serie se anula para todos los valores reales de x y podemos deducir por el Teorema de Cantor de Unicidad que $c_n = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.
A la luz de esta interpretación podemos reformular la definición anterior en términos menos tediosos: *Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto de unicidad si podemos garantizar que si dos series trigonométricas puntualmente convergentes cuyos límites puntuales coinciden en $\mathbb{R} \setminus E$ son idénticas.*

Dicho esto podemos asegurar en virtud del Teorema de unicidad de Gauss que el conjunto vacío es un conjunto de unicidad y usando su versión finitamente mejorada afirmar que cualquier conjunto finito es un conjunto de unicidad.

Viéndolo de otra forma podemos decir que un conjunto E es de unicidad si al considerar dos series trigonométricas podemos prescindir de que coincidan para los valores de $x \in E$ para asegurar la tesis del Teorema de unicidad de Gauss.
Para justificar la definición y disquisición anteriores con un resultado provechoso son necesario pasos previos.

Definición 2.4.1.3 (Orden parcial de un conjunto). Sea S un conjunto no vacío. Un orden parcial en S es una relación binaria $\leq$ que reúne las siguientes características:

$$\begin{aligned} i) &\text{ Es reflexiva: } x \leq x \ \forall x \in S \\ ii) &\text{ Es antisimétrica: } x \leq y \ \wedge \ y \leq x \ \Rightarrow x = y \ \forall x, y \in S \\ iii) &\text{ Es transitiva: } x \leq y \ \wedge \ y \leq z \ \Rightarrow x \leq z \ \forall x, y, z \in S \end{aligned}$$

En estas condiciones la dupla $(S, \leq)$ es un espacio parcialmente ordenado.

▲

Definición 2.4.1.4 (Orden total). Sea S un conjunto no vacío. Un orden total es un orden parcial $\leq$ cumpliendo que dados $x, y \in S$ se tiene que $x \leq y$ o bien $y \leq x$.

En estas condiciones la dupla $(S, \leq)$ es un espacio totalmente ordenado.

▲

Definición 2.4.1.5 (Conjunto bien ordenado). Un conjunto dotado de un orden total $(S, \leq)$ es un conjunto bien ordenado si todo subconjunto A no vacío de S contiene un elemento a tal que:

$$a \leq x \ \forall x \in A$$

▲

Consideremos ahora un conjunto bien ordenado $(S, \leq)$ y consideremos ahora una biyección $\Psi : S \mapsto T$ siendo T otro conjunto. Si definimos una relación binaria $\preccurlyeq$ en T de la siguiente forma:

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \Psi^{-1}(x) \leq \Psi^{-1}(y) \ \forall x, y \in T$$

Claramente el conjunto T dotado de la relación $\preccurlyeq$ es un conjunto bien ordenado. Podemos entonces considerar la relación $\approx$ que identifica los pares de conjuntos bien ordenados para los que existe un isomorfismo que mantenga el orden.
Si pudiéramos resolver el problema de la buena definición del conjunto cociente esbozado anteriormente sería posible definir un ordinal como un representante de una de las clases de equivalencia bajo $\approx$. Pero hay problemas teóricos cuando se considera la ya insinuada relación de equivalencia (Paradoja de Burali-Forti) y por eso a Von Neumann se le ocurrión ofrecer directamente un conjunto de conjuntos ordenados para poder clasificarlos todos bajo isomorfismo.

Definición 2.4.1.6 (Ordinal). Un ordinal es un conjunto Υ no vacío que cumple las siguientes propiedades:

$$i) \text{ Es un conjunto transitivo: } b \in \Upsilon \ \wedge \ c \in b \Rightarrow c \in \Upsilon$$
$$ii) \text{ La relación de pertenencia cumple la ley de la tricotomía: } b \in c \ \vee \ c \in b \ \vee b = c \ \forall b, c \in \Upsilon$$

▲

Es fácil ver que todo subconjunto de un ordinal es un ordinal con el orden de pertenencia. También se da que si α es un ordinal entonces el conjunto $\alpha^{'} = \alpha \cup \{\alpha\}$ es otro ordinal, concretamente es el ordinal con menos elementos distinto de α que lo contiene llamado ordinal siguiente $\left(\alpha^{'} \equiv \alpha + 1\right)$.
Con la definición anterior se puede decir que el conjunto vacío es un ordinal con cero elementos, podemos notar $0_{or} = \emptyset$. Ahora podemos considerar el ordinal siguiente a 0_{or}, $1_{or} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$. Análogamente podemos construir la siguiente secuencia de ordinales haciendo también la siguiente identificación:

$$\begin{gathered}
0_{or} = \emptyset \equiv \{0\} \\
1_{or} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \equiv \{0, 1\} \\
2_{or} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \equiv \{0, 1, 2\} \\
. \\
. \\
. \\
n + 1_{or} = \{n_{or}, \{n_{or}\}\} \equiv \{0, 1, ..., n + 1\} \ n \in \mathbb{N} \\
. \\
. \\
\mathbb{N}_{or} \equiv \{n - 1 : \ n \in \mathbb{N}\}
\end{gathered}$$

Notemos que $\mathbb{N}_{or}$ es el primer ordinal infinito y que podemos seguir ejecutando la misma maniobra para construir nuevos ordinales:

$$\mathbb{N}_{or} + 1 \equiv \{n - 1, \{n - 1 : \ n \in \mathbb{N}\} : \ n \in \mathbb{N}\}$$

Hemos construido una secuencia de ordinales inmediatamente creciente, cabe preguntarse si pueden existir un ordinal tal que no es el siguiente a otro de la secuencia anterior. Si es así diremos que el ordinal en cuestión es un **ordinal límite**.
Consideremos ahora el ordinal Ψ definido como la unión de todos los ordinales numerables. Consideremos ahora el ordinal $\Psi + 1$ (el ordinal siguiente a Ψ). Es claro que $\Psi + 1$ no puede ser numerable puesto que de serlo se tendría entonces que $\Psi + 1 \leq \Psi$. Finalmente si Ψ fuera numerable entonces $\Psi + 1$ también lo sería, concluyendo entonces que Ψ **es un ordinal no numerable.**

Pensando por otra parte que no puede haber un ordinal no numerable menor que Ψ por construcción, podemos darle a Ψ un nombre especial $\Psi \equiv \omega_1$ para resaltar que es el **primer ordinal no numerable.**

$\blacksquare$

Definición 2.4.1.7 (Conjunto derivado de Cantor-Bendixon). Sea $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$. Se define el conjunto derivado en el sentido de Cantor-Bendixon como

$$\Lambda^{'} = \{x \in \Lambda : \exists \; \{\Lambda \setminus \{x\}\} \supseteq \{x_n\} \mapsto x\}$$

Notamos en seguida que $\Lambda^{'}$ es cerrado.

$\blacktriangle$

Definición 2.4.1.8 (Conjunto perfecto). Un conjunto $\Lambda \subseteq \mathbb{R}$ es perfecto si $\Lambda^{'} = \Lambda$.

Usando la inducción transfinita definimos para cada ordinal un conjunto cerrado de la siguiente forma:

Si $\alpha = 0$ (conjunto vacío) definimos $\Lambda^0 = \Lambda$.

$$\Lambda^{\alpha+1} = (\Lambda^{\alpha})^{'}.$$

$$\Lambda^{\beta} = \bigcap_{\alpha<\beta} \Lambda^{\alpha} \text{ si } \beta \text{ es un ordinal límite.}$$

Nótese que si α y β son ordinales con $\alpha \leq \beta$ entonces $\Lambda^{\alpha} \subseteq \Lambda^{\beta}$ haciendo que dispongamos de una colección decreciente de subconjuntos de Λ:

$$\Lambda^0 \supseteq \Lambda^1 \supseteq \Lambda^2 \supseteq ... \supseteq \Lambda^{\beta} \supseteq \Lambda^{\alpha}$$

Estamos ya encondiciones de enunciar el primer lema auxiliar en términos de las definiciones previas.

$\blacktriangle$

Lema 2.4.1.9 (ver [12], pág 11)
Si tenemos una secuencia decreciente de conjuntos cerrados $\{F_{\alpha} : \alpha \textit{ es un ordinal}\}$ existe enconces un ordinal numerable tal que:

$$F_{\alpha_0+1} = F_{\alpha_0}$$

`Demostración`
Fijamos una base de $(\mathbb{R}, \tau_u)$, $\{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ y definimos la colección de conjuntos:

$$A_{\alpha} = \{n \in \mathbb{N} : F_{\alpha} \cap B_n \neq \emptyset\} \textit{ para cada ordinal } \alpha$$

Si tomamos ahora dos ordinales α y β con $\alpha \leq \beta$. Entonces $F_{\beta} \subseteq F_{\alpha}$ y por consiguiente $A_{\beta} \subseteq A_{\alpha}$. Supongamos ahora que $F_{\mu} \setminus F_{\mu+1} \neq \emptyset$ para un ordinal μ numerable fijo y sea $z \in F_{\mu} \setminus F_{\mu+1} = F_{\mu} \cap {F_{\mu+1}}^c \neq \emptyset$. Como ${F_{\mu+1}}^c$ es un abierto existe un abierto básico B_{m_z} con $z \in B_{m_z} \subseteq {F_{\mu+1}}^c$. Entonces m_z no puede estar en $A_{\mu+1}$ por definición pero $m_z \in A_{\mu}$. Acabamos de demostrar pues que:

$$F_{\alpha} \setminus F_{\alpha+1} \neq \emptyset \Rightarrow A_{\alpha} \setminus A_{\alpha+1} \neq \emptyset \; \forall \textit{ ordinal } \alpha$$

Procedamos ahora por reducción al absurdo. Supongamos que $F_\alpha \setminus F_{\alpha+1} \neq \emptyset$ para todo ordinal numerable α, tenemos automáticamente que $A_\alpha \setminus A_{\alpha+1} \neq \emptyset$ para todo ordinal numerable α.
Podemos asignarle entonces a cada ordinal numerable α el número natural $f(\alpha) = min\{A_\alpha \setminus A_{\alpha+1}\}$.
Ahora si α, β son ordinales numerables con $\alpha < \beta$ entonces:

$$A_\beta \subseteq A_{\alpha+1} \subsetneq A_\alpha$$

$$A_{\beta+1} \subseteq A_{\alpha+2} \subsetneq A_{\alpha+1}$$

Si $m = f(\alpha) = f(\beta) \Rightarrow m \in (A_\alpha \setminus \ A_{\alpha+1}) \cap (A_\beta \setminus A_{\beta+1}) = A_\beta \cap {A_{\beta+1}}^c \cap A_\alpha \cap {A_{\alpha+1}}^c = A_\beta \setminus A_{\alpha+1} = \emptyset$

Sólo falta apreciar que el primer ordinal no numerable, ω_1, es el supremo de todos los ordinales numerables y que f es inyectiva para encontrar una contradicción ya que $\mathbb{N}$ es obviamente numerable. Se concluye que $F_{\alpha_0+1} = F_{\alpha_0}$ para cierto cardinal numerable α_0.

Retomando con los conjuntos de unicidad si consideramos un conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}$ existe un cardinal numerable α tal que $E^{\alpha+1} = E^\alpha$ y por la inducción transfinita anterior es fácil ver que $E^\alpha = E^\beta$ para todo $\beta \geqslant \alpha$. Este lema hace posible la siguiente:

■

Definición 2.4.1.10 (Rango de Cantor-Bendixon). Para cada conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}$. El conjunto de los ordinales numerables está bien ordenado y el conjunto $\Theta = \{\alpha \textit{ ordinal numerables} : E^{\alpha+1} = E^\alpha\}$ es no vacío. Se define el rango de Cantor-Bendixon $rk_{CB}(E)$ como el mínimo de Θ. En símbolos:

$$rk_{CB}(E) \equiv min\{\alpha \textit{ ordinal numerable} : E^{\alpha+1} = E^\alpha\}$$

Siguiendo esta línea conceptual se propone también la siguiente notación:

$$E^\infty \equiv E^{rk_{CB}(E)}$$

que pone de manifiesto que el conjunto $E^{rk_{CB}(E)}$ es invariante por la derivación de Cantor-Bendixon. Obviamente E^∞ es perfecto y lo denominamos como el **núcleo perfecto** de E.

▲

Proposición 2.4.1.11 (ver [12], pág 12)Sea $E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado. Entonces E^∞ es el mayor conjunto perfecto contenido en E.
`Demostración`
Supongamos que $\Lambda \subseteq E$ es un conjunto perfecto. Entonces $\Lambda = \Lambda^{'} = \Lambda^{rk_{CB}(E)} \subseteq E^{rk_{CB}(E)} \subseteq E^\infty$ como se quería probar.

■

Lema 2.4.1.12 (ver [12], pág 6)
Si $E \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto cerrado entonces $E \setminus E^{'}$ es un conjunto numerable.
`Demostración`
Primeramente fijamos una base topológica numerable $\{U_n\}$. Si $x \notin E \setminus E^{'}$ entonces no existen sucesiones en $E \setminus \{x\}$ convergentes a x, lo que justifica la existencia de un abierto básico U_k tal que $F \cap U_k = \{x\}$ por lo que $E \setminus E^{'} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F \cap U_n$ por lo que $E \setminus E^{'}$ es numerable.

Corolario 2.4.1.13 (ver [12], pág 12)
Todo conjunto cerrado $E \subseteq \mathbb{R}$ puede expresarse como unión disjunta de un conjunto perfecto y otro numerable.
`Demostración`
A la vista de la proposición anterior podemos escribir:

$$E = E^{\infty} \cup \{E \setminus E^{\infty}\}$$

donde $E \setminus E^{\infty} = \displaystyle\bigcup_{\alpha \leq rk_{CB}} E^{\alpha} \setminus E^{\alpha+1}$ obteniento la tesis deseada.

$\blacksquare$

Ofreciendo una versión más práctica de la derivada de Cantor-Bendixon nos disponemos a encontrar conjuntos con cierto rango de Cantor-Bendixon α. Consideramos el conjunto unitario $C_0 = 0$. No hay duda que $C_0^0 = C_0$ es un conjunto perfecto (cerrado) y que $rk_{CB}(C_0) = 0$.
En segundo lugar consideramos el conjunto $C_1 = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup C_0$. Es claro esta vez que tenemos un conjunto cerradon tal que $C_1^{'} = C_0$ por lo que $rk_{CB}(C_1) = 1$.
Supongamos que definimos por inducción sobre los ordinales numerables los conjuntos C_β con $0 \leq \beta \leq \alpha$ tales que $rk_{CB}(C_\beta) = \beta$ y $C_\beta^{'} = C_{\beta-1}$ para todo $1 \leq \beta \leq \alpha$. Si fijamos un ordinal α podemos definir:

$$C_{\alpha+1} = C_\alpha \cup [\bigcup_{x \in C_\alpha} \{x + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}]$$

y obtenemos un conjunto cerrado. Es fácil ver por la construcción que $C_\alpha = C_{\alpha+1}^{'}$ y en consecuencia $rk_{CB}(C_{\alpha+1}) = rk_{CB}(C_{\alpha+1}) + 1 = \alpha + 1$. Hemos definido para cada ordinal numerable dentro de una extensa colección un conjunto de números reales cuyo rango de Cantor-Bendixon coincida con dicho ordinal justificando satisfactoriamente la definición de dicho rango.

$\blacksquare$

Después de la reunión de los anteriores resultados topándonos en la ruta con la teoría de conjuntos y la teoría del orden estamos en condiciones de enunciar y demostrar un resultado que soluciona modestamente el problema de la unicidad de las expansiones trigonométricas de una función:

2.4.2. El Teorema de unicidad de Cantor-Lebesgue

Teorema de Cantor-Lebesgue 2.4.2.1 (ver [12], pág 11) Todo conjunto cerrado y numerable es un conjunto de unicidad.
`Demostración`
Sea $0 \notin E \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto cerrado numerable y una serie trigonométrica $S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ tal que:

$$S = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ \forall x : x \notin E$$

Claramente podemos suponer que $E \subseteq]0, 2\pi[$. Fijemos ahora un elemento $x_0 \in]0, 2\pi[\cap E^c$. Como $]0, 2\pi[\cap E^c$ es un conjunto abierto existe $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq]0, 2\pi[\cap E^c$. Por el carácter acotado de $]0, 2\pi[$ los números:

$$\delta_{x_0}^{+} = sup\{\beta > 0 :]x_0, x_0 + \beta[\subseteq]0, 2\pi[\cap E^c\}$$

$$\delta_{x_0}^{-} = inf\{\beta > 0 :]x_0 - \beta, x_0[\subseteq]0, 2\pi[\cap E^c\}$$

están bien definidos. Por definición de supremo, ínfimo y abierto es obvio que $\{\delta_x^+, \delta_x^-\} \subseteq \{0, 2\pi\} \cup E$ $\forall x \in]0, 2\pi[\cap E^c$ y :

$$]0, 2\pi[\cap E^c = \bigcup_{x \in]0,2\pi[\cap E^c}]x - \delta_x, x + \delta_x[$$

De ahora en adelante a los intervalos anteriores los llamaremos **intervalos contiguos de E**. Queremos probar ahora que para todo ordinal numerable α se tiene que F_S es lineal en todos los intervalos contiguos de E^α, para ello recurrimos a la inducción transfinita:

Si $\alpha = 0$ entonces $E^\alpha = E^0 = E$ y como $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0$ $\forall x \notin]0, 2\pi[$ entonces F_S es lineal en todos los intervalos contiguos de E^α.

Supongamos ahora que F_S es lineal en todos los intervalos contiguos de E^{α_0}. Sea $]a, b[$ un intervalo contiguo de E^{α_0+1} y sea $[c, d] \subseteq]a, b[$ un intervalo acotado.

$$[c, d] \cap E^{\alpha_0} \subseteq]a, b[\cap E^{\alpha_0} \subseteq E^{\alpha_0} \setminus E^{\alpha_0+1}$$

Y como ya hemos probado en un lema anterior $E^{\alpha_0} \setminus (E^{\alpha_0})' = E^{\alpha_0} \setminus E^{\alpha_0+1}$ es numerable, $[c, d] \cap E^{\alpha_0}$ es numerable también. Si $[c, d] \cap E^{\alpha_0}$ fuera un conjunto infinito existiría una sucesión $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} = [c, d] \cap E^{\alpha_0}$ inyectiva. Por una parte dada la compacidad de $[c, d]$ existe una sucesión parcial de $\{x_n\}$, pongamos $\{x_{\sigma(n)}\}$, que converge a un elemento λ de $[c, d]$. Como $\{x_{\sigma(n)}\}$ es inyectiva también se puede suponer que $\lambda \notin \{x_{\sigma(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ y por lo tanto $\lambda \in E^{\alpha_0+1}$, lo que contradice la hipótesis de que $[c, d] \subseteq \left(E^{\alpha_0+1}\right)^c$. Acabamos de probar que $[c, d] \cap E^{\alpha_0}$ es finito:

$$\{c < x_0 < x_1 < ... < x_n < d\} = [c, d] \cap E^{\alpha_0}$$

Es fácil ver que $]c, x_0[\,,]x_0, x_1[...]x_n, d[$ son intervalos contenidos en intervalos contiguos de E^{α_0} dado el carácter decreciente de dicha secuencia. Por hipótesis de inducción tenemos que F_S es lineal en cada intervalo de $\{]c, x_0[\,,]x_0, x_1[...]x_n, d[\}$. Usando ahora el **Segundo Lema de Riemann 2.2.7** deducimos que F_S es lineal en $[c, d]$ siendo $c, d\ : a < c < d < b$ arbitrarios, lo que nos proporciona finalmente que F_S es lineal en $]a, b[$ cualquier intervalo contiguo de E^{α_0+1} completando la inducción para $\alpha_0 + 1$ siendo α_0 un ordinal arbitrario.

Para completar la última etapa de la inducción transfinita consideramos un ordinal límite λ, según la definición anteriormente dada:

$$E^\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} E^\alpha$$
$$\Downarrow$$
$$\left(E^\lambda\right)^c = \bigcup_{\alpha<\lambda} (E^\alpha)^c$$

De la última igualdad se puede deducir fácilmente que E^λ es un conjunto cerrado. Visto esto podemos considerar $]a, b[$ un intervalo contiguo de E^λ y un intervalo compacto $[c, d] \subseteq]a, b[$. Tenemos entonces:

$$[c, d] \subseteq]0, 2\pi[\setminus E^\lambda =]0, 2\pi[\setminus \bigcap_{\alpha<\lambda} E^\alpha = \bigcup_{\alpha<\lambda} [\ ]0, 2\pi[\setminus E^\alpha]$$

Acabamos de construir un recubrimiento por abiertos del conjunto compacto $[c, d]$ y por tanto podemos extraer un subrecubrimiento finito:

$$[c,d] = \bigcup_{j=1}^{n} [\ ]0,2\pi[\ \setminus E^{\alpha_n}]$$

Podemos tomar ahora un ordinal no límite β tal que $\alpha_j \leq \beta < \lambda : \forall j \in \{1...n\}$ tenemos por la relación de pertenencia que :

$$[c,d] \subseteq]0,2\pi[\ \setminus E^{\beta}$$

Utilizando ahora la primera fase de la inducción obtenemos que F_S es lineal en cualquier intervalo contiguo de E^{β}.

Hemos demostrado que F_S es lineal en cada intervalo contiguo de E^{α} siendo α cualquier ordinal. Ya se demostró anteriormente **(2.4.1.9)** que en estas condiciones que existe un ordinal numerable α_0 tal que E^{α_0} es un conjunto perfecto y numerable.
Si tomamos ahora $\{e_n\} \subseteq E^{\alpha_0} \subseteq]0,2\pi[$ una sucesión de Cauchy. Entonces $\{e_n\} \mapsto L \in]0,2\pi[$ pero como E^{α_0} es un conjunto perfecto obtenemos que $L \in E^{\alpha_0}$, haciendo a E^{α_0} un espacio completo y numerable. Si además hacemos la siguiente observación

$$E^{\alpha_0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} x_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n}\ con\ \left(\overline{x_n}\right)^{o} = \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Deducimos que E^{α_0} es un conjunto numerable y de primera categoría en sí mismo. Si suponemos que E^{α_0} es no vacío podemos usar el **Lema de la Categoría de Baire** para obtener que E^{α_0} es de segunda categoría en sí mismo, por lo que llegamos a una contradicción deduciendo entonces que $E^{\alpha_0} = \emptyset$ (véase [15], pág 62).

Por tanto el conjunto de los intervalos contiguos de E^{α_0} está formado por el intervalo único $]0,2\pi[$ en el que la serie se anulará según la tesis probada anteriormente. Para poner punto y final a esta prueba usamos el Teorema de unicidad de Cantor deduciendo que $c_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, como se quería demostrar.

■

2.4.3. Otras extensiones del Teorema de Cantor y notas finales del capítulo dos

Existen otros resultados en la línea del Teorema de Unicidad de Cantor que precisan de otras hipótesis adicionales sobre las series trigonométricas. Se expondrán a continuación tres de ellos:

Teorema de Vallée Poussin (1912)(ver [17], pág 1)
Sea $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ *una serie trigonométrica. Si existe una función* $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *integrable tal que*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = f(x)\ ,\forall x \in [0,1] \setminus \Lambda$$

donde Λ *es numerable. Entonces* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ *es la Serie de Fourier de* f.

Para apreciar el valor de este último teorema basta con aplicarlo en el caso particular de que $f(x) = 0\ ,\forall x \in [0,1]$ para demostrar el siguiente Corolario.

Corolario 2.4.3.1. Todo conjunto numerable es un conjunto de unicidad.

`Demostración`
Sea $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ una serie trigonométrica y $E \subsetneq \mathbb{R}$ un conjunto numerable tal que

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = 0 \ , \forall x \in \mathbb{R} \setminus E$$

Observamos ahora la siguiente igualdad

$$c_n e^{inx} = [Re(c_n) + iIm(c_n)][cos(nx) + isen(nx)] = [Re(c_n)cos(nx) - Im(c_n)sen(nx)]$$
$$+i[Im(c_n)cos(nx) + Re(c_n)sen(nx)] \ , \forall n \in \mathbb{Z} \ , \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo que nos permite escribir lo siguiente

$$S_m(x) = \sum_{n=-m}^{+m} c_n e^{inx} = Re(c_0) + \sum_{n=1}^{m} [Re(c_n) + Re(c_{-n})]cos(nx) + [-Im(c_n) + Im(c_{-n}]sen(nx)$$

$$+i\left(Im(c_0) + \sum_{n=1}^{m} [Im(c_n) + Im(c_{-n})]cos(nx) + [Re(c_n) - Re(c_{-n})]sen(nx) \right) \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \forall m \in \mathbb{N}$$

Con lo que

$$Re(S_m)(x) = Re(c_0) + \sum_{n=1}^{m} [Re(c_n) + Re(c_{-n})]cos(nx) + [-Im(c_n) + Im(c_{-n}]sen(nx) \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \forall m$$

$$Im(S_m)(x) = Im(c_0) + \sum_{n=1}^{m} [Im(c_n) + Im(c_{-n})]cos(nx) + [Re(c_n) - Re(c_{-n})]sen(nx) \ , \forall x \in \mathbb{R} \ , \forall m$$

Por hipótesis

$$\lim_{m \mapsto +\infty} Re(S_m)(x) = 0 \ , \forall x \in \mathbb{R} \setminus E$$
$$\lim_{m \mapsto +\infty} Im(S_m)(x) = 0 \ , \forall x \in \mathbb{R} \setminus E$$

y aplicando ahora el Teorema de Vallée Poussin a las dos series anteriores con la función nula obtenemos que todos sus coeficientes son nulos:

$$Re(c_0) = Im(c_0) = 0$$
$$Re(c_n) + Re(c_{-n}) = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$-Im(c_n) + Im(c_{-n}) = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$Im(c_n) + Im(c_{-n}) = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$Re(c_n) - Re(c_{-n}) = 0 \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Downarrow$$
$$c_n = 0 \ , \forall n \in \mathbb{Z}$$

■

Teorema de Zygmund (1926)(ver [17], pág 1)

Sea $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ una serie trigonométrica. Entonces para todo $\delta > 0$ existe un conjunto $E \subseteq [0,1]$ con $\mu(E) > 1 - \delta$ tal que si [8]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0 \ , \forall x \in [0,1] \setminus E$$

[8] μ representa aquí la medida de Lebesgue.

$$|a_n| < \varepsilon_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$|b_n| < \varepsilon_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

donde $\{\varepsilon_n\}$ *es una sucesión de números reales positivos decreciente y convergente a* 0. *Entonces*

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0 = b_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Este resultado pone de manifiesto que la propiedad de las sucesiones de coeficientes estén acotadas por una sucesión **decreciente** y **convergente a** 0 nos garantiza que la convergencia a 0 de la serie trigonométrica pueda fallar en un conjunto de medida positiva, lo cual es información mucho más valiosa que la que nos proporcionaba el Teorema de Cantor o sus extensiones anteriormente demostradas. Es importante notar ahora que la hipótesis de que los coeficientes estén acotados por una sucesión convergente a 0 no es restrictivo pues en el **Lema 2.3.2** ya se demuestra que los coeficientes tienden a 0 siempre que la serie converja puntualmente a 0 en un conjunto de medida positiva. Esto lleva a pensar que lo único que marca la diferencia exigir que $\{\varepsilon_n\}$ sea decreciente. Como última nota es interesante recordar que en 1973 Kahane extendió el resultado anterior demostrando que la medida del conjunto E puede ser 1.

Teorema de Kahane (1973)(ver [17], pág 1)

Sea $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx))$ *una serie trigonométrica. Entonces para toda sucesión de números reales positivos decreciente y convergente a* 0 $\{\varepsilon_n\}$ *existe un conjunto* $E \subseteq [0,1]$ *con* $\mu(E) = 1$ *tal que si*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos(nx) + b_n sen(nx)) = 0 \ , \forall x \in [0,1] \setminus E$$
$$|a_n| < \varepsilon_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$
$$|b_n| < \varepsilon_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$a_0 = 0$$
$$a_n = 0 = b_n \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

Para contextualizar la definición de conjunto de unicidad y tener más información sobre qué conjuntos pueden ser candidatos a ser de unicidad se dan a continuación varias observaciones y resultados que versan sobre el carácter general de dichos conjuntos.

Proposición 2.4.3.2 Todo subconjunto de un conjunto de unicidad es también un conjunto de unicidad.
`Demostración` Se deduce trivialmente de la definición de conjunto de unicidad. Supongamos que

$$\Delta \subseteq \Lambda$$

siendo Λ un conjunto de unicidad. Si una serie trigonométrica puntualmente convergente $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ suma 0 para todo x contenido en $\mathbb{R} \setminus \Delta$. Obviamente también $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ suma 0 para todo x contenido en $\mathbb{R} \setminus \Lambda$ y por lo tanto dicha serie se anula en $\mathbb{R}$.

En la sección anterior se observó que conjuntos *pequeños* como los conjuntos numerables son conjuntos de unicidad, la pregunta natural ahora es ¿Cómo de *grandes* pueden ser los conjuntos de unicidad? Un sencillo resultado puede darnos una aproximación bastante informativa

■

Teorema 2.4.3.3 Los conjuntos de unicidad tienen medida de Lebesgue cero (ver [19], página 344).

La proposición anterior arroja luz sobre la cuestión de los conjuntos de unicidad. Ya sabemos que los conjuntos de unicidad tienen medida nula y también sabemos por otra parte que cualquier conjunto numerable es de unicidad.
Teorema 2.4.3.4 Si Λ es un conjunto no numerable y no contiene a ningún conjunto perfecto entonces Λ es un conjunto de unicidad(ver [19], página 344).

Teniendo en cuenta los dos resultados anteriores observamos que entre los conjuntos de unicidad hasta ahora desconocidos (no numerables) están los que no contienen ningún conjunto perfecto. Esto pone de manifiesto el carácter extravagante y disperso de algunos conjuntos de unicidad no numerables.

Teorema 2.4.3.5 Existen conjuntos perfectos de medida nula que son conjuntos de unicidad y existen también conjuntos perfectos de medida nula que son conjuntos de multiplicidad (ver [19], página 344).

Y este resultado nos informa de que el recíproco del teorema anterior es falso. Una vez tomamos conciencia de ciertos rasgos de la naturaleza de los conjuntos de unicidad es buen momento para recordar que la teoría de conjuntos fue creada por Cantor cuando en un intento de solucionar el problema de los conjuntos de unicidad.

Como última nota estableceremos la relación entre el problema de los conjuntos de unicidad y el de la representabilidad mediante un trivial resultado
Teorema 2.4.3.6 Sea $f :]-\pi, \pi[\mapsto \mathbb{R}$ una función y sea

$$\Lambda = f^{-1}(\mathbb{R}^*)$$

Si Λ es un conjunto de unicidad, entonces f no es representable. `Demostración`
Supongamos que una serie trigonométrica S converge a f puntualmente en $]-\pi, \pi[$. Por definición de conjunto de unicidad S debe converger a la función idénticamente nula y nos encontramos con una contradicción.

■

Con esta observación notamos que resolver el problema de decidir si un conjunto es de unicidad o no soluciona parcialmente el problema de decidir si una función es representable o no lo es. Deducimos de esto que por ejemplo la función de Dirichlet no puede ser representable.

3. Series Trigonométricas y unicidad en dimensiones superiores

Se pretende en este último capítulo exponer la definición de Serie Trigonométrica en dimensión mayor que uno, así como describir ciertas nociones de convergencia en dimensiones superiores. También se intentarán coleccionar algunos resultados de unicidad relativos a los conceptos anterior.

3.1. Definición de Series Trigonométricas en dimensiones superiores

Nos disponemos ahora a dar en primer lugar una definición análoga de las Series Trigonométricas en dimensiones superiores. Para enunciar dicha definición es preciso aclarar antes ciertas notaciones un conceptos.

Definición 3.1.1 Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y sea $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Se nota entonces al conjunto $\mathbb{N}_0^d$ como la potencia cartesiana $d-$ésima de $\mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{N}_0^d = \mathbb{N}_0 \times_1 \cdots \times_{d-1} \mathbb{N}_0$$

Si $m \in \mathbb{N}_0^d$ hacemos la notación

$$m = (m_1, \cdots, m_d)$$

Dentro del conjunto $\mathbb{N}_0^d$ destacamos el elemento $\Theta_d = (0_1, 0_2, \cdots, 0_d)$

▲

Proposición 3.1.2 Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y sea $\preceq$ la relación binaria $\mathbb{N}_0^d$ definida por

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0^d \ , \ m \preceq n \Leftrightarrow m_j \leq n_j \ , \forall j \in \{1 \cdots d\}$$

Entonces $\left(\mathbb{N}_0^d, \preceq\right)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
`Demostración`
Fijado $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y $m, n, p \in \mathbb{N}_0^d$ observamos:

$$m_j \leq m_j \ , \forall j \in \{1, ..., d\} \ \Rightarrow m \preceq m \qquad \preceq \ es\ reflexiva$$

$$n \preceq m \ \wedge \ n \preceq m \Leftrightarrow n_j \leq m_j \ \wedge \ m_j \leq n_j, \forall j \in \{1, ..., d\} \Rightarrow m = n \qquad \preceq \ es\ antisimétrica$$

$$n \preceq m \ \wedge m \preceq p \ \Leftrightarrow n_j \leq m_j \leq p_j \ , \forall j \in \{1, \cdots, d\} \Rightarrow n \preceq p \qquad \preceq \ es\ transitiva$$

Se recuerda ahora la base ortonormal de Fourier del conjunto $L^2\left([0,1]\right)$ como la sucesión de funciones $\mathfrak{B}_{[0,1]} = \{t_n \ , \forall n \in \mathbb{N}_0\}$ donde

$$t_0 : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$$

$$t_0(s) = 1 \ , \forall s \in [0,1]$$

$$t_{2n} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$$

$$t_{2n}(s) = \sqrt{2} cos(n\pi s) \ , \forall s \in [0,1] \ \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

$$t_{2n-1} : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$$

$$t_{2n-1}(s) = \sqrt{2} sen(n\pi s) \ , \forall s \in [0,1] \ \ , \forall n \in \mathbb{N}$$

■

Definición 3.1.3 (Base trigonométrica d-dimensional sobre el d-cubo)
Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$. Se define la Base trigonométrica d-dimensional sobre el conjunto $I^d = [0,1] \times_1 \cdots \times_{d-1} [0,1]$ como el siguiente conjunto:

$$\mathfrak{B}_{I^d} = \{t_{d,n} = \prod_{j=1}^{d} t_{n_j} : (n_1, ...n_d) = n \in \mathbb{N}_0^d\}$$

▲

Definición 3.1.4 (Serie trigonométrica d-dimensional en el d-cubo)
Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y sea $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Se define la Serie trigonométrica d-dimensional dada por a como la aplicación $S_{d,a} : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathfrak{F}\left(I^d, \mathbb{R}\right)$[9] definida por

$$S_{d,a}\left(m_1, ..., m_d\right) = \sum_{n_1=0}^{2m_1} \cdots \sum_{n_d=0}^{2m_d} a(n_1, ..., n_d) t_{d,(n_1,...,n_d)} \ , \forall \left(m_1, ..., m_d\right) = m \in \mathbb{N}_0^d$$

Por complitud de este compendio y para dar ejemplos prácticos de la artificiosa definición anterior se extenderá a continuación el concepto de Serie de Fourier para funciones $f : I^d \mapsto \mathbb{R}$, $f \in L^1\left(I^d\right)$.

▲

Definición 3.1.5 (Serie de Fourier para funciones reales integrables en I^d) Sea $f : I^d \mapsto \mathbb{R}$, $f \in L^1\left(I^d\right)$. Se define ahora la aplicación $c : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$c_n = \int_{I^d} f t_n d\lambda \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0^d$$

[10] Se define la Serie de Fourier d-dimensional de f como la serie trigonométrica de dimensión d, $S_{d,c}$.

▲

Una vez definidas las Series Trigonométricas de dimensión $d \geq 2$ tenemos también que precisar en qué sentido vamos a considerar la convergencia puntual de estas. En el caso de una variable este asunto es trivial. Cuando la dimensión no es trivial se comprobará que la forma de extender el concepto de convergencia puntual hará posible la existencia de diferentes resultados de unicidad. (ver [3], pag 3)

Definición 3.1.6(Convergencia rectangular en el d-cubo)
Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Sea también $\emptyset \neq A \subseteq I^d$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$. La Serie Trigonométrica $S_{d,a}$ converge puntualmente a f en A rectangularmente si para todo $x \in A$ se tiene

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \text{mín}\left\{m_1, ..., m_d\right\} > M_\varepsilon \ \Rightarrow \left|S_{d,a}\left(m_1, ..., m_d\right)(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

▲

Definición 3.1.7(Convergencia en el sentido cuadrado en el d-cubo)
Sea $d \in \mathbb{N}$ tal que $d \geq 2$ y $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Sea también $\emptyset \neq A \subseteq I^d$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$. La Serie Trigonométrica $S_{d,a}$ converge puntualmente a f en A en el sentido de Pringsheim si para todo $x \in A$ se tiene

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon \in \mathbb{N} : m > M_\varepsilon \ \Rightarrow \left|S_{d,a}\left(m^{(1)}, ..., m^{(d)}\right)(x) - f(x)\right| < \varepsilon$$

▲

[9]Se usa el símbolo $\mathfrak{F}\left(I^d, \mathbb{R}\right)$ para denotar el conjunto de las funciones reales con I^d como dominio.
[10]Para cada $n \in \mathbb{N}_0^d$, $f t_n \in L^1\left(I^d\right)$ por ser $|f(x) t_n(x)| \leq f(x) \ \forall x \in I^d$.

Definición 3.1.8(Convergencia rectangular restringida en el 2-cubo)
Sea $E \in [1, +\infty[$, $d = 2$ y $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Sea también $\emptyset \neq A \subseteq I^d$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$. La Serie Trigonométrica $S_{d,a}$ converge puntualmente a f en A rectangularmente con según E si para todo $x \in A$ se tiene

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon \in \mathbb{N} : \text{mín}\{N, M\} > M_\varepsilon \ \Rightarrow |S_{d,a}(N, M)(x) - f(x)| < \varepsilon \ \ \forall M, N \in \mathbb{N} : \frac{1}{E} \leq \frac{N}{M} \leq E$$

▲

Definición 3.1.9(Convergencia esférica en el d-cubo) Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Se define el término esférico de radio $r \in \mathbb{N}$ asociado a $S_{d,a}$ como

$$A_r(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0^d :\ \sum_{j=1}^d (n_j)^2 = r} a(n) t_n(x) \quad \forall \ x \in I^d$$

En analogía para cada $R \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define la R-ésima suma parcial esférica asociada a $S_{d,a}$ como

$$Sp_{d,a,R}(x) = \sum_{r=0}^{R} A_r(x)$$

Por último si tenemos un conjunto $\emptyset \neq A \subseteq I^d$ y una función $f : A \mapsto \mathbb{R}$ decimos que $S_{d,a}$ converge a f en A si para todo $x \in A$ se tiene la siguiente propiedad

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon \in \mathbb{N} : m \geq M_\varepsilon \Rightarrow |Sp_{d,a}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

▲

Definición 3.1.10(Convergencia simple en el 2-cubo)
Sea $d = 2$ y $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Sea también $\emptyset \neq A \subseteq I^d$ y $f : A \mapsto \mathbb{R}$. La Serie Trigonométrica $S_{d,a}$ converge puntualmente a f en A simplemente si para todo $x \in A$ se tiene

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ M_\varepsilon \in \mathbb{N} : N > M_\varepsilon \ \Rightarrow \left| \sum_{k=0}^{N} \left(\sum_{m=0}^{k} a(m, k-m) t_{d,(m,k-m)}(x) \right) - f(x) \right| < \varepsilon$$

▲

Después de dotar de varios sentidos a la convergencia de series trigonométricas múltiples es natural plantearse el problema de la unicidad en dimensiones superiores. A poco que se piense para cada definición de convergencia se tendrá un concepto de conjunto de unicidad relativo a dicha convergencia. Ahora se procede a definir una noción de unicidad general

Definición 3.1.11(Conjunto de unicidad d-dimensional relativo a una convergencia puntual)

Una vez establecido un concepto de convergencia U, un conjunto $A \subset I^d$ es un **conjunto de unicidad relativo a la convergencia puntual U** si para toda serie trigonométrica $S_{d,a}$ puntualmente convervente en I^d según U a la función nula en $I^d \setminus A$ se tiene que

$$a_n = 0 \ \ \forall n \in {\mathbb{N}_0}^d$$

En particular $S_{d,a}$ converge según U a la función nula en I^d

▲

3.2. Algunos resultados de unicidad en dimensiones superiores

Una vez nos hemos hecho cargo de definir con rigor lo que es una serie trigonométrica múltiple así como dar posibles nociones sobre su convergencia podemos enunciar algunos resultados sobre unicidad. Dada la alta dificultad de las demostraciones estas se omitirán por exceder el alcance de este trabajo. En primer lugar se exponen varias generaliaciones el **Teorema 2.4.1.1** a las dimensiones mayores.

Teorema 3.2.1 Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y sea $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Si la serie trigonométrica $S_{d,a}$ converge esféricamente a 0 en I^d , entonces

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^d$$

(véase [3])

Teorema 3.2.2 Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y sea $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Si la serie trigonométrica $S_{d,a}$ converge rectangularmente a 0 en I^d , entonces

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^d$$

(véase [3])

Es natural ahora preguntarse si el **Teorema 2.4.1.1** se puede extender también a Series Trigonométricas multidimensionales considerando las otras nociones de convergencia expuestas. Lejos de ser tarea fácil estas cuestiones son todavía
problemas abiertos a día de hoy (ver [3]). Debido a esto hay una nimia diferencia entre la **Definición 2.4.1.2** de conjunto de unicidad unidimensional y la **Definición 3.1.11** de conjunto de unicidad en varias dimensiones. Concretamente se puede observar que en el caso multidimensional se exige que los coeficientes sean todos nulos, sin embargo en el caso de dimensión uno el **Teorema 2.4.1.1** hace equivalentes la nulidad de los coeficientes y el hecho de que la serie trigonométrica converja a la función nula, que es una visión más inspiradora que la primera

Dejamos atrás este asunto para seguir con la exposición de resultados sobre unicidad de series trigonométricas múltiples.

Teorema 3.2.3 Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y sea $a : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$. Si $P \subsetneq I$ un conjunto numerable. Si la serie trigonométrica $S_{d,a}$ converge rectangularmente a una función $f : I^d \mapsto \mathbb{R}$ en $\{I \setminus P\} \times I^{d-1}$ y además existe otra función $\chi : I^d \mapsto \mathbb{R}$, $\chi \in L^1\left(I^d\right)$ tal que

$$f(x) \geq \chi(x) \quad \forall x \in I^d$$

Entonces $f \in L^1\left(I^d\right)$ y además $S_{d,a}$ es la Serie de Fourier d-dimensional de f.

Este resultado tiene una interesante consecuencia que se plasmará en forma de colorario

Corolario 3.2.4 Para todo $d \in \mathbb{N}$ con $d \geq 2$ se tiene que todo conjunto de la forma $P \times \Theta_{d-1} \subset I^d$ tal que $P \subset I$ es un conjunto numerable es un conjunto de unicidad con la convergencia rectangular.

`Demostración`

Basta con aplicar el **Teorema 3.2.3** con $f \equiv 0$, $\chi \equiv 0$ y P un subconjunto numerable arbitrario de I^d junto con la definición de Serie de Fourier múltiple para deducir el resultado deseado.

■

Teorema 3.2.5 Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y sea $\varepsilon : \mathbb{N}_0^d \mapsto \mathbb{R}$ cumpliendo la siguientes condiciones

$$\varepsilon_n < \varepsilon_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0^d : n_j > m_j \ \forall j \in \{1, ..., d\}$$

$$\forall \delta > 0 \quad \exists n_\delta \in \mathbb{N}_0^d : |\varepsilon_m| < \delta \qquad \forall m \in \mathbb{N}_0^d : m \geq n_\delta$$

$$|a_n| \leq \varepsilon_n \ \forall n \in {\mathbb{N}_0}^d$$

Entonces existe un conjunto $E_\varepsilon \subsetneq I^d$ tal que $\mu_d(E_\varepsilon) = 1$ [11] tal que si una serie trigonométrica d-dimensional $S_{d,a}$ converge rectangularmente a la función nula en $I^d \setminus E_\varepsilon$ se tiene que

$$a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0^d$$

El **Teorema 3.2.5** extiende al **Teorema de Kahane** expuesto en la sección 2.4. . De nuevo se deduce la existencia de subconjuntos vastos de I^d para los cuales las series trigonométricas múltiples cuyos coeficientes satisfagan condiciones de decrecimiento y desvanecimiento cumplen la condición de conjunto de unicidad con la convergencia rectangular. Para más información de estos dos resultados, consúltese [17].Se dará por último un resultado relacionado con la unicidad para la convergencia esférica no sin antes definir un par de conceptos necesarios.

Definición 3.2.6 (Serie sumable (C, k))
Sea $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Sea S una serie de números reales notando a S_n la n-ésima suma parcial de S para cada $n \in \mathbb{N}$. Se definen ahora las siguientes sucesiones de números reales:

$$\mathcal{S}_n^0 = S_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{S}_n^k = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{S}_j^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{A}_n^0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\mathcal{A}_n^k = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j^{k-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Decimos que S es sumable en el sentido (C, k) si

$$\exists \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\mathcal{S}_n^k}{\mathcal{A}_n^k} = s$$

Siendo su k-suma el número real s. En particular una serie S es sumable $(C, 1)$ si

$$\exists \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} S_j}{n} = s$$

▲

Definición 3.2.7(Serie de funciones sumable (C, k)) Sea un conjunto no vacío A y sea $\{f_n : A \mapsto \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones. $\{f_n : A \mapsto \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$ es sumable (C, k) si para todo $x \in A$ se tiene que

$$\exists \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\mathcal{S}_n^k(x)}{\mathcal{A}_n^k} = s(x)$$

Siendo $s : A \mapsto \mathbb{R}$ la k-suma de $\{f_n : A \mapsto \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

[11] Con $\mu_d(E_\varepsilon)$ expresa la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$ del conjunto E_ε

▲

Para más detalles de estos dos conceptos consúltese [19], página 78.

Finalmente se da un resultado que proporciona información del concepto de unicidad según la convergencia esférica:
Teorema 3.2.8 Sea $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que $d \geq 2$ y $S_{d,a}$ una serie trigonométrica d-dimensional cumpliendo las dos siguientes condiciones
$i)$ La serie de funciones $\sigma_n : I^d \mapsto \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ definida por

$$\sigma_n(x) = \sum_{r=1}^{n} \frac{A_r(x)}{r},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

es uniformemente convergente.
$ii)$ $Sp_{d,a,R}$ es sumable en el sentido $(C,1)$ siendo su 1-suma la función nula.

Entonces

$$a_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}_0^d$$

ver [14], página 339.

Teorema 3.2.9 Todo conjunto numerable es de unicidad según la convergencia esférica (ver [4], página 23).

Referencias

[1] Acosta M., Aparicio C., Moreno A., Villena A. *Apuntes de Análisis Matemático I*, Universidad de Granada, 2006 ,`http://www.ugr.es/~dpto_am/miembros/aparicio/apuntes/apuntes-an-mat-i-1-11-06.pdf`

[2] Apostol T. *Análisis Matemático*, 1996, Editorial Reverté.

[3] Ash J. M. *A survey of multidimensional generalizations of Cantor's Uniqueness Theorem for Trigonometric Series*, 2000, `http://condor.depaul.edu/mash/UniqMTSSurvey.pdf`.

[4] Ash J. M., Gang Wang. *Uniqueness Questions for Multiple Trigonometric Series*, Contemporary Mathematics,1991 `http://condor.depaul.edu/mash/UniqueQuestsMTS.pdf`.

[5] Bernoulli D. *Réflections et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes*, 1753, `http://www.lpma-paris.fr/pageperso/mazliak/Daniel_Bernoulli_1753.pdf`.

[6] Cañada A. *Series de Fourier y Aplicaciones*,2002 Ediciones Pirámide.

[7] Carleson L. *On the convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Math. 116, 135-137, 1966.

[8] D'Alembert J. *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration*, 1747, `https://books.google.es/books?id=lJQDAAAAMAAJ&pg=PA214&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false`.

[9] Dirichlet P. *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, 1829, `https://books.google.de/books?id=ZKwGAAAAYAAJ&hl=en%20&pg=PA157#v=onepage&q&f=false`

[10] Euler L. *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1749, `http://www.17centurymaths.com/contents/introductiontoanalysisvol1.htm`.

[11] Fourier J. *Théorie analytique de la chaleur*, 1822, `https://books.google.fr/books?id=TDQJAAAAIAAJ&printsec=frontcover&hl=es&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false`

[12] Kechris A. , *Set theory and uniqueness for trigonometric series*, 1993, Department of Mathematics Caltech, Pasadena.

[13] Marshall J., Welland V. *Convergence, Sumability and Uniqueness of Multiple Trigonometric Series*, 1970, Bulletin of the American Mathematical Society.

[14] Ming-Teh Cheng. *Uniqueness of Multiple Trigonometric Series*, 1949, Annal of Mathematics, Vol. 52, No. 2, September, 1950, `http://www.jstor.org/stable/1969476`.

[15] Payá R. *Apuntes de Análisis funcional*, Universidad de Granada, 2011 `https://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Analisis_Funcional_Paya.pdf`

[16] Pinsky M. *Introducccíón al análisis de Fourier y las ondoletas* 2003, Editorial Thompson.

[17] Tetunashvili Sh. T. *Uniqueness of Multiple Trigonometric Series*, 1995 Georgian State University.

[18] Van Vleck E. *The Influence of Fourier's Series upon the Development of Mathematics* Science, New Series, Vol. 39, No. 995 (Jan. 23, 1914), pp. 113-124, `http://www.jstor.org/stable/1640940`

[19] Zygmund. A. *Trigonometric Series, Third Edition*, Cambrigde Mathematical Library, 1935.