



UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS

Departamento de Análisis Matemático
Curso 2022-2023

ENSAYOS DE VISUALIZACIÓN EN ANÁLISIS DE FOURIER

Trabajo Fin de Grado realizado por:
Víctor Ávila Villena

Tutorizado por:
Antonio Cañada Villar

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Víctor Ávila Villena

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2022-2023, es original, entendida ésta, en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 18 de Junio de 2023

Fdo: Víctor Ávila Villena

Índice general

Introducción	1
Summary	5
1. Ensayos de visualización sobre la regularidad de una función y la convergencia de su serie de Fourier.	9
1.1. Conceptos previos sobre series de Fourier.	9
1.2. Elaboración de prácticas con funciones concretas.	11
1.2.1. Función escalonada.	12
1.2.2. Función valor absoluto.	15
1.2.3. Funciones polinómicas pares ($f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots$).	19
1.3. Confirmación de las intuiciones propuestas.	26
2. Ensayos de visualización sobre el fenómeno de Gibbs.	29
2.1. Elaboración de prácticas con funciones concretas.	29
2.1.1. Función escalonada.	29
2.1.2. Funciones polinómicas impares ($f(x) = x, x^3, x^5$).	30
2.2. Confirmación de las intuiciones propuestas.	36
3. Ensayos de visualización sobre el teorema de inversión de la transformada de Fourier.	41
3.1. Conceptos previos sobre la transformada de Fourier.	41
3.2. Elaboración de prácticas con funciones concretas.	42
3.2.1. Función característica.	43
3.2.2. Función $f(x) = e^{-4\pi x }$	44
3.2.3. Función $f(x) = e^{-\pi x^2}$	46
3.3. Confirmación de las intuiciones propuestas.	47
3.4. Teorema de inversión de la transformada de Fourier.	49

Introducción

Como se planteaba en la propuesta de este trabajo, el objetivo principal es visualizar algunos conceptos del análisis de Fourier, que puede ayudar a entender más fácilmente el desarrollo teórico posterior. Pero, ¿qué significa visualizar? Si nos vamos a la definición de la RAE, en una de sus acepciones el término “visualizar” se define como “formar en la mente una imagen visual de un concepto abstracto”, y ese es el objetivo que se ha seguido a la hora de realizar este trabajo, es decir, visualizando gráficas de funciones concretas vamos a tratar de intuir algunos resultados que posteriormente confirmaremos o rechazaremos con el rigor matemático necesario y utilizando la bibliografía citada.

Dentro de las numerosas ramas de las matemáticas, nos quedamos con el análisis de Fourier, ya que se estudia en el grado en la asignatura “Análisis de Fourier” y se apoya indudablemente en otras asignaturas como son “Análisis Matemático I y II”, “Variable Compleja” y “Análisis Funcional” entre otras; y dentro de los amplios programas informáticos que podemos utilizar, también nos quedaremos con uno que se estudia en el grado, el programa “Matemática”, parte del temario de la asignatura “Métodos Numéricos I”.

Una vez elegidos el tema y el programa que vamos a utilizar, tenemos que concretar un poco más sobre los objetivos de este trabajo, que según la propuesta son los siguientes:

- Ensayos de visualización sobre la regularidad de una función y la convergencia de su serie de Fourier.
- Ensayos de visualización sobre el fenómeno de Gibbs.
- Ensayos de visualización sobre el teorema de inversión de la transformada de Fourier.

Así que este trabajo se ha dividido en 3 capítulos cuyos títulos coinciden con los 3 objetivos de la propuesta. Veamos de forma más detallada el contenido de cada uno de estos capítulos.

1. Ensayos de visualización sobre la regularidad de una función y la convergencia de su serie de Fourier.

En este capítulo trataremos de visualizar cómo puede afectar a la convergencia de la serie de Fourier (la cual se define en una breve introducción al comienzo del capítulo) la regularidad de la función. Para ello hemos utilizado [2],[6] y [3].

Veremos 3 ejemplos, el primero de ellos en el que la función tiene una clara discontinuidad de salto en un punto, en el cual la serie de Fourier converge pero lo hace al punto medio del salto, y veremos como con el criterio de Dini podemos darle una posterior explicación. En el segundo ejemplo utilizaremos la función valor absoluto, que como sabemos, es continua en todo el intervalo pero que tiene un punto en el que no es derivable, observaremos cómo parece que en este punto la serie de Fourier acaba convergiendo pero lo hace más lentamente que en el resto de puntos, y efectivamente después enunciaremos un resultado que confirma nuestra teoría. Y para finalizar, en el tercer ejemplo veremos cómo el fenómeno que acabábamos de observar cuando faltaba regularidad en un punto también podía darse a la hora de periodificar una función (Ya que la serie de Fourier se define para funciones periódicas), por ejemplo, las funciones polinómicas pares, las cuales al periodificarlas pierden la regularidad en el punto de unión entre los periodos.

Por último, se añade una breve anotación sobre la no convergencia de la serie de Fourier de algunas funciones.

2. Ensayos de visualización sobre el fenómeno de Gibbs.

En este segundo capítulo nos hemos centrado en un fenómeno que ocurre en las series de Fourier cuando la función presenta una discontinuidad de salto, así que tomando el ejemplo nuevamente de la función escalonada del capítulo 1 junto con las periodificaciones de las funciones polinómicas impares, las cuales presentan también una discontinuidad, hemos podido observar el conocido como “Fenómeno de Gibbs”.

Este es el motivo por el cual en los puntos de discontinuidad las series de Fourier convergen a un segmento vertical el cual se puede calcular ya que se conoce que es de longitud casi un 18% mayor que el salto de la discontinuidad. Para ello se ha hecho uso en su mayoría de [7] y [9].

3. Ensayos de visualización sobre el teorema de inversión de la transformada de Fourier.

En este último capítulo nos trasladaremos de las series de Fourier a la transformada de Fourier, dejando atrás las periodificaciones en todo \mathbb{R} y

trabajando ahora con funciones integrables.

Basándonos principalmente en [4] y [5], haremos uso de 3 ejemplos fundamentales, una función característica, y dos funciones exponenciales $f_1(x) = e^{-4\pi|x|}$ y $f_2(x) = e^{-\pi x^2}$. Visualizaremos sus gráficas y calcularemos su transformada de Fourier aportando de nuevo algunas intuiciones que posteriormente concretaremos con algunos resultados matemáticos, como por ejemplo que la transformada de Fourier siempre es continua, el lema de Riemann-Lebesgue o algunas propiedades con respecto a la relación entre la transformada de una función y la transformada de su derivada.

Posteriormente, con la ayuda nuevamente de [4] y [8] estudiaremos el conocido como “Teorema de Inversión de la transformada de Fourier”, el cual nos devuelve la función original a partir de la transformada, aunque bajo ciertas condiciones. Lo visualizaremos y lo aplicaremos a los 3 ejemplos anteriores. Además comprobaremos con un ejemplo que sus condiciones son suficientes pero no necesarias.

Una vez desarrollados estos 3 capítulos creo que quedan totalmente cubiertos los objetivos de la propuesta, basándonos en la bibliografía mencionada y con la ayuda de mi tutor D. Antonio Cañada Villar.

Summary

The objectives of this project, according to the original proposal, are as follows:

- Visualization experiments on the regularity of a function and the convergence of its Fourier series.
- Visualization experiments on the Gibbs phenomenon.
- Visualization experiments on the inverse theorem of the Fourier transform.

Therefore, this project has been divided into three chapters whose titles correspond to the three objectives of the proposal. Let's take a closer look at the content of each of these chapters:

Visualization experiments on the regularity of a function and the convergence of its Fourier series.

In this chapter, we will try to visualize how the regularity of a function can affect to the convergence of its Fourier series (which is defined in a brief introduction at the beginning of the chapter). For this purpose. We have used references such as [2], [6], and [3].

We will present three examples. The first example involves a function with a clear jump discontinuity at a point. The Fourier series converges to the midpoint of the jump, and we will use Dini's criterion to provide further explanation. In the second example, we will use the absolute value function, which is continuous throughout the interval but not differentiable at a specific point. We will observe that the Fourier series seems to converge at this point, but at a slower rate than at other points. We will then present a result that confirms our observation. Finally, in the third example, we will see how the lack of regularity at a point can also occur when periodizing a function (since the Fourier series is defined for periodic functions). For instance, we will consider even polynomial functions, which lose regularity at the junction point between the periods.

Additionally, a brief note will be included about the non-convergence of the Fourier series for some functions.

Visualization experiments on the Gibbs phenomenon.

In this second chapter, we focus on a phenomenon that occurs in Fourier series when a function has a jump discontinuity. Taking the example of the step function from Chapter 1, along with the periodizations of odd polynomial functions (which also have a discontinuity), we will observe the phenomenon known as the “Gibbs phenomenon”. This phenomenon causes the Fourier series to converge to a vertical segment at the points of discontinuity. The length of this segment can be calculated and is known to be approximately 18% larger than the jump of the discontinuity. The references mainly used for this chapter are [7] and [9].

Visualization experiments on the inverse theorem of the Fourier transform.

In this final chapter, we will transition from Fourier series to the Fourier transform, leaving behind the periodicity in \mathbb{R} and working only with integrable functions.

Based primarily on [4] and [5], we will use three fundamental examples: a characteristic function and two exponential functions, $f_1(x) = e^{-4\pi|x|}$ and $f_2(x) = e^{-\pi x^2}$. We will visualize their graphs and calculate their Fourier transforms, providing some intuitions that will later be concretized with mathematical results. For example, we will state that the Fourier transform is always continuous and discuss the Riemann-Lebesgue lemma and some properties regarding the relationship between the transform of a function and the transform of its derivative. Subsequently, with the help of [4] and [8], we will study the well-known “Inverse Theorem of the Fourier Transform”, which allows us to recover the original function from its Fourier transform under certain conditions. We will visualize and apply this theorem to the three previous examples. Furthermore, we will verify with an example that its conditions are sufficient but not necessary.

Once these three chapters have been developed, I believe that all the objectives of the proposal are fully addressed, relying on the mentioned bibliography and with the guidance of my tutor, Antonio Cañada Villar.

Capítulo 1

Ensayos de visualización sobre la regularidad de una función y la convergencia de su serie de Fourier.

A lo largo de este capítulo veremos cómo puede afectar a la serie de Fourier de una función la regularidad de esta. Primero visualizaremos algunas gráficas que nos ayudarán a intuir ciertos resultados que posteriormente podremos confirmar o rechazar haciendo uso de la bibliografía citada.

1.1. Conceptos previos sobre series de Fourier.

En primer lugar veamos algunas definiciones y resultados previos sobre series de Fourier. En este apartado han sido utilizados los apuntes del profesor Sergio Cruz Blázquez a modo de resumen teórico sobre el análisis de Fourier [2]. Estos apuntes están basados en las clases impartidas por el profesor Antonio Cañada Villar, de la asignatura “Análisis de Fourier” durante el curso 2015/2016.

Definición 1.1.1 Para $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se define el espacio de funciones $L^2(a, b)$ como $L^2(a, b) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ medibles t.q. } \int_a^b (f(x))^2 dx \text{ existe en el sentido de Lebesgue y es finita}\}$.

Definición 1.1.2 (Producto escalar) Para cada par $(f, g) \in L^2(a, b) \times L^2(a, b)$ definimos el producto escalar como

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

Definición 1.1.3 (Base Hilbertiana) Diremos que un subconjunto ortonormal de $L^2(a, b)$ al que denotaremos $\mathbb{B} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de

1.1. CONCEPTOS PREVIOS SOBRE SERIES DE FOURIER.

$L^2(a, b)$ cuando se cumpla que

$$\forall f \in L^2(a, b), f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, f_n \rangle f_n$$

Entendiendo la convergencia de esta serie con la norma derivada del producto escalar anteriormente definido.

Teorema 1.1.4 (Teorema de Lebesgue) El conjunto formado por

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n \cdot), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n \cdot) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base hilbertiana de $L^2(-\pi, \pi)$.

De dicho teorema podemos obtener el siguiente corolario:

Corolario 1.1.5 El conjunto formado por

$$\{1, \cos(n \cdot), \operatorname{sen}(n \cdot) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

es una base hilbertiana ortogonal de $L^2(-\pi, \pi)$. Esta base se conoce como “Base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$ ”

Ahora estamos preparados para definir el desarrollo en serie de Fourier de una función:

Definición 1.1.6 Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Se denomina desarrollo en serie de Fourier a la expresión de f en la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$ (Definida anteriormente):

$$SF(f) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n \cdot) + B_n \operatorname{sen}(n \cdot))$$

Donde A_n y B_n son los coeficientes de Fourier respecto de la base citada y se definen como:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Dada esta definición veamos como consecuencia una proposición (Identidad de Parseval) y un corolario de esta.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Proposición 1.1.7 (*Identidad de Parseval para bases ortogonales*) Si $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base ortogonal de $L^2(a, b)$ entonces:

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, f_n \rangle^2}{\langle f_n, f_n \rangle} \quad \forall f \in L^2(a, b)$$

Corolario 1.1.8 si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ entonces:

$$\|f\|^2 = \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \right)$$

con A_n y B_n coeficientes de Fourier de f en la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$. En consecuencia la serie $\sum_{n \geq 1} (A_n^2 + B_n^2)$ es convergente.

Definición 1.1.9 (*Periodificación de una función*) Sea $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y sean los coeficientes de la serie de Fourier A_n y B_n . Claramente existe una función $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ medible y 2π -periódica tal que

$$F(x) = f(x) \quad \forall x \in]-\pi, \pi[$$

y evidentemente los coeficientes de Fourier de f son iguales a los de $F \forall n \in \mathbb{N}$ y la serie de Fourier de f es por tanto la restricción al intervalo $[-\pi, \pi]$ de la serie de Fourier de F . A dicha función F se le denomina periodificación de f .

Todo lo referente a las series de Fourier que utilizaremos será en un intervalo $[-\pi, \pi]$ y con la base trigonométrica de $L^2(-\pi, \pi)$, pero merece la pena mencionar que esto es extensible a cualquier intervalo $[a, b]$ de forma que podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 1.1.10 *El siguiente conjunto es una base de $L^2(a, b)$:*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \sqrt{\frac{2}{b-a}} \cos \left(\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \right), \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin \left(\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

1.2. Elaboración de prácticas con funciones concretas.

En este apartado veremos el comportamiento de diversas funciones ante el desarrollo de su serie de Fourier. Para ello utilizaremos el programa Mathematica. A lo largo de todo el capítulo representaremos siempre la función en azul y su serie de Fourier en morado.

1.2.1. Función escalonada.

En primer lugar vamos a utilizar una función escalonada, en este caso la más elemental que se nos ocurre, una función que tenga valor 0 en el intervalo $[-\pi, 0)$ y 1 en el intervalo $[0, \pi)$. La introducimos en el programa Mathematica:

```
f[x_] := Which[-Pi ≤ x < 0, 0, 0 ≤ x < Pi, 1]
```

Podemos pedir al programa la gráfica de dicha función, que será la siguiente:

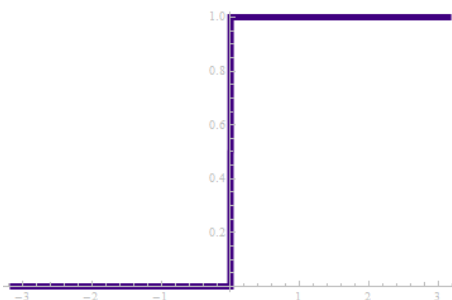


Figura 1.1: Gráfica de la función escalonada con valores 0 y 1.

Merece la pena señalar que la línea vertical que se visualiza uniendo ambos trozos de nuestra función realmente no debería aparecer, pero el programa Mathematica la añade y no nos influye en nuestro estudio, por lo que simplemente no la tendremos en cuenta.

A continuación vamos a definir en el programa los coeficientes de Fourier para una función genérica en el espacio $L^2(-\pi, \pi)$:

```
a0 = (1 / Pi) Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]
a[n_] = (1 / Pi) Integrate[f[x] * Cos[n * x], {x, -Pi, Pi}]
b[n_] = (1 / Pi) Integrate[f[x] * Sin[n * x], {x, -Pi, Pi}]
```

Además le podemos pedir al programa que los calcule para nuestra función escalonada $f(x)$:

```
1
Sin[n π]
n π
1 - Cos[n π]
n π
```

Observamos que cuando n es un número par, los coeficientes de Fourier son ambos cero, por tanto las sumas parciales cuando n sea un número par coincidirán con la suma parcial anterior, este hecho lo observaremos a continuación

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

cuando calculemos las primeras sumas parciales de la serie de Fourier, las cuales definimos como:

$$\text{SumParc}[x_, 0] = (a_0 / 2)$$

$$\text{SumParc}[x_, n_] = (a_0 / 2) + \text{Sum}[a[k] \text{Cos}[k * x] + b[k] \text{Sin}[k * x], \{k, 1, n\}]$$

Visualicemos ahora en una misma gráfica la función con la que estamos trabajando (de color azul) y las tres primeras sumas parciales de su serie de Fourier (de color morado):

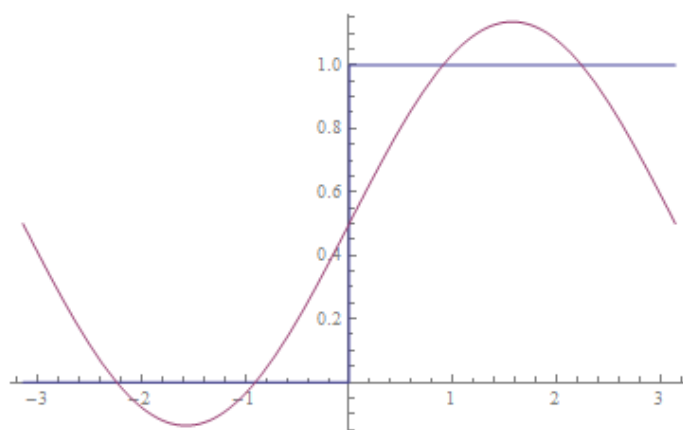


Figura 1.2: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=1$.

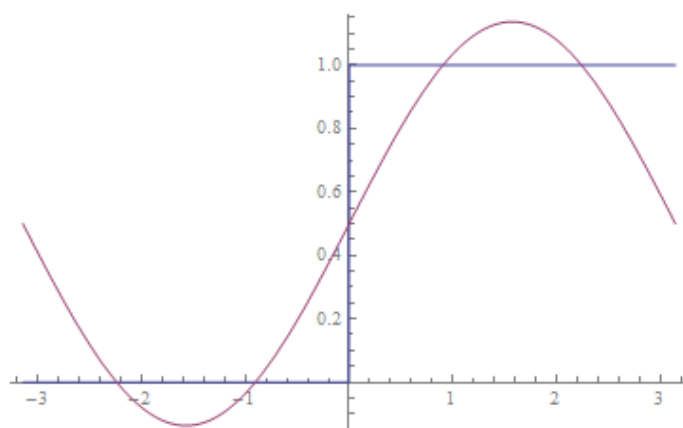


Figura 1.3: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=2$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

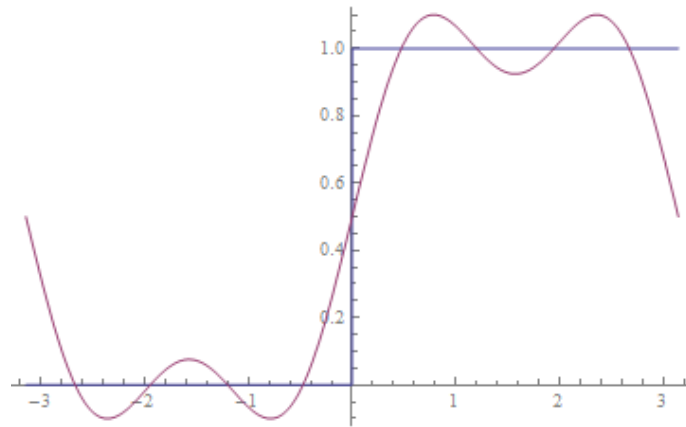


Figura 1.4: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=3$.

Para visualizar mejor cómo sería la serie de Fourier de esta función, veamos la gráfica de las sumas parciales cuando $n=10$ y $n=20$:

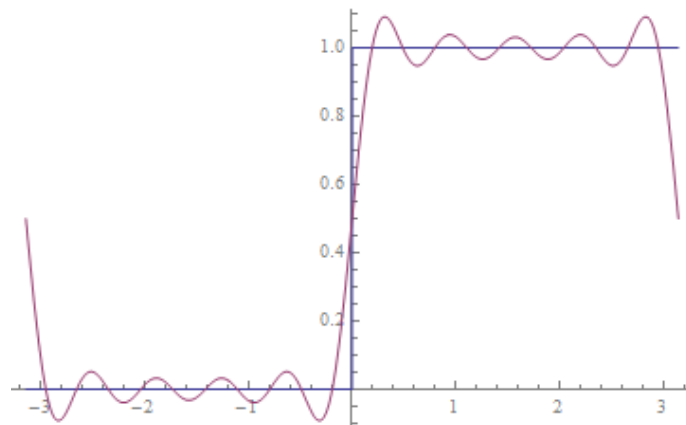


Figura 1.5: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=10$.

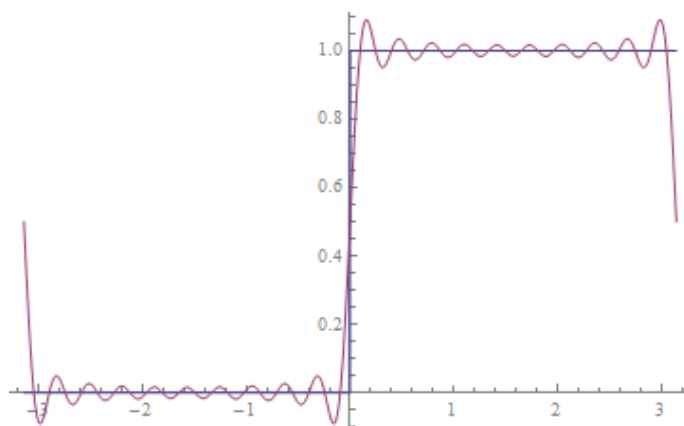


Figura 1.6: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=20$.

Observaciones que se intuyen en la función escalonada.

Tras visualizar las gráficas podemos concluir que en los intervalos abiertos $(-\pi, \pi)$ no hay problemas en la convergencia de la serie de Fourier. Por otro lado en el punto $x=0$ donde la función tiene una discontinuidad de salto la serie de Fourier converge a $\frac{1}{2}$, es decir, no converge al valor que tiene la función en ese punto, sino que converge al punto medio entre los límites laterales de la función en dicho punto.

Otro fenómeno que observamos en las gráficas es cómo en un entorno de la discontinuidad, es decir en un entorno de $x=0$, las sumas parciales muestran oscilaciones entre los valores reales de la función, es decir “se pasan” tanto por arriba como por abajo de la función. Este fenómeno lo observaremos nuevamente y lo estudiaremos con detenimiento en el segundo capítulo: “Ensayos de visualización sobre el fenómeno de Gibbs.”

1.2.2. Función valor absoluto.

Vamos a repetir el mismo proceso que con la función escalonada pero esta vez con la función valor absoluto $f(x) = |x|$, en primer lugar la introducimos en el programa:

```
f[x_] := Abs[x]
```

De nuevo vamos a pedir poder visualizar su gráfica:

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

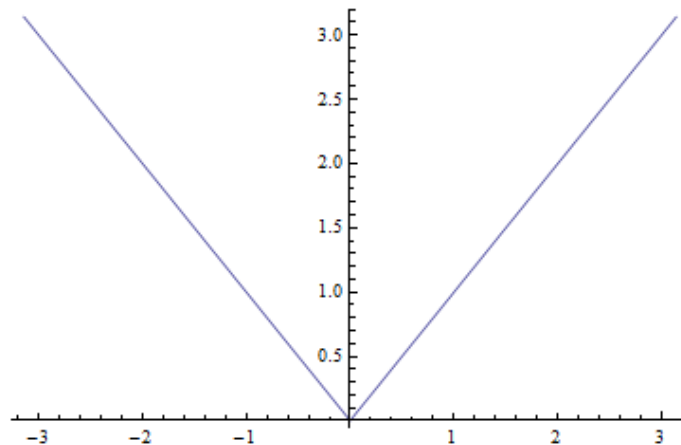


Figura 1.7: Gráfica de la función valor absoluto.

Ya tenemos los coeficientes de Fourier definidos en el programa por el apartado anterior, ahora podemos calcularlos para esta nueva función:

```
a0 = (1 / Pi) Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]
a[n_] = (1 / Pi) Integrate[f[x] * Cos[n * x], {x, -Pi, Pi}]
b[n_] = (1 / Pi) Integrate[f[x] * Sin[n * x], {x, -Pi, Pi}]

π


$$\frac{2 (-1 + \cos[n \pi] + n \pi \sin[n \pi])}{n^2 \pi}$$


0
```

Tenemos también definidas en el programa las sumas parciales de la correspondiente serie de Fourier, así que de nuevo podemos visualizar en una misma gráfica las primeras sumas parciales y la función valor absoluto para compararlas, observando de nuevo que cuando n sea par los coeficientes son ambos cero, así que volveremos a ver cómo las gráficas cuando n es un número par coinciden con la anterior.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

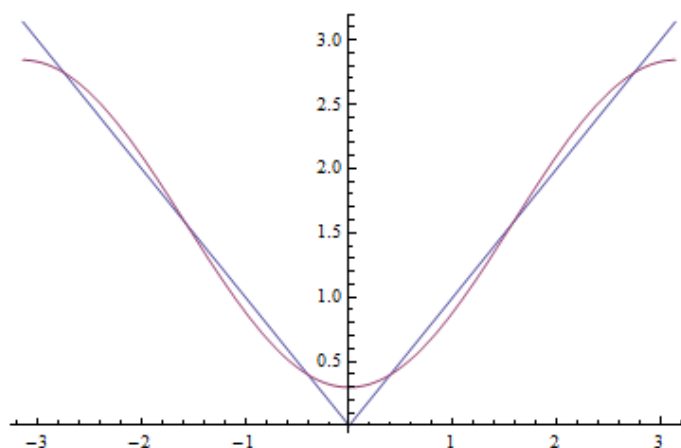


Figura 1.8: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=1$.

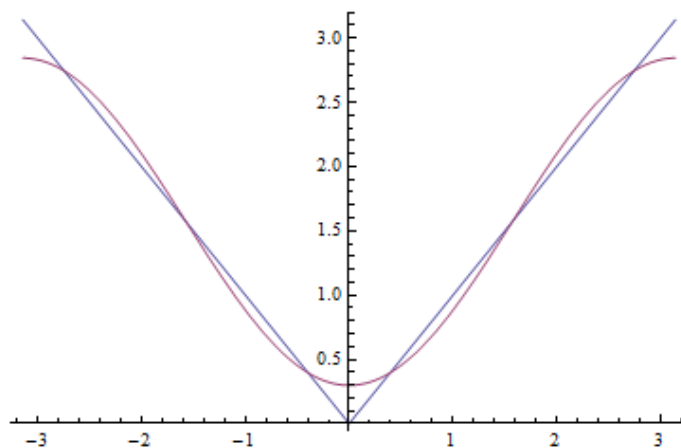


Figura 1.9: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=2$.

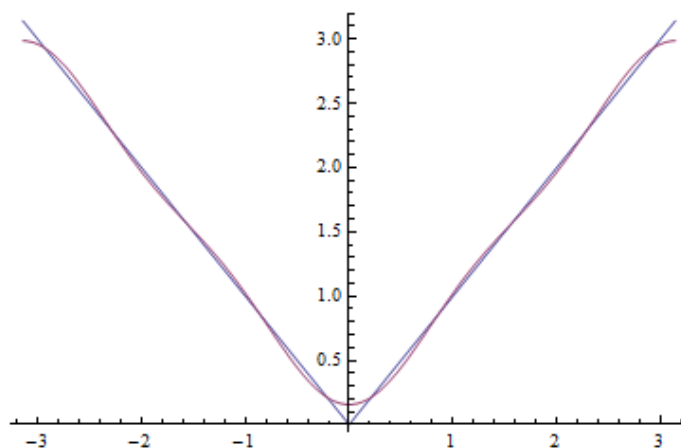


Figura 1.10: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=3$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Para visualizar mejor la serie de Fourier veamos las sumas parciales cuando $n=10$ y cuando $n=20$:

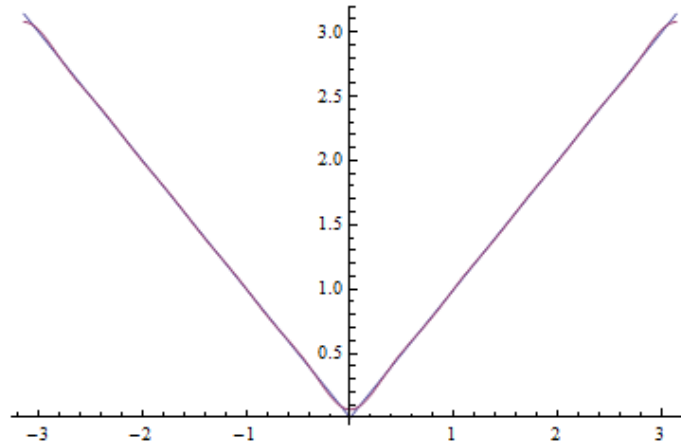


Figura 1.11: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=10$.

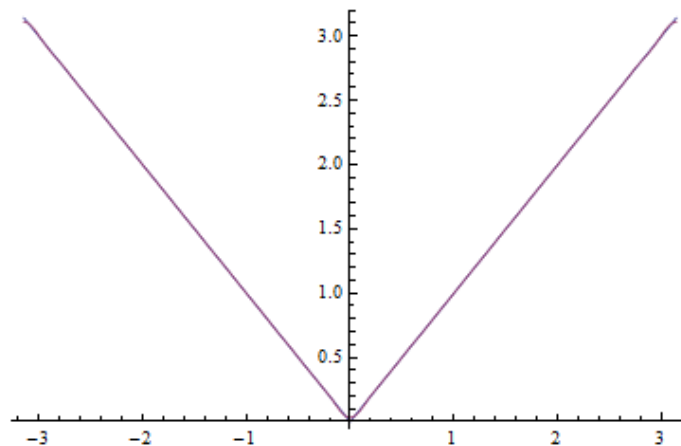


Figura 1.12: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=20$.

En esta última gráfica se superponen la función y la suma parcial cuando $n=20$ pero son prácticamente indistinguibles.

Observaciones que se intuyen en la función valor absoluto.

A diferencia del apartado anterior cuando trabajábamos con la función escalonada en la que encontrábamos una clara discontinuidad de salto, en este caso la función es continua, aun así, podemos observar como la convergencia de la serie de Fourier es más lenta en el punto $x=0$ (en el que como sabemos la función no es derivable), aun que como observamos en la gráfica de la suma

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

parcial cuando $n=20$, en la figura 1.12, la serie de Fourier finalmente converge en cada punto a la función $f(x)$. Es decir, en este caso hay convergencia de la serie de Fourier a la función $f(x)$ pero esta parece “más rápida” en los puntos donde la función “es mejor”, es decir, en los puntos donde la función es además de continua, derivable.

Vemos que también se intuye una convergencia peor en los extremos, donde se perdería también la derivabilidad al hacer una extensión 2π -periódica aunque esto lo desarrollaremos mejor en el siguiente ejemplo.

1.2.3. Funciones polinómicas pares ($f(x) = x^2, x^4, x^6, \dots$).

De nuevo volvemos a actuar igual que en los apartados anteriores, vamos a visualizar las gráficas:

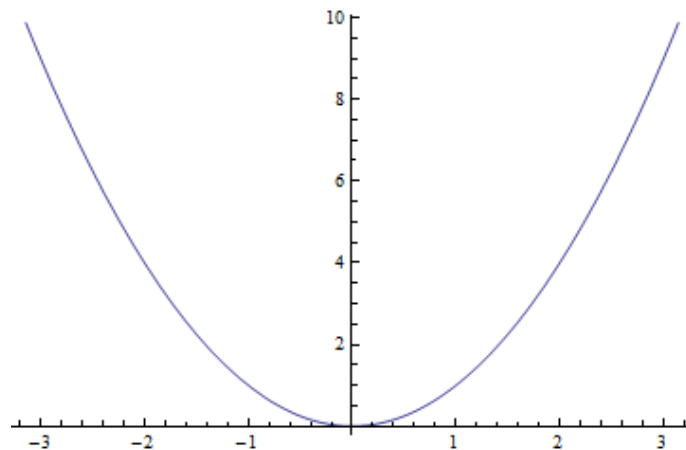


Figura 1.13: Gráfica de la función $f(x) = x^2$.

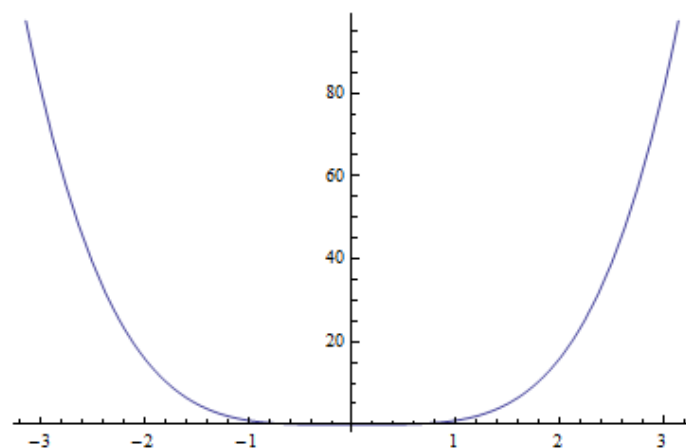


Figura 1.14: Gráfica de la función $g(x) = x^4$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

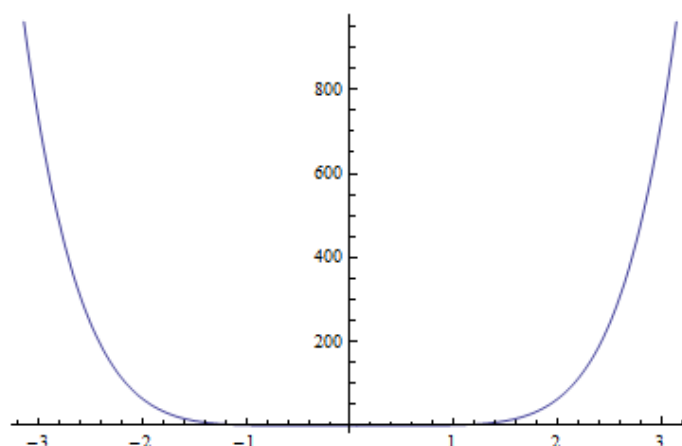


Figura 1.15: Gráfica de la función $h(x) = x^6$.

En este caso como las funciones son claramente regulares en todos los puntos comprendidos en nuestro intervalo $(-\pi, \pi)$ aparentemente tendrán mayor interés para nuestro estudio los extremos, es decir, los puntos $x = -\pi$ y $x = \pi$, por tanto vamos a representar una periodificación de cada una de estas funciones polinómicas pares, las cuales introducimos así en el programa Mathematica:

```
f[x_] := Which[x < -Pi, (x + 2 Pi)^2, -Pi ≤ x ≤ Pi, x^2, x > Pi, (x - 2 Pi)^2]
g[x_] := Which[x < -Pi, (x + 2 Pi)^4, -Pi ≤ x ≤ Pi, x^4, x > Pi, (x - 2 Pi)^4]
h[x_] := Which[x < -Pi, (x + 2 Pi)^6, -Pi ≤ x ≤ Pi, x^6, x > Pi, (x - 2 Pi)^6]
```

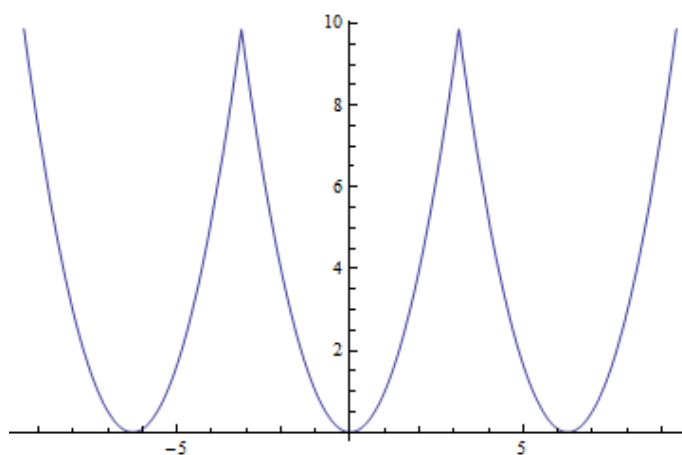


Figura 1.16: Gráfica de la periodificación de la función $f(x) = x^2$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

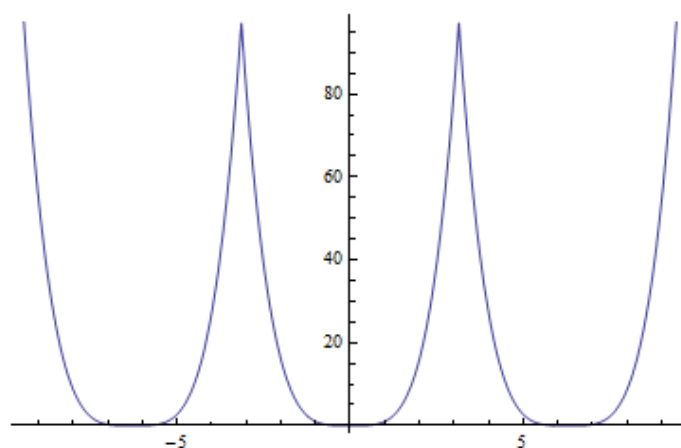


Figura 1.17: Gráfica de la periodificación de la función $g(x) = x^4$.

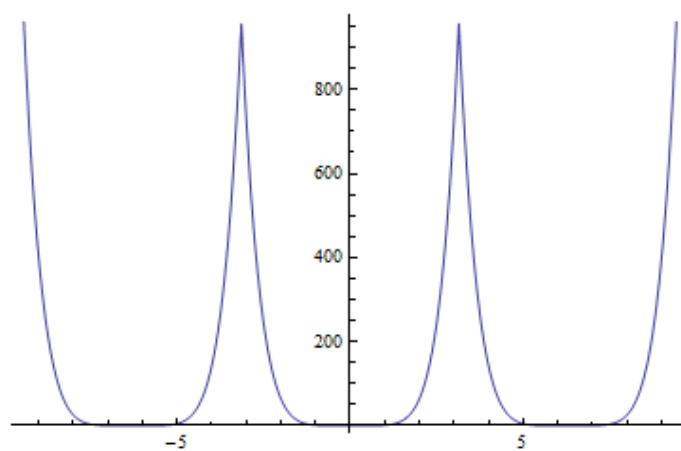


Figura 1.18: Gráfica de la periodificación de la función $h(x) = x^6$.

Nuevamente calculamos los coeficientes de Fourier como hemos hecho en los ejemplos anteriores, esta vez para nuestras funciones polinómicas pares $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4$, $h(x) = x^6$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

```
a0 = (1/Pi) Integrate[f[x], {x, -Pi, Pi}]
a[n_] = (1/Pi) Integrate[f[x]*Cos[n*x], {x, -Pi, Pi}]
b[n_] = (1/Pi) Integrate[f[x]*Sin[n*x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$\frac{2\pi^2}{3}$$

$$\frac{4n\pi \cos[n\pi] + 2(-2 + n^2\pi^2) \sin[n\pi]}{n^3\pi}$$

0

```
a0 = (1/Pi) Integrate[g[x], {x, -Pi, Pi}]
a[n_] = (1/Pi) Integrate[g[x]*Cos[n*x], {x, -Pi, Pi}]
b[n_] = (1/Pi) Integrate[g[x]*Sin[n*x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$\frac{2\pi^4}{5}$$

$$\frac{8n\pi(-6 + n^2\pi^2) \cos[n\pi] + 2(24 - 12n^2\pi^2 + n^4\pi^4) \sin[n\pi]}{n^5\pi}$$

0

```
a0 = (1/Pi) Integrate[h[x], {x, -Pi, Pi}]
a[n_] = (1/Pi) Integrate[h[x]*Cos[n*x], {x, -Pi, Pi}]
b[n_] = (1/Pi) Integrate[h[x]*Sin[n*x], {x, -Pi, Pi}]
```

$$\frac{2\pi^6}{7}$$

$$\frac{2(6n\pi(120 - 20n^2\pi^2 + n^4\pi^4) \cos[n\pi] + (-720 + 360n^2\pi^2 - 30n^4\pi^4 + n^6\pi^6) \sin[n\pi])}{n^7\pi}$$

0

Podemos ahora observar una por una como serán las sumas parciales de la serie de Fourier para las periodificaciones de nuestras funciones polinómicas pares. Empecemos con $f(x) = x^2$ y veamos al igual que en todos los casos anteriores las 3 primeras sumas parciales y cuando $n=10$ y $n=20$.

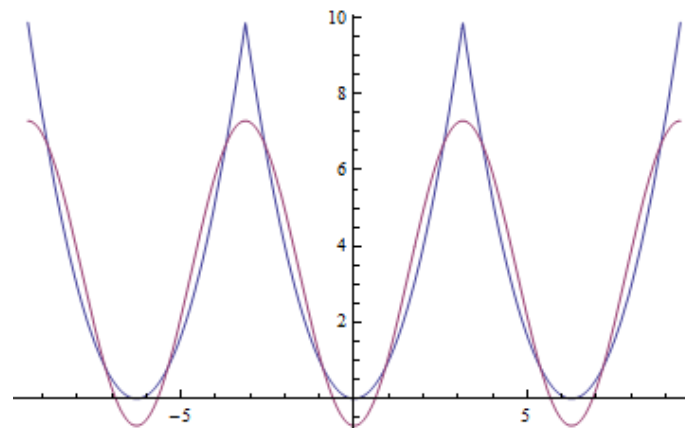


Figura 1.19: Función $f(x) = x^2$ y suma parcial cuando $n=1$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

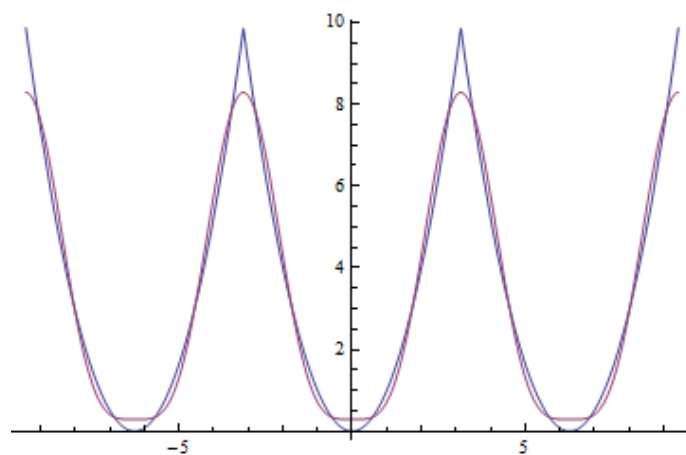


Figura 1.20: Función $f(x) = x^2$ y suma parcial cuando $n=2$.

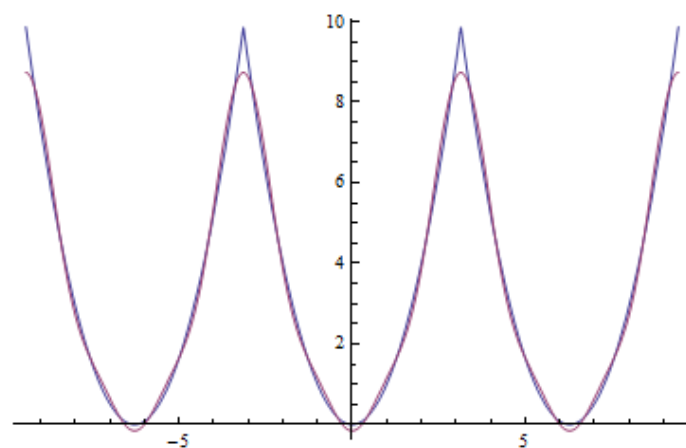


Figura 1.21: Función $f(x) = x^2$ y suma parcial cuando $n=3$.

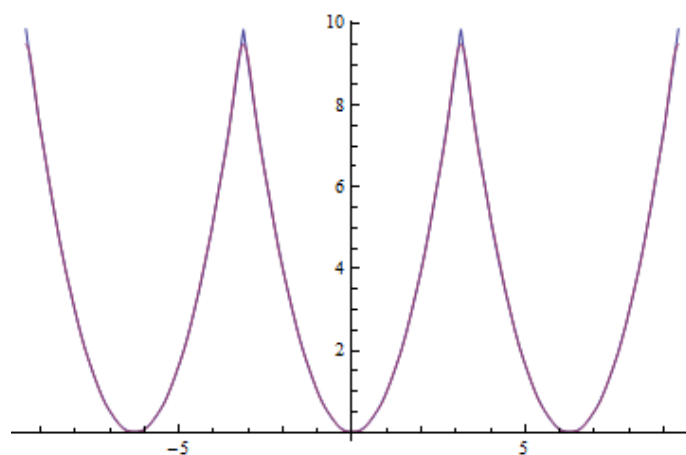


Figura 1.22: Función $f(x) = x^2$ y suma parcial cuando $n=10$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

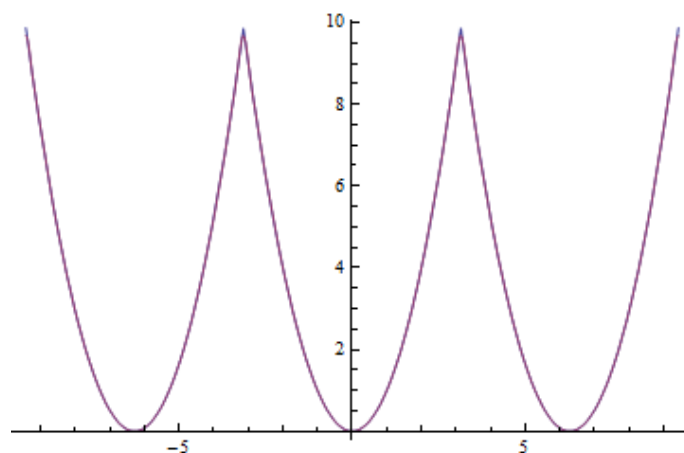


Figura 1.23: Función $f(x) = x^2$ y suma parcial cuando $n=20$.

Debido a la gran similitud entre la función x^2 con x^4 y x^6 de estas 2 últimas visualizaremos solo sus sumas de Fourier cuando $n=3$ y $n=20$ que son las que nos aportan datos más interesantes y de las que obtendremos conclusiones posteriormente.

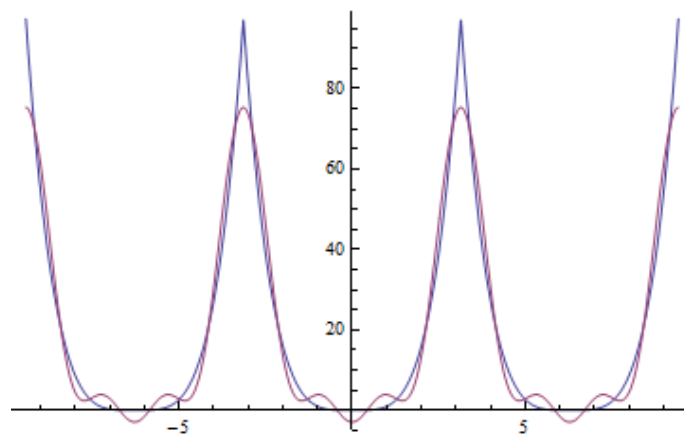


Figura 1.24: Función $g(x) = x^4$ y suma parcial cuando $n=3$.

1.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

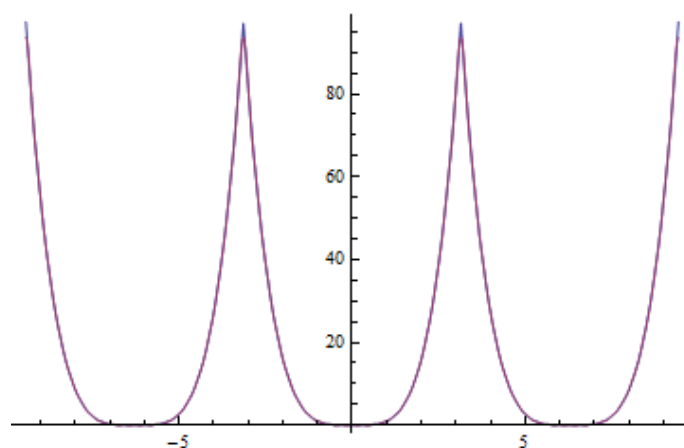


Figura 1.25: Función $g(x) = x^4$ y suma parcial cuando $n=20$.

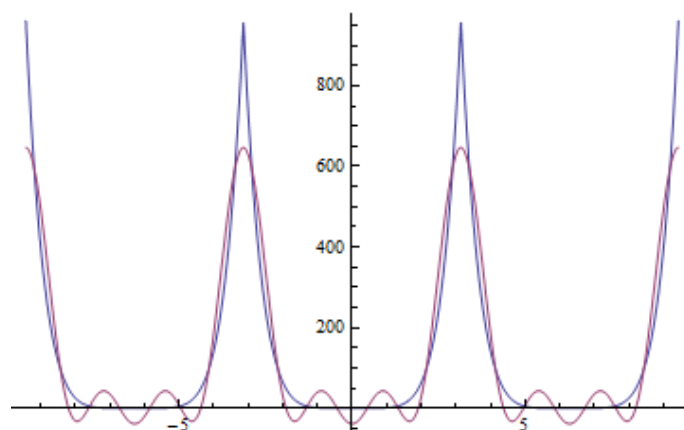


Figura 1.26: Función $h(x) = x^6$ y suma parcial cuando $n=3$.

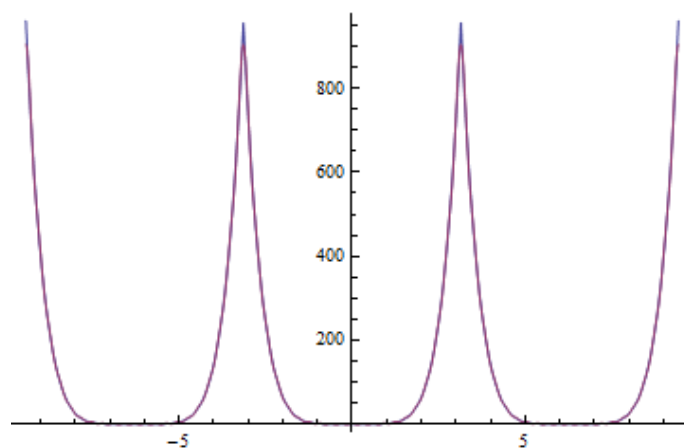


Figura 1.27: Función $h(x) = x^6$ y suma parcial cuando $n=20$.

Observaciones que se intuyen en las funciones polinómicas pares.

Las funciones polinómicas pares son funciones regulares en todo punto, por lo que según hemos podido observar con anterioridad en el resto de ejemplos, y según observamos de nuevo ahora, su serie de Fourier no presenta ningún problema de convergencia, pero este parece surgir a la hora de hacer la periodificación de la función, es decir, a la hora de extender nuestra función definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ a todo \mathbb{R} (aunque aquí solo hemos representado un periodo más a la izquierda y otro a la derecha), y es que al hacer la periodificación perdemos la derivabilidad en los puntos extremos, es decir en los puntos $x = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Podemos observar que aunque finalmente la serie de Fourier acaba convergiendo a la función en todo punto sin problema, en estos extremos, donde empieza un nuevo periodo, lo hace de forma más lenta (el mismo fenómeno que observamos en el ejemplo del valor absoluto en el punto en el que fallaba la derivabilidad).

1.3. Confirmación de las intuiciones propuestas.

Vamos a recopilar las deducciones que hemos intuido a la vista de las gráficas calculadas en la sección anterior:

1. La serie de Fourier de una función convergerá a dicha función en todos los puntos donde ésta sea continua y derivable. Si la función es continua pero no derivable según nuestras observaciones parece que también habrá convergencia, pero veremos que esto último no es cierto.
2. Cuando una función tenga una discontinuidad de salto en un punto, su serie de Fourier en dicho punto en caso de converger lo hará a la media aritmética de los valores del salto, es decir, a la media aritmética de sus límites por la izquierda y por la derecha.
3. En los puntos en los que una función sea continua pero no derivable la serie de Fourier puede converger a la función pero lo hará más lentamente que en los puntos donde la función si que es derivable.
4. Las discontinuidades y la falta de regularidad comentadas en los puntos anteriores no tienen por qué ser propias de la función, pueden venir provocadas a la hora de periodificarla.

Vamos ahora a aportar rigor matemático a estas conjeturas para convertirlas en propiedades de las series de Fourier. Empezaremos con un criterio para la convergencia puntual.

1.3. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

Teorema 1.3.1 (*Criterio de Dini para convergencia puntual*) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica de forma que $f|_{[-\pi, \pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exists \delta > 0$ verificando que la función $g :]-\delta, \delta[\setminus 0 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(\tau) = \frac{f(x_0+\tau)-f(x_0)}{\tau}$ cumple que $g \in L^1(-\delta, \delta)$. Entonces

$$f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos(kx_0) + B_k \operatorname{sen}(kx_0)) \right)$$

donde A_k y B_k son los coeficientes de Fourier.

Proposición 1.3.2 Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es 2π -periódica, $f|_{[-\pi, \pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$ y si $x_0 \in \mathbb{R}$ es tal que existe $f'(x_0)$, entonces se satisface la condición exigida por el criterio de Dini, es decir, que $g(\tau) = \frac{f(x_0+\tau)-f(x_0)}{\tau}$ cumple que $g \in L^1(-\delta, \delta)$. En particular, las funciones $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 2π -periódicas y derivables en \mathbb{R} satisfacen la hipótesis en todo punto.

Corolario 1.3.3 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -periódica de forma que $f|_{[-\pi, \pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$ y derivable en todo punto del dominio, entonces su serie de Fourier converge puntualmente para todo $x \in \mathbb{R}$ a la función f .

Con este resultado queda probada la primera de las observaciones que habíamos propuesto, es decir, que la serie de Fourier converge puntualmente a la función en los puntos donde sea derivable, pero la continuidad únicamente no es suficiente para la convergencia. Veamos otro resultado que nos confirmará otra de las intuiciones observadas. Este resultado no es más que una consecuencia del criterio de Dini:

Teorema 1.3.4 Sea $f \in L^1(-\pi, \pi)$ y sea $x \in (-\pi, \pi)$. Supongamos que existen los límites laterales $f(x-)$ y $f(x+)$, entonces si se cumplen las condiciones

$$\int_0^\delta \frac{|f(x-t) - f(x-)|}{t} dt < \infty \text{ y } \int_0^\delta \frac{|f(x+t) - f(x+)|}{t} dt < \infty$$

la serie de Fourier de f converge en el punto x y lo hace a la media aritmética de los límites laterales, es decir a $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.

Corolario 1.3.5 Sea $f \in L^1(-\pi, \pi)$ y sea $x \in (-\pi, \pi)$, supongamos que existen los límites laterales $f(x-)$ y $f(x+)$, entonces si existen también los límites

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} \frac{f(x+t) - f(x-)}{t}, \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \frac{f(x+t) - f(x+)}{t}$$

la serie de Fourier de f converge en el punto x y lo hace a la media aritmética de los límites laterales, es decir a $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$. En particular, si f es lateralmente derivable en el punto x , la serie de Fourier convergerá a f en dicho punto.

1.3. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

Estos dos enunciados prueban la segunda de nuestras intuiciones, que efectivamente cuando existan los límites laterales en un punto y se cumplan las condiciones anunciadas para la convergencia, la serie de Fourier convergerá a la media aritmética de los límites laterales, es decir, en el caso de la discontinuidad de salto que veíamos en nuestro ensayo de visualización, al punto medio del salto.

Confirmemos ahora nuestras hipótesis 3 y 4 con el siguiente resultado.

Teorema 1.3.6 *Sea $f \in C^{k+1}$ en $L^2(-\pi, \pi)$, entonces la serie numérica*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (n^k |a_n| + n^k |b_n|)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función f , es convergente.

Esto confirma nuestras sospechas de que cuanto más regularidad tuviera nuestra función, más rápido iba a converger su serie de Fourier. Por eso cuando perdemos regularidad a la hora de periodificarla o cuando nuestra propia función tiene algún punto donde no es derivable (como ocurría en el valor absoluto) observábamos que esta podía acabar convergiendo a la función pero lo hacía más lentamente.

No convergencia de la serie de Fourier.

Durante el desarrollo de este capítulo hemos visto cómo la serie de Fourier de una función podía no converger a dicha función o podía hacerlo pero más lentamente si perdíamos regularidad, pero haremos un breve inciso para aclarar que la serie de Fourier de una función continua no siempre converge.

Como se explica en [3], si nos restringimos al subconjunto C de $L^2(-\pi, \pi)$, en 1873 Du Bois-Reymond encontró una función $f \in C$ cuya serie de Fourier diverge en algún punto de $[-\pi, \pi]$, aportándose ejemplos más simples posteriormente como el de Fejér en 1911.

Fue en 1966 cuando L. Carleson (*“On the convergence and growth of partial sums of Fourier series”*, Acta Math. 116, 135-157, 1966) demostró que si $f \in C$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ a f . En ese mismo año, Kahane y Katznelson probaron que si $E \subset [-\pi, \pi]$ es un subconjunto de medida cero, entonces existe una función $f \in C$ tal que su serie de Fourier no converge en E .

Para zanjar este apunte sobre la no convergencia de una serie de Fourier, cabe destacar que en 1926, Kolmogorov dio un ejemplo de una función $f \in L^1(-\pi, \pi)$ y 2π -periódica cuya serie de Fourier no converge en ningún punto.

Capítulo 2

Ensayos de visualización sobre el fenómeno de Gibbs.

En este capítulo trataremos de visualizar el conocido como fenómeno de Gibbs. Para ello procederemos como en el apartado anterior a visualizar el comportamiento de diversas funciones ante el desarrollo de su serie de Fourier. Esto nos permitirá intuir ciertos resultados que más tarde confirmaremos o rechazaremos. De nuevo a lo largo del capítulo se representará en azul la gráfica de la función y en morado la gráfica de la serie de Fourier.

2.1. Elaboración de prácticas con funciones concretas.

2.1.1. Función escalonada.

Vamos a recuperar la función escalonada del capítulo anterior, es decir, la función que toma valor 0 en el intervalo $]-\pi, 0]$ y valor 1 en el intervalo $]0, \pi[$. Recordemos como era su gráfica.

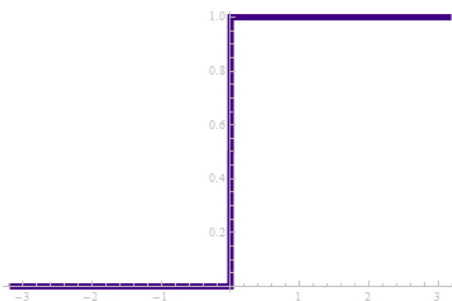


Figura 2.1: Gráfica de la función escalonada con valores 0 y 1.

2.1. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Recordemos que en el punto donde se producía la discontinuidad de salto las sumas parciales no convergían a la función, pero ahora observaremos otro fenómeno que le ocurre a la serie de Fourier de este tipo de funciones. Vamos ahora a visualizar como será la suma parcial cuando n tome un valor bastante más grande de los que hemos utilizado hasta ahora, por ejemplo $n=200$.

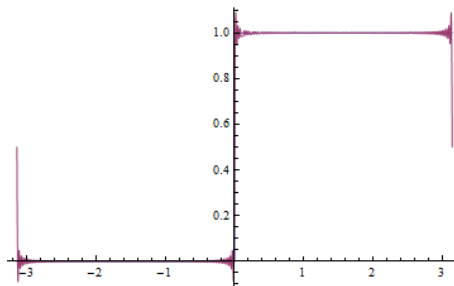


Figura 2.2: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=200$.

Vemos que las sumas parciales convergen a la función en los puntos donde ésta es derivable pero se aprecian algunas perturbaciones en la zona próxima a la discontinuidad. Hagamos zoom a la gráfica en la parte más próxima al punto $(0,1)$ (ocurre lo mismo en el lado izquierdo de la discontinuidad)

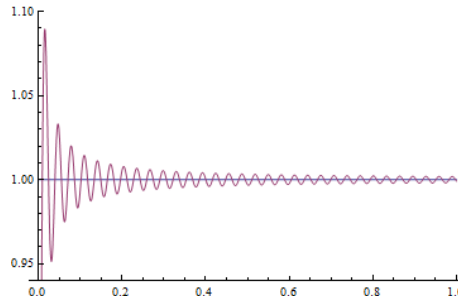


Figura 2.3: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(0,1)$

Observaciones que se intuyen en la función escalonada.

Aquí se puede observar perfectamente como en un entorno de la discontinuidad las sumas parciales oscilan entre el valor real de la función, es decir “se pasa” tanto por arriba como por abajo de la función.

2.1.2. Funciones polinómicas impares ($f(x) = x, x^3, x^5$).

Igual que en los apartados anteriores vamos primero a visualizar las gráficas de dichas funciones.

2.1. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

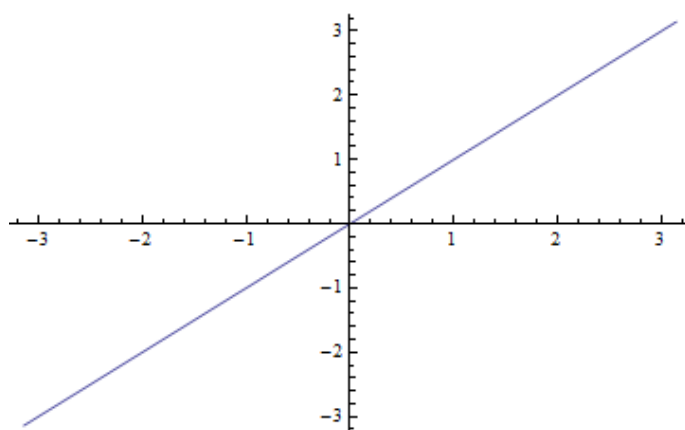


Figura 2.4: Gráfica de la función $f(x) = x$.

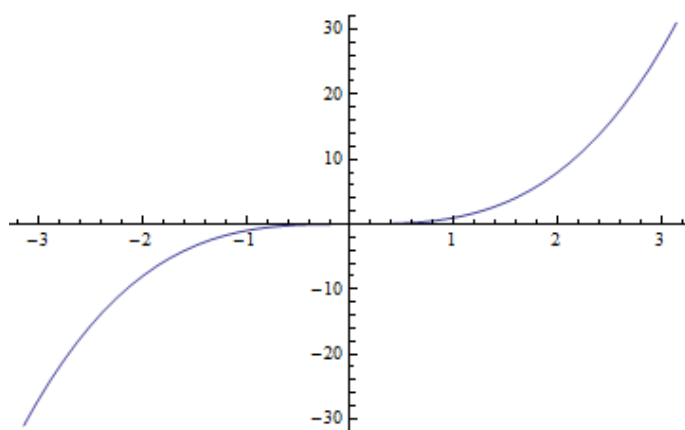


Figura 2.5: Gráfica de la función $g(x) = x^3$.

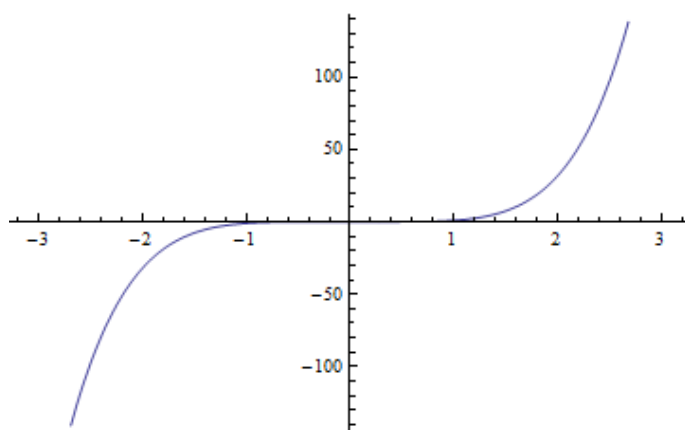


Figura 2.6: Gráfica de la función $h(x) = x^5$.

2.1. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Para poder hacer una periodificación de estas funciones deben coincidir los valores en los extremos, por eso haremos una pequeña modificación de nuestras funciones.

Definimos $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{f} = \begin{cases} x & , x \in]-\pi, \pi], \\ f(\pi) & , x = -\pi \end{cases}$$

$\tilde{g} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{g} = \begin{cases} x^3 & , x \in]-\pi, \pi], \\ g(\pi) & , x = -\pi \end{cases}$$

$\tilde{h} : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\tilde{h} = \begin{cases} x^5 & , x \in]-\pi, \pi], \\ h(\pi) & , x = -\pi \end{cases}$$

Ahora si que podemos periodificar estas funciones y visualizar sus gráficas.

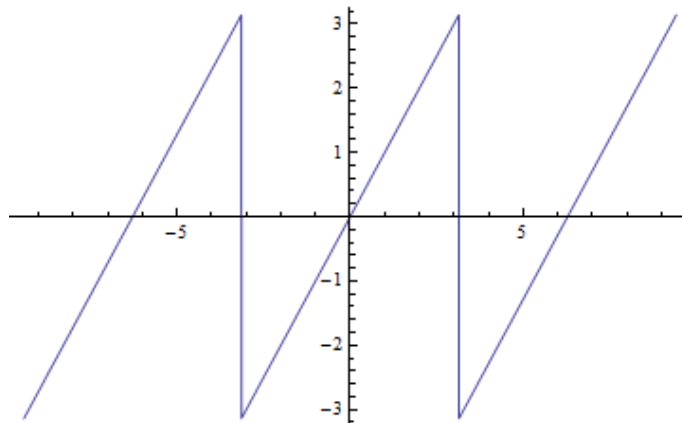


Figura 2.7: Gráfica de la periodificación de la función $f(x) = x$.

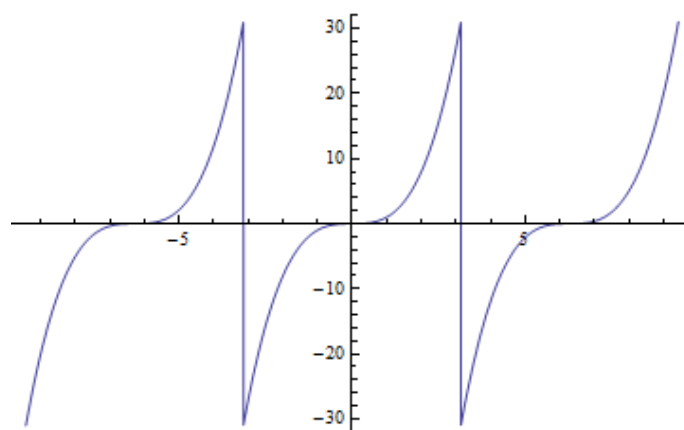


Figura 2.8: Gráfica de la periodificación de la función $g(x) = x^3$.

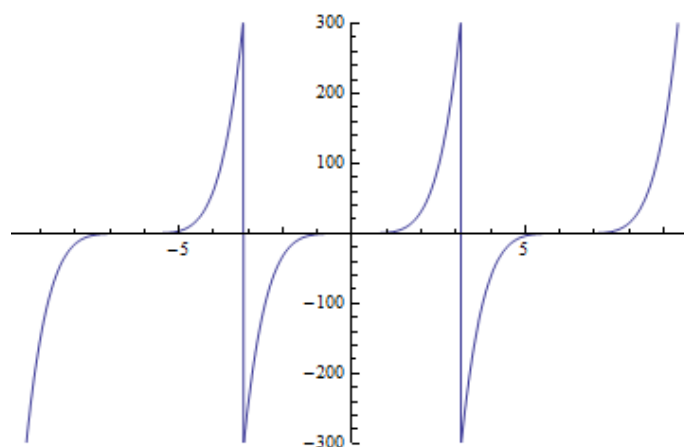


Figura 2.9: Gráfica de la periodificación de la función $h(x) = x^5$.

Observamos que igual que ocurría con la discontinuidad en la función escalonada, el programa Mathematica representa una recta uniendo ambas discontinuidades que no pertenece a la función, pero que no nos afectará en nuestro estudio. Vamos a visualizar las gráficas de las sumas parciales de Fourier de cada una de las funciones cuando n sea bastante grande, en este caso $n = 200$, y haremos zoom para apreciar el fenómeno que queremos observar.

2.1. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

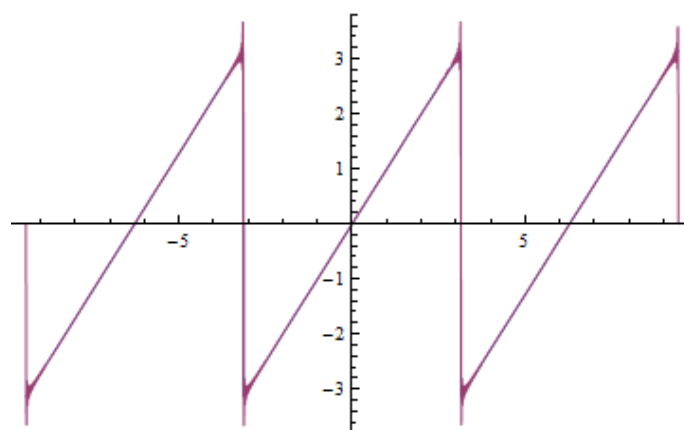


Figura 2.10: Periodificación de $\tilde{f}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$.

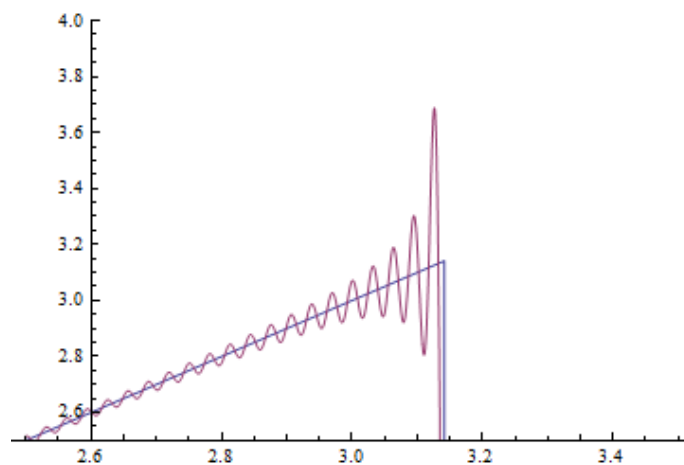


Figura 2.11: Periodificación de $\tilde{f}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

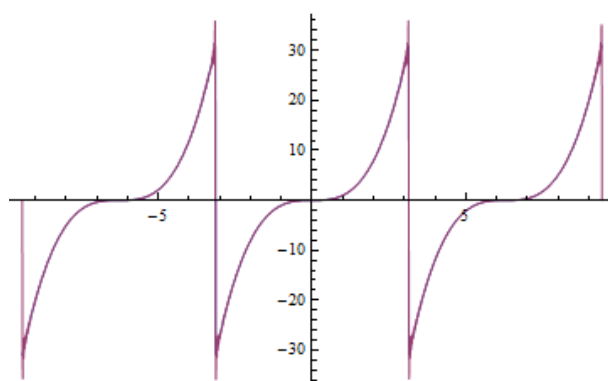


Figura 2.12: Periodificación de $\tilde{g}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$.

2.1. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

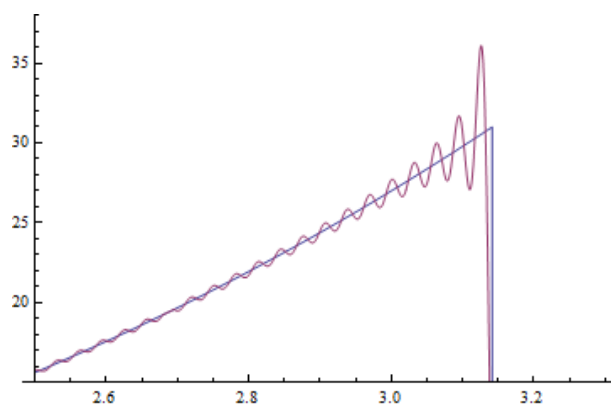


Figura 2.13: Periodificación de $\tilde{g}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

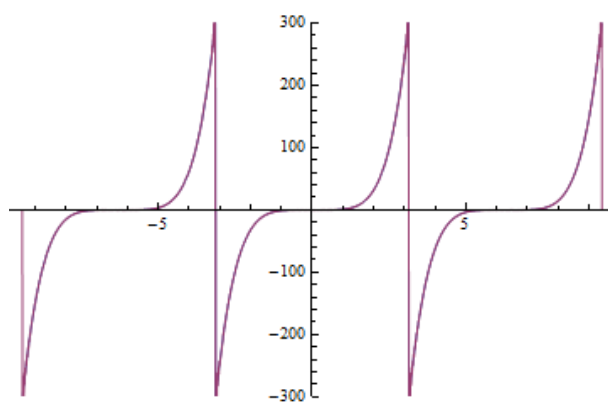


Figura 2.14: Periodificación de $\tilde{h}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$.

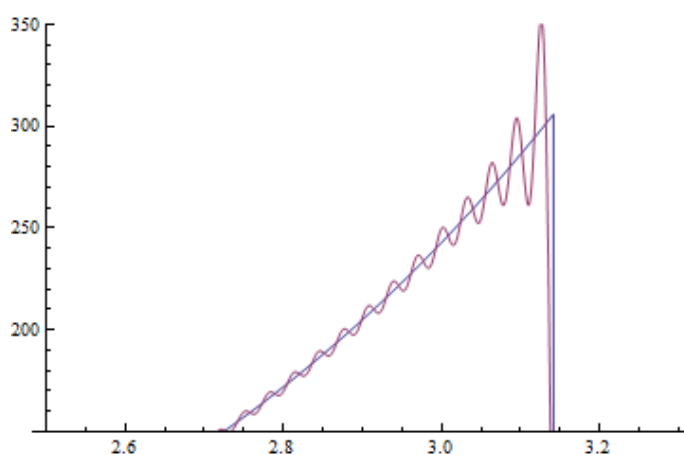


Figura 2.15: Periodificación de $\tilde{h}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

Observaciones que se intuyen en las funciones polinómicas impares.

Igual que concluíamos en el apartado de la función escalonada, parece que volvemos a comprobar que en los puntos donde hay discontinuidad de salto las sumas parciales de la serie de Fourier parecen pasarse tanto por arriba como por abajo, pero es que además, tras observar estas 3 funciones podemos intuir que existe una relación constante entre el salto y el máximo de la suma parcial más cercano al punto de discontinuidad. Es decir, que cuando pasamos al límite las sumas parciales siempre sobrepasan a la función en un mismo porcentaje respecto al salto.

2.2. Confirmación de las intuiciones propuestas.

Tras visualizar las gráficas de las funciones anteriores y sus series de Fourier, hemos observado que cuando la función tiene una discontinuidad de salto, parece que las sumas parciales de la serie de Fourier de dicha función la sobrepasan tanto por arriba como por abajo y que además existe una relación constante entre el salto y “cuánto se pasan” las sumas parciales. Veamos este teorema que aparece en [7], cuya demostración podemos encontrar en [6].

Teorema 2.2.1 *Sea f una función real de variable real, con periodo 2π . Supongamos que f y f' son ambas continuas excepto para un número finito de discontinuidades de tipo salto en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces, en un punto a de discontinuidad de f , las gráficas de las sumas parciales de la serie de Fourier convergen al segmento vertical de longitud*

$$L = \frac{2}{\pi} Si(\pi) |f(a+) - f(a-)|$$

centrado en el punto $(a, \frac{1}{2}(f(a+) + f(a-)))$. Donde Si denota a la función $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$.

Definición 2.2.2 *La razón entre la longitud del segmento L (al que tienden las sumas parciales de la serie de Fourier) y la longitud del salto de la discontinuidad, es decir, $|f(a+) - f(a-)|$, se denomina constante de Gibbs y su valor es*

$$\frac{2}{\pi} Si(\pi)$$

Para calcular el valor de la constante de Gibbs no podemos conocer explícitamente una primitiva de nuestra función $Si(x)$ pero si podemos pedirle a

2.2. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

nuestro programa Mathematica una aproximación de $Si(\pi)$ mediante el comando $N[\text{SinIntegral}[[\pi]], 6]$ que nos ofrece una aproximación con 6 cifras, en este caso nos da como resultado 1.85194, por tanto tenemos que el valor de la constante de Gibbs será

$$\frac{2}{\pi}Si(\pi) \approx 1,179$$

Es decir, acabamos de aproximar la longitud que tendrá el segmento al que convergerán las sumas parciales de la serie de Fourier en un punto donde haya un salto de longitud 1, como es el caso de nuestro primer salto en el ejemplo de la función escalonada. Como el segmento está centrado en el punto medio del salto y este sobrepasa 0.179 aproximadamente al salto, entonces lo hará aproximadamente en 0.9 por arriba y en 0.9 por abajo, es decir, en casi un 9%, veamos si nuestra función escalonada que habíamos visualizado anteriormente y de la que habíamos obtenido conclusiones cumple con los valores que acabamos de calcular. Para ello volvamos a visualizarla:

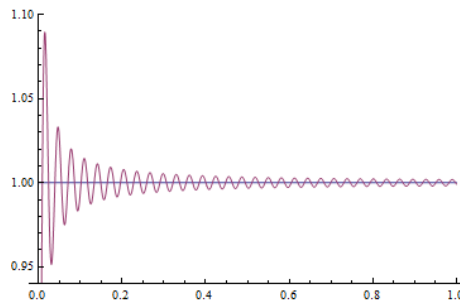


Figura 2.16: Función $f(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(0,1)$

Efectivamente podemos observar como se pasan aproximadamente en 0.9 como habíamos calculado. Haciendo un cálculo rápido con ayuda del programa Mathematica podemos calcular ese 9% también para las funciones polinómicas que habíamos utilizado anteriormente, y verificar que efectivamente todas siguen la que ya conocemos como constante de Gibbs.

- Para $f(x) = x$ teníamos un salto de 2π por tanto se pasará en 0.5655.
- Para $g(x) = x^3$ teníamos un salto de $2\pi^3$ por tanto se pasará en 5.5811.
- Para $h(x) = x^5$ teníamos un salto de $2\pi^5$ por tanto se pasará en 55.0835.

2.2. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

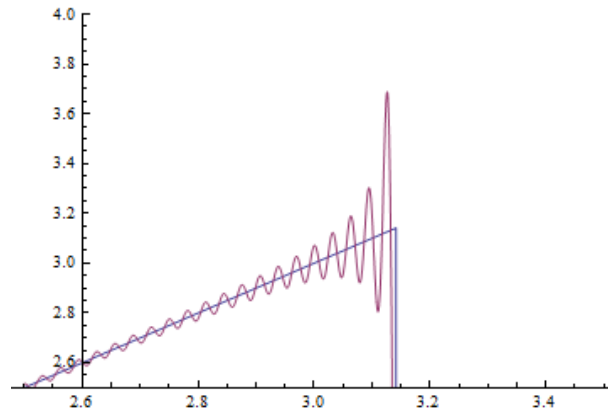


Figura 2.17: Periodificación de $\tilde{f}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

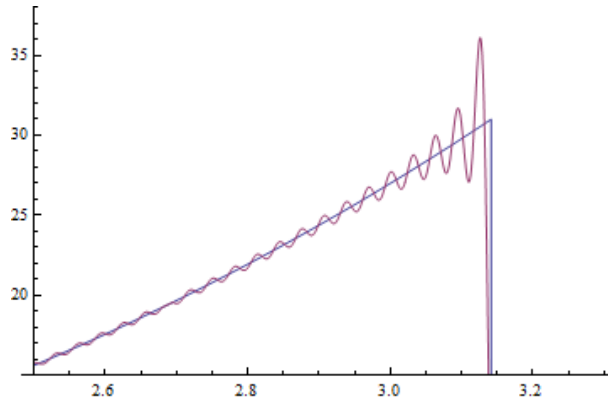


Figura 2.18: Periodificación de $\tilde{g}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

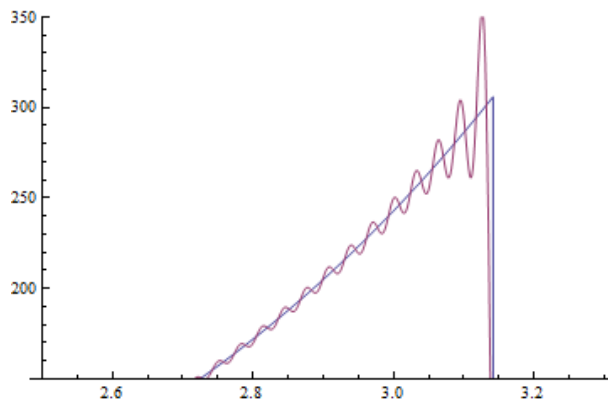


Figura 2.19: Periodificación de $\tilde{h}(x)$ y suma parcial cuando $n=200$. Proximidades de $(2,5, 3,5)$.

2.2. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

Efectivamente, como era de esperar, todas cumplen con lo calculado anteriormente, por tanto habíamos visualizado, hemos enunciado y además ahora confirmado, el conocido como “Fenómeno de Gibbs”.

2.2. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

Capítulo 3

Ensayos de visualización sobre el teorema de inversión de la transformada de Fourier.

3.1. Conceptos previos sobre la transformada de Fourier.

En primer lugar, basándonos en [4] y [5] vamos a introducir algunos conceptos previos sobre la transformada de Fourier.

En las series de Fourier trabajábamos con funciones definidas en un intervalo de la recta y periodificaciones de estas. Ahora trabajaremos con funciones definidas en toda la recta \mathbb{R} y no necesariamente periódicas. Por otra parte, para la serie de Fourier usábamos coeficientes reales, veremos cómo ahora es más conveniente trabajar en el campo complejo. Pasemos por tanto a conocer la definición de la transformada de Fourier.

Definición 3.1.1 (*Transformada de Fourier*) Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Llamamos “Transformada de Fourier de f ” a la función, también definida en \mathbb{R} y que representamos como \widehat{f} , dada por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

La definición de la transformada puede variar según la fuente que utilicemos, en algunos libros vemos que el exponente es $-ix\xi$, en este caso la fórmula de inversión llevará un $1/2\pi$. Para recuperar la simetría a veces se pone un factor $1/\sqrt{2\pi}$ en la definición de transformada. Incluso el signo $-$ a veces se sustituye por un $+$ (y en este caso, el $-$ aparece en la fórmula de inversión) aunque no es lo habitual.

3.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Del mismo modo que con las series de Fourier para el caso de funciones periódicas, la transformada de Fourier realiza una descomposición (también llamado análisis) de f en componentes, de modo que ahora en lugar de presentar únicamente funciones discretas formando una sucesión, aparece un rango continuo de frecuencias (todo \mathbb{R}). A cada una de estas frecuencias ξ le corresponde un coeficiente $\widehat{f}(\xi)$, que será, en general, un número complejo. Su módulo será la amplitud y su argumento la fase. Se denomina síntesis a la reconstrucción de f a partir de $\widehat{f}(\xi)$.

Veamos ahora algunas propiedades de la transformada que acabamos de definir:

Proposición 3.1.2 *La transformada de Fourier cumple las siguientes propiedades:*

- *Linealidad:* $\widehat{(\alpha f + \beta g)} = \alpha \widehat{f} + \beta \widehat{g}$.
- *Conjugación:* $\widehat{\widehat{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.
- *Traslación:* si $\tau_h f(x) = f(x + h)$, entonces $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i h \xi}$.
- *Modulación:* si $g(x) = f(x) e^{2\pi i h x}$, entonces $\widehat{g}(\xi) = (\tau_{-h} \widehat{f})(\xi)$.
- *Dilatación:* si $g(x) = \lambda^{-1} f(\lambda^{-1} x)$ y $\lambda > 0$, entonces $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\lambda \xi)$.

La primera propiedad la podemos deducir directamente de las propiedades de la linealidad de la integral igual que la segunda se obtiene directamente de las propiedades de la conjugación. Las 3 últimas se prueban llevando a cabo los cambios de variable oportunos y las podemos encontrar en [4].

3.2. Elaboración de prácticas con funciones concretas.

Una vez introducida la transformada de Fourier y conocidas sus propiedades más elementales, vamos a proceder a llevar a cabo las visualizaciones oportunas, como en los capítulos anteriores, para posteriormente obtener deducciones que más tarde confirmaremos o rechazaremos con el rigor matemático necesario y haciendo uso de la bibliografía adecuada. Como en los dos capítulos anteriores, vamos a representar en color azul la gráfica de la función y en morado la gráfica de la transformada de Fourier.

3.2.1. Función característica.

En primer lugar vamos a definir la función característica para el intervalo $[-1, 1]$, es decir, una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ que toma valores

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

Podemos visualizar su gráfica:

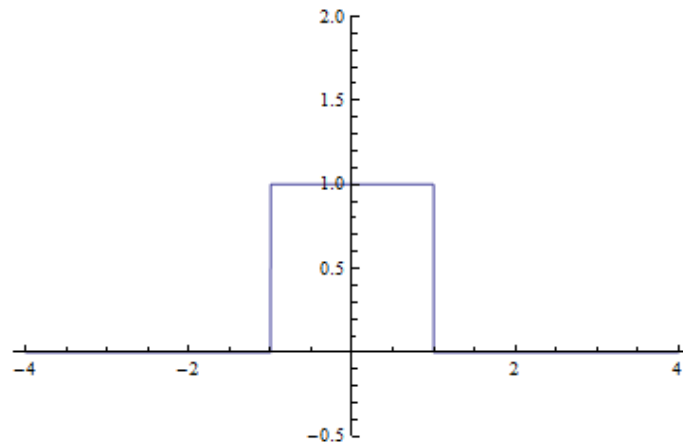


Figura 3.1: Gráfica de la función característica $f(x)$.

Como comentario podemos observar como nuevamente el programa Mathematica une los puntos de discontinuidad con unas rectas que no pertenecen a la función pero que no afectaran a nuestras visualizaciones. Podemos pedir al Mathematica a través de una función que ya tiene programada que nos calcule la transformada de Fourier de esta función, lo hacemos con el comando:

```
f[x_] := Which[x ≤ -1, 0, -1 ≤ x < 1, 1, 1 ≤ x, 0]
Transf[u_] := FourierTransform[f[x], x, u, FourierParameters → {0, -2 Pi}]
Transf[u]
Sin[2 π u]
π u
```

Le añadimos “FourierParameters → {0, -2π}” para que tome la definición de transformada que se ha definido anteriormente, puesto que como se ha explicado esta puede variar según la fuente utilizada. Como comentario podemos observar como con las propiedades 3 y 5 enunciadas anteriormente podemos calcular la transformada de Fourier de cualquier función característica en el

3.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

intervalo $[a, b]$.

Una vez calculada la transformada, podemos pasar a representarla en una misma gráfica junto a la función.

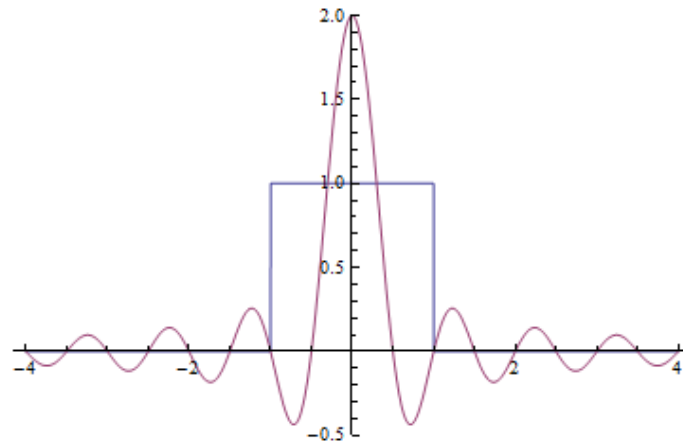


Figura 3.2: Función $f(x)$ y su transformada.

Observaciones que se intuyen en en la función característica.

Lo más llamativo al observar esta gráfica es que a pesar de que la función característica es claramente discontinua en 2 puntos, su transformada de Fourier es continua en todos sus puntos. Por tanto podemos intuir que es posible que la transformada de Fourier sea siempre continua independientemente de las discontinuidades que pueda tener la función original.

3.2.2. Función $f(x) = e^{-4\pi|x|}$.

Definimos la función $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(x) = e^{-4\pi|x|}$$

y como de costumbre veamos su gráfica con el programa Mathematica.

3.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

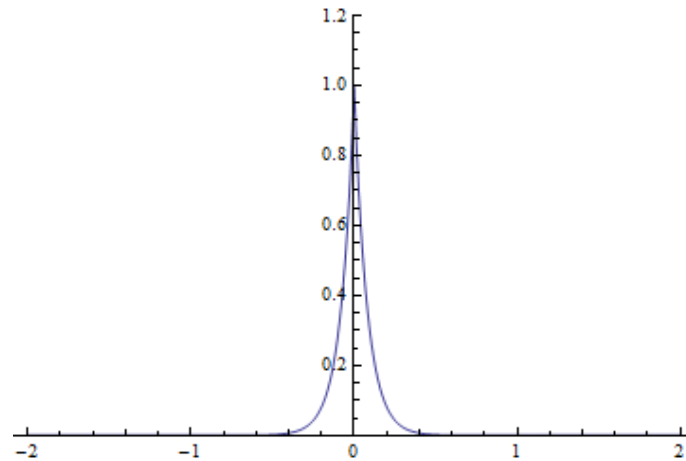


Figura 3.3: Gráfica de la función $f(x) = e^{-4\pi|x|}$

De nuevo utilizamos en el programa Mathematica la función ya integrada “FourierTransform” para calcular la Transformada de Fourier de la función que acabamos de visualizar.

```
g[x_] := Exp[-4 Pi * Abs[x]]
Transf[u_] := FourierTransform[g[x], x, u, FourierParameters -> {0, -2 Pi}]
Transf[u]
```

$$\frac{2}{4\pi + \pi u^2}$$

Conociendo ya la Transformada de Fourier de nuestra función $f(x)$ podemos visualizarlas juntas en una misma gráfica.

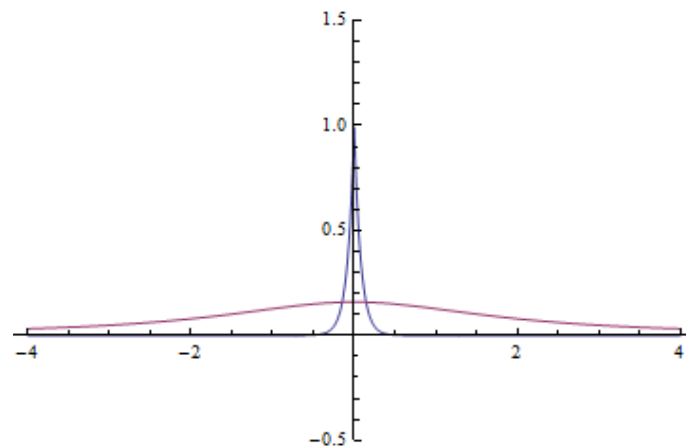


Figura 3.4: Función $f(x)$ y su transformada.

3.2. ELABORACIÓN DE PRÁCTICAS CON FUNCIONES CONCRETAS.

Observaciones que se intuyen en la función $f(x) = e^{-4\pi|x|}$.

Tanto en la transformada de esta función como en la transformada de la función anterior podemos observar como cuando la hacemos tender a $+\infty$ o a $-\infty$ parece que tiende a cero, por lo que la intuición que vamos a proponer tras esta observación es que para toda función integrable a la que se le pueda calcular su transformada de Fourier la transformada de Fourier tiende a cero en $+\infty$ y $-\infty$.

3.2.3. Función $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

Vamos a trabajar ahora con la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, y en primer lugar vamos a visualizar su gráfica.

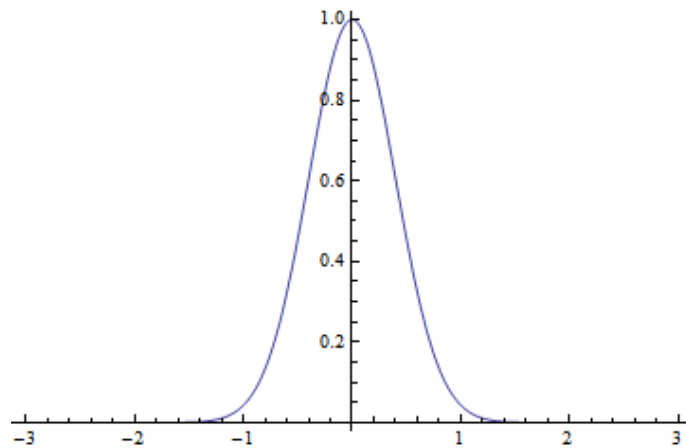


Figura 3.5: Gráfica de la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$

Una vez vista su gráfica vamos a pedir de nuevo al programa Mathematica que nos calcule su transformada de Fourier.

```
h[x_] := Exp[-Pi * x^2]
Transform[u_] := FourierTransform[h[x], x, u, FourierParameters -> {0, -2 Pi}]
Transform[u]

$$e^{-\pi u^2}$$

```

Nos llama la atención que la transformada es exactamente la misma que la función f , de hecho, al pedir al Mathematica que las represente en una misma gráfica estas son indistinguibles:

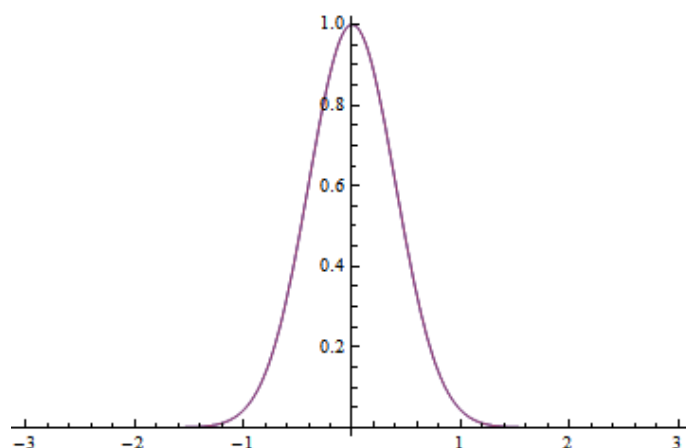


Figura 3.6: Gráfica de la función $f(x)$ y su transformada.

Como podemos observar es exactamente la misma gráfica que cuando pedimos representar la función f salvo por el color ya que aquí se encuentran superpuestas en azul la gráfica de f y en morado la de \hat{f} .

Observaciones que se intuyen en la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

Nos ha sorprendido que a la hora de calcular la transformada de la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$ de nuevo hemos obtenido la misma función, es decir, que $f = \hat{f}$, pero si nos fijamos, al hacer la derivada de la función obtenemos que $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$, es decir, que $f' = C f$. Por tanto, en este caso tan particular vemos perfectamente como existe una clara relación entre la derivada de la función f y su transformada, ya que tenemos que $f' = C \hat{f}$, así que, como intuición de este ejemplo vamos a decir que existe una relación entre la derivada de la función y la transformada de esta.

3.3. Confirmación de las intuiciones propuestas.

Tras conocer la definición de transformada de Fourier hemos podido calcularla para algunas funciones y hemos intuido 3 conclusiones:

- La transformada de Fourier siempre es una función continua independientemente de la continuidad de la función f
- La transformada de Fourier se va a cero cuando la variable independiente tiende a $+\infty$ y $-\infty$.
- De algún modo podemos relacionar la transformada de Fourier de una función con su derivada.

3.3. CONFIRMACIÓN DE LAS INTUICIONES PROPUESTAS.

Efectivamente, vamos a comprobar que las 2 primeras intuiciones que habíamos obtenido tras las observaciones son ciertas, y que la tercera no se alejaba mucho de la realidad. Para ello vamos a ver el enunciado de la siguiente proposición cuya demostración podemos encontrar en [4]

Proposición 3.3.1 *Se cumplen las siguientes propiedades analíticas en la transformada de Fourier:*

1. \widehat{f} es una función continua, de hecho, es uniformemente continua.
2. Lema de Riemann-Lebesgue: $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.
3. Si f y f' son integrables, $\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)$.
4. Si $xf(x)$ es integrable, $\widehat{(-2\pi i x f)}(\xi) = (\widehat{f})'(\xi)$.

En efecto, como habíamos anunciado antes, con las propiedades 1 y 2 confirmamos directamente las 2 primeras intuiciones que habíamos propuesto tras las observaciones, y ahora, una vez conocidas las propiedades 3 y 4, desarrollemos un poco el último ejemplo que habíamos visualizado, es decir, la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$.

Recordemos que teníamos que $f'(x) = -2\pi x f(x)$, y como claramente tenemos que f , f' y $xf(x)$ son integrables:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} -2\pi x e^{-\pi x^2} dx = 0.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\pi x^2} dx = 0.$$

Podemos aplicar las propiedades 3 y 4, de modo que tenemos que:

$$(\widehat{f})'(\xi) = \widehat{(-2\pi i x f)}(\xi) = i \widehat{f'}(\xi) = i(2\pi i \xi) \widehat{f}(\xi),$$

luego

$$(\widehat{f})'(\xi) = -2\pi \xi \widehat{f}(\xi).$$

Por tanto, resolviendo la ecuación diferencial, se tiene que existe una constante $C \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\widehat{f}(\xi) = C e^{-\pi \xi^2} = C f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}.$$

Podemos hacer $\xi = 0$ para determinar la constante de modo que:

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

3.4. TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Por tanto, hemos comprobado el por qué en este caso particular, a raíz de las propiedades 3 y 4, teníamos que $f = \widehat{f}$, y que efectivamente no andábamos muy alejados de la realidad al afirmar que existía cierta relación entre las transformadas de una función y su derivada, aunque ya hemos comprobado que realmente para un caso más general las relaciones se dan entre la derivada de la transformada y la transformada de la derivada con la propia transformada. Podemos encontrar más detalladamente la demostración de estas propiedades y ejemplos en [4] y [5].

3.4. Teorema de inversión de la transformada de Fourier.

En las secciones anteriores hemos definido la transformada de Fourier, hemos enunciado algunas de sus propiedades algebraicas más elementales, posteriormente, hemos visualizado las gráficas de algunas funciones junto a su transformada, obteniendo así ciertas intuiciones sobre algunas propiedades analíticas que posteriormente hemos podido comprobar con el rigor matemático necesario, pero llegados a este punto, nos surge inmediatamente la siguiente pregunta: ¿Podemos obtener la función original conociendo su transformada de Fourier? Es decir, ¿existe algún proceso que invierta la transformada de Fourier de modo que recuperemos la función inicial? Y en caso de que la respuesta sea sí, ¿es válido para cualquier función? Pues bien, la respuesta a todas estas preguntas la encontramos en el siguiente teorema, conocido como “Teorema de Inversión de la transformada de Fourier”, cuya demostración podemos encontrar en [4] y [5].

Teorema 3.4.1 (*Teorema de Inversión de la transformada de Fourier*) Si f y \widehat{f} son integrables, es decir, pertenecen a $L^1(\mathbb{R})$ entonces

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad \text{c.t.p.}$$

Además, el término de la derecha es una función continua en x , por tanto f coincide en casi todo punto con una función continua y se da la igualdad en los puntos donde f es continua.

Vamos a visualizar este teorema aplicado a los ejemplos anteriores para seguir con la línea de este trabajo.

En primer lugar, veamos el ejemplo más sencillo, es decir, la última función que escogimos en el apartado anterior, la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$, cuya su transformada de Fourier es ella misma, es decir,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

3.4. TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Claramente la transformada es una función integrable puesto que es la misma función, por tanto podemos pedir al programa Mathematica que aplique el teorema de inversión del siguiente modo:

```
ftrans[u_] := Exp[-Pi * u^2]
inversion[x_] := Integrate[ftrans[u] * Exp[2 * Pi * I * x * u], {u, -Infinity, Infinity}]
inversion[x]

$$e^{-\pi x^2}$$

```

Efectivamente el teorema nos devuelve la misma función, de hecho si pedimos al programa que la represente, vamos a ver la misma gráfica que veíamos en el apartado anterior al pedirle al programa la gráfica de la función $f(x) = e^{-\pi x^2}$

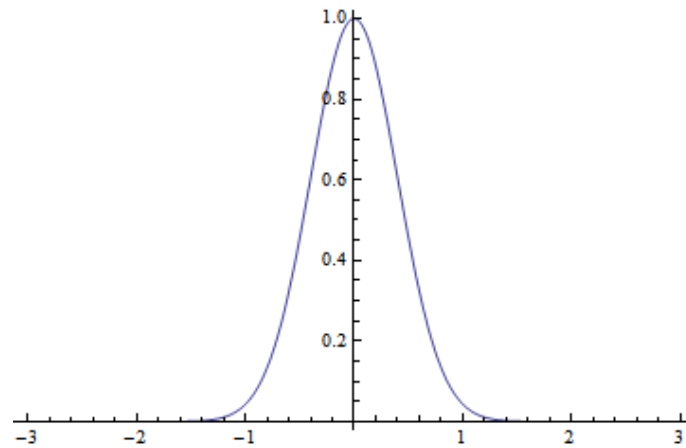


Figura 3.7: Gráfica de la función obtenida al aplicar el teorema de inversión a $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$.

Veamos ahora otro de los ejemplos anteriores, esta vez el de la función $f(x) = e^{-4\pi|x|}$ y recordemos que su transformada la habíamos calculado y era la función

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2}{4\pi + \pi\xi^2},$$

que es integrable, de modo que vamos a aplicar de nuevo el teorema de inversión con nuestro programa Mathematica

```
ftrans[u_] := 2 / (4 Pi + Pi * u^2)
inversion[x_] := Integrate[ftrans[u] * Exp[2 * Pi * I * x * u], {u, -Infinity, Infinity}]
inversion[x]
ConditionalExpression[e^{-4\pi Abs[x]}, x \in Reals]
```

3.4. TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Efectivamente, de nuevo tenemos que el teorema nos devuelve la función original y su gráfica coincide con la gráfica de la función $f(x) = e^{-4\pi|x|}$ que visualizábamos en el apartado anterior.

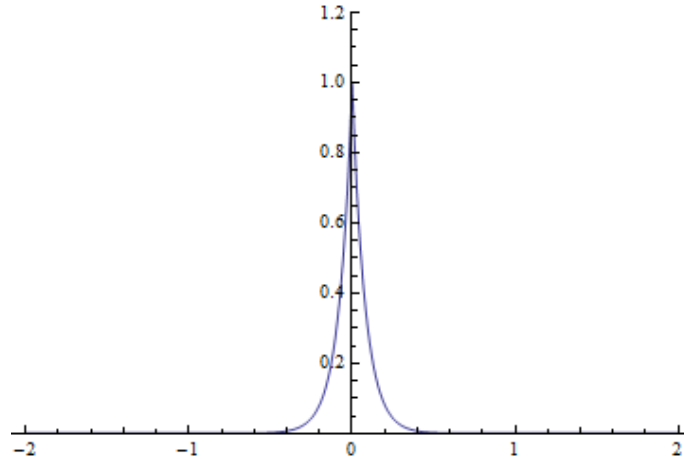


Figura 3.8: Gráfica de la función obtenida al aplicar el teorema de inversión a $\hat{f}(\xi) = \frac{2}{4\pi + \pi\xi^2}$.

De los ejemplos anteriores sólo nos quedaría por ver el caso de la función característica. Recordamos que habíamos elegido la función característica en el intervalo $[-1, 1]$, es decir,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , -1 \leq x \leq 1, \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases},$$

para la cual habíamos calculado su transformada de Fourier y habíamos obtenido la función

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\text{Sin}[2\pi\xi]}{\pi\xi}$$

Pero nos encontramos con que esta función pertenece a $L^1(\mathbb{R})$, por tanto no estamos en condiciones de aplicar el teorema de inversión ya que no cumple la hipótesis de que \hat{f} sea integrable, lo que nos lleva a preguntarnos, ¿será esta una condición necesaria?, es decir, ¿es imposible que la fórmula de inversión nos devuelva la función original si no se cumplen las hipótesis? Vamos a suponer que las condiciones del teorema son suficientes para que se cumpla, pero que no son necesarias, y vamos a pedir a nuestro programa Mathematica que aplique el teorema de inversión a la función $\hat{f}(\xi) = \frac{\text{Sin}[2\pi\xi]}{\pi\xi}$ y que nos proporcione su gráfica

3.4. TEOREMA DE INVERSIÓN DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

```
ftrans[u_] := Sin[2 Pi * u] / (Pi * u)
inversion[x_] := Integrate[ftrans[u] * Exp[2 * Pi * I * x * u], {u, -Infinity, Infinity}]
inversion[x]
ConditionalExpression[0, Im[x] == 0 && (Re[x] < -1 || Re[x] > 1)]
```

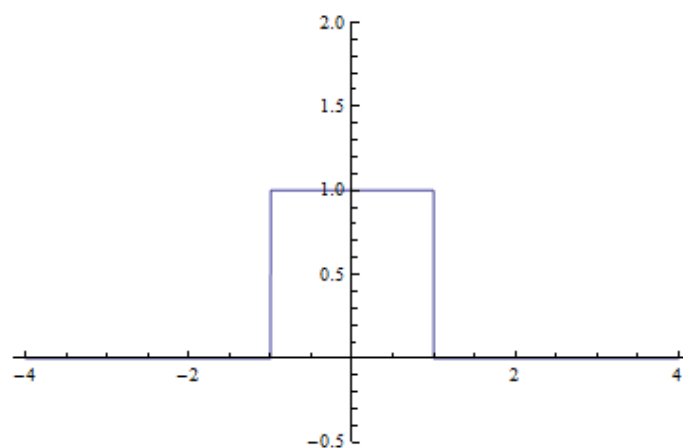


Figura 3.9: Gráfica de la función característica $f(x)$.

Para nuestra sorpresa, obtenemos la misma gráfica que para la función característica, a pesar de que no estábamos en las condiciones exigidas por el teorema de inversión, por tanto, mediante esta visualización, hemos podido comprobar que la hipótesis del teorema de que \hat{f} tiene que ser integrable es sólo una condición suficiente pero no es necesaria.

Bibliografía

- [1] Tom M. Apostol,
Análisis Matemático,
Reverté. 1960.
- [2] Sergio Cruz Blázquez,
Análisis de Fourier. Resumen de los apuntes de Antonio Cañada Villar,
Universidad de Granada, curso 2015/2016.
<https://www.ugr.es/acanada/docencia/maticas/analisisdefourier>
- [3] Antonio Cañada Villar,
Series de Fourier: un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos,
Pirámide, 2002.
- [4] Francisco J. Duoandikoetxea Zuazo,
Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier,
UNAN-Managua, 2003.
En: <https://www.ugr.es/~acanada/docencia/analisisdefourier/Duoandikoetxeafourier>
- [5] Francisco J. Duoandikoetxea Zuazo,
Fourier Analysis. Translated and revised from the 1995 Spanish original by D. Cruz-Uribe,
American Mathematical Society, Providence, RI, 2001
- [6] Edwin Hewitt y Robert E. Hewitt,
The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis,
Springer, 1979.
- [7] Roberto Rodríguez del Río, Enrique Zuazua,
Series de Fourier y fenómeno de Gibbs,
Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Complutense de Madrid.
En: https://verso.mat.uam.es/web/ezuazua/documentos_public
- [8] Murray R. Spiegel, John Liu, Lorenzo Abellanas,
Manual de fórmulas y tablas de Matemática aplicada,
McGraw-Hill, 2005.

- [9] Thomas William Körner,
Fourier Analysis,
Cambridge University Press, 1988.