CAPÍTULO IV: LA ECUACIÓN DEL POTENCIAL.[1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Extremos relativos para funciones de varias variables.
2. Teorema de la divergencia.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. http://mathworld.wolfram.com/

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudian las propiedades básicas de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1}$$

Esta ecuación surge cuando se estudian las soluciones de equilibrio (aquellas soluciones que no dependen del tiempo) de la ecuación de ondas y de la ecuación del calor. También aparece en otros tipos de problemas en Física, como se detalló en el capítulo de Introducción.
Las soluciones de la ecuación de Laplace (funciones de clase C^2 que satisfacen (1)) se denominan funciones armónicas. El primer resultado de interés es el siguiente principio.

[1] A. Cañada, Mayo 2010, EDPFISICAS

Teorema 1 Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas
Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta(u) = 0$ en Ω. Entonces

$$max_{\ \overline{\Omega}} \ u = max_{\ \partial\Omega} \ u, \quad min_{\ \overline{\Omega}} \ u = min_{\ \partial\Omega} \ u,$$

Además, si u no es contante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanzan en Ω.

El principio anterior motiva el estudio del problema de contorno (llamado problema de Dirichlet)

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), \ x \in \partial\Omega \end{array} \tag{2}$$

donde, en lo que sigue y salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω será un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. (2) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$.

El uso del método de separación de variables para (2) cuando $\Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1)$, es decir para el problema

$$\begin{array}{c} \Delta u(x,y) = 0, \ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \tag{3}$$

es especialmente interesante si se quiere hacer énfasis en los métodos de Fourier clásicos (suponemos f continua). Para ello, realizando un cambio a coordenadas polares (ρ, ϕ), llegamos a un problema del tipo

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{\rho} \ \dfrac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \ 0 < \rho < 1, \ \phi \in \mathbb{R}, \\ \\ u(1,\phi) = g(\phi), \ \phi \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{4}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función continua y 2π-periódica $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.
Buscando soluciones de (4) de la forma $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$, llegamos a los dos problemas siguientes de e.d.o.

$$\begin{array}{c} \rho R'(\rho) + \rho^2 R''(\rho) - \lambda R(\rho) = 0, \\ \\ \Phi''(\phi) + \lambda \Phi(\phi) = 0, \ \Phi \ 2\pi - \text{periódica} \end{array} \tag{5}$$

Los valores propios son ahora $\lambda_n = n^2, \ n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$. Así se calculan las llamadas soluciones elementales de (4) que son de la forma

$$u(\rho, \phi) = \rho^n (A_n cosn\phi + B_n senn\phi),$$

donde $\{A_n, B_n\}$ son números reales arbitrarios. En una etapa posterior se concluye que cuando $g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, (4) tiene una solución dada por

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n cos n\phi + B_n sen n\phi), \tag{6}$$

donde A_n, B_n son los coeficientes de Fourier de g, respecto de la base trigonométrica usual en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Es decir

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi)\ d\phi,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) cos n\phi\ d\phi,\ \forall\ n \in \mathbb{N},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) sen n\phi\ d\phi,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fórmula (6) tiene la ventaja de que la solución viene dada por una serie, lo que puede utilizarse para procedimientos de aproximación. Además, dicha fórmula puede usarse para calcular la solución del problema de Dirichlet para diversas funciones g concretas (fundamentalmente del tipo $sen^n \phi, cos^m \phi$, o productos y combinaciones lineales finitas de ellas).

La serie (6) se puede sumar, llegándose al final a la fórmula de Poisson en dimensión dos:

$$u(\rho, \phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho cos(\phi - \psi) + 1} g(\psi)\ d\psi,\ \rho < 1, \\ g(\phi),\ \rho = 1. \end{cases}$$

Usando el concepto de integral de línea puede probarse que la fórmula anterior se transforma en

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{|s|=1} \frac{1 - |x|^2}{|s-x|^2}\ f(s)\ ds,\ x \in \Omega = B_{\mathbb{R}^2(0;1)}, \\ \\ f(x),\ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

que proporciona la única solución del problema de Dirichlet en coordenadas euclídeas en dimensión dos.

El problema de Dirichlet cuando $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$ y $n \geq 3$, es mucho más complicado.

Teorema 2 *Sea $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;1)$ y f una función continua en $\partial\Omega$. Entonces, la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de (2) es*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\omega_n} \displaystyle\int_{|s|=1} \dfrac{1-|x|^2}{|s-x|^n}\, f(s)\; ds, \;\; x \in \Omega, \\ \\ f(x), \;\; x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Nota. La esfera $n-1$ dimensional, S^{n-1}, se define como

$$S^{n-1} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1\}$$

y ω_n es el área de la misma (longitud si $n = 2$.) Por tanto

$$\omega_n = \int_{S^{n-1}} 1 \; ds$$

Puede probarse que $\omega_n = n v_n$, donde v_n es el volumen de la bola unidad de $\mathbb{R}^n$. La fórmula explícita que proporciona v_n es

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}, \;\; \text{si} \;\; n \;\; \text{es par}, \\ \\ \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot ... n}, \;\; \text{si} \;\; n \text{ es impar} \end{cases}$$

Nota. A la función

$$K(x,s) = \frac{1}{\omega_n}\,\frac{1-|x|^2}{|s-x|^n}$$

se le llama **núcleo de Poisson**.

Mediante un cambio de variable trivial, se puede resolver (2) en cualquier $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a;R), \; a \in \mathbb{R}^n, \; R > 0$.

Corolario 3 *Si $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(a;R)$ y f es continua en $\partial\Omega$, la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ de (2) es*

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{R\omega_n} \displaystyle\int_{|s-a|=R} \dfrac{R^2-|x-a|^2}{|s-x|^n}\, f(s)\; ds, \;\; x \in \Omega, \\ \\ f(x), \;\; x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

El capítulo continúa con el estudio de la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x) = g(x),\ x \in \Omega, \tag{9}$$

donde, salvo que explícitamente se indique otra cosa, Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función medible. Conviene en primer lugar, con el objeto de conseguir la máxima simplicidad en las expresiones, definir la función Γ (llamada solución fundamental normalizada), como

$$\Gamma(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ ln\ |x-y|, & n = 2, \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}\ \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3. \end{cases} \tag{10}$$

Definición 4 *Si g es acotada en Ω, se llama* **potencial Newtoniano (o potencial de volumen) de densidad** g, *a la función $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por*

$$w(x) = \int_\Omega \Gamma(x,y)g(y)\ dy. \tag{11}$$

Lema 5 *Sea w el potencial de volumen definido por (11). Entonces $w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ y para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$D_i w(x) = \int_\Omega D_i\Gamma(x,y)g(y)\ dy,\ i = 1, \dots, n,$$

donde $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i},\ i = 1, \dots, n.$

Sorprendentemente la continuidad de g no es suficiente para conseguir que el potencial (11) sea de clase $C^2(\Omega)$. De hecho, si se intenta como en el lema previo probar que, dada g acotada, el potencial (11) es $C^2(\Omega)$ y que

$$D_{ij}w(x) = \int_\Omega D_{ij}\Gamma(x,y)g(y)\ dy,$$

donde $D_{ij} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, el primer problema que surge es la existencia de las integrales anteriores; es más, dichas integrales no tienen que existir necesariamente, exigiendo sólo que g sea acotada.

Así pues, para poder demostrar que el potencial Newtoniano es $C^2(\Omega)$, es necesario exigir "algo más de regularidad" a la función densidad g.

Lema 6 *Sea g acotada y $C^1(\Omega)$. Si w es el potencial (11), se tiene que $w \in C^2(\Omega)$. Además,*

$$\Delta w(x) = g(x), \ \forall \ x \in \Omega$$

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. I, Peral: Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, 1995.

2. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. El método de separación de variables puede usarse para estudiar una amplia clase de problemas: el problema de Dirichlet en el exterior de una bola, el problema de Dirichlet en un rectángulo, el problema de Dirichlet para un anillo circular, etc. Se puede consultar para ello la referencia: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

2. Recordemos que cuando se buscan soluciones radiales de la ecuación de Laplace, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$u''(r) + \frac{n-1}{r} \ u'(r) = 0 \tag{12}$$

donde $r = \left[(x_1 - \xi_1)^2 + ... + (x_n - \xi_n)^2\right]^{1/2}$. De manera más precisa, si $\xi \in \mathbb{R}^n$ es dado y $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(|x-\xi|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o. (12). Recíprocamente, si v verifica (12) entonces $u(x) = v(|x - \xi|)$ verifica (1) en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$. Aquí, $|\cdot|$ indica la norma euclídea en $\mathbb{R}^n$.

Es claro que cualquier función constante es solución de (12). Además de éstas, las funciones $\ln\ r$ y r^{2-n} (o cualquier múltiplo de ellas) son, para $n = 2$ y $n \geq 3$ respectivamente, solución de (12). Estas últimas soluciones son las que definen la solución fundamental de (1).

Definición 7 *La solución fundamental de (1) es la función*

$$\Phi(x, y) = \begin{cases} \ln \dfrac{1}{|x-y|}, & n = 2, \\ \\ \dfrac{1}{n-2} \dfrac{1}{|x-y|^{n-2}}, & n \geq 3, \end{cases} \tag{13}$$

Observemos que la solución fundamental es una función simétrica y que, fijado $y \in \mathbb{R}^n$, la función $\Phi(x,y)$ es armónica en $\mathbb{R}^n - \{y\}$.

A continuación vamos a enunciar las **fórmulas de** *Green* para el operador laplaciano Δ. En adelante, Ω denotará un dominio acotado y regular (es decir, con frontera regular) de $\mathbb{R}^n$; denotaremos por $n(s)$ al vector normal exterior a Ω en cada punto $s \in \partial\Omega$.

Teorema 8 *Si* $u, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, *se tiene*

a) (primera fórmula de Green)

$$\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) + < \nabla u(x), \nabla v(x) > \,]\; dx = \int_{\partial\Omega} u(s) \frac{\partial v(s)}{\partial n(s)}\; ds, \tag{14}$$

donde

$$\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} = < \nabla v(s), n(s) >$$

y $<,>$ *indica el producto escalar usual en* $\mathbb{R}^n$.

b)(segunda fórmula de Green).

$$\begin{aligned} &\int_\Omega [u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)]\; dx = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[u(s)\frac{\partial v(s)}{\partial n(s)} - v(s)\frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \right]\; ds \end{aligned} \tag{15}$$

Para la demostración de la parte a), considérese el campo vectorial $A : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $A(x) = u(x)\nabla v(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}$. Por el Teorema de la divergencia se tiene que

$$\int_\Omega div A(x)\; dx = \int_{\partial\Omega} < n(s), A(s) > \; ds$$

lo que da (14). Para la parte b), simplemente aplíquese a) intercambiando los papeles de u y v y réstense después ambas expresiones.

Las fórmulas de *Green* permiten probar uno de los principales resultados de este tema: **la fórmula fundamental integral de** *Green*. En ella se va a representar cualquier función $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ y armónica en Ω, como suma de dos términos en los que aparecen la solución fundamental (13) y los valores de u y de $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ en $\partial\Omega$.

Teorema 9 *Si $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es una función armónica en Ω, entonces:*

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u(y)}{\partial n(y)} \Phi(x,y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial n(y)} \right] \; ds(y) \tag{16}$$

para cualquier $x \in \Omega$, donde ω_n es el área de S^{n-1}, esfera $n-1$ dimensional de radio 1 en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$.

La fórmula (16) permite probar la **propiedad del valor medio para funciones armónicas.** Previamente conviene tener en cuenta las relaciones siguientes:

a) El volumen en $\mathbb{R}^n$ de cualquier bola de radio R está dado por $R^n v_n$, donde v_n es el volumen de cualquier bola de radio 1.

b) El área en $\mathbb{R}^n$ de cualquier esfera de radio R está dado por $R^{n-1}\omega_n$, donde ω_n es el área de cualquier esfera de radio 1.

Recordemos además que

$$\begin{array}{c} B_{\mathbb{R}^n}(x;R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| \leq R\} \\ S_{\mathbb{R}^n}(x;R) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y-x| = R\} \end{array}$$

Teorema 10 *Sean $x \in \mathbb{R}^n$, $R > 0$, y u cualquier función armónica en $B_{\mathbb{R}^n}(x;R)$ y continua en $\overline{B_{\mathbb{R}^n}(x;R)}$. Entonces*

$$\begin{array}{c} u(x) = \frac{1}{volumen\ (B_{\mathbb{R}^n}(x;R))} \int_{B_{\mathbb{R}^n}(x;R)} u(y) \; dy = \frac{n}{\omega_n R^n} \int_{|y-x| \leq R} u(y) \; dy \\ u(x) = \frac{1}{área\ (S_{\mathbb{R}^n}(x;R))} \int_{S_{\mathbb{R}^n}(x;R)} u(s) \; ds = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s) \; ds \end{array} \tag{17}$$

Demostración: Sea $\rho \in (0,R)$. Utilizando (16) deducimos

$$u(x) = \frac{c}{\omega_n} \int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)} \; ds + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|x-y|=\rho} u(s) \; ds,$$

donde c es una constante real. Ahora bien, de la segunda fórmula de *Green* se obtiene fácilmente que

$$\int_{|x-y|=\rho} \frac{\partial u(s)}{\partial n(s)}\ ds = 0.$$

Luego

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y-x|=\rho} u(s)\ ds.$$

Ahora tenemos una doble opción:
a) Tomar límites en la expresión anterior cuando $\rho \to R$, obteniéndose

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n R^{n-1}} \int_{|y-x|=R} u(s)\ ds$$

que es la segunda igualdad de (17).
b) Multiplicar por ρ^{n-1} e integrar, respecto de ρ, entre 0 y R, llegándose en este caso a la primera igualdad de (17).

De las fórmulas previas se deduce inmediatamente el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

3. En problemas variacionales relacionados con EDP, el principio de Dirichlet suele considerarse el punto de partida. Para ello, sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema de contorno

$$\left. \begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{array} \right\} \tag{18}$$

Lo que se trata es del estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f, en la frontera de Ω.

En el estudio de este problema desde el punto de vista variacional, se considera el llamado funcional de energía:

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2\, dx = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \tag{19}$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = f \right\} \tag{20}$$

(o un conjunto más amplio que se precisará en su momento). En electrostática, u es el potencial eléctrico y $F(u)$ la energía.

Los puntos estacionarios de F son, en algún sentido que se ha de precisar, soluciones del problema (18) (principio de Dirichlet).

EJERCICIOS

1. Encontrar la única solución del problema de Dirichlet

$$\Delta u(x,y) = 0,\ x^2+y^2<1;\quad u(x,y)=f(x,y),\ x^2+y^2=1,$$

para las siguientes condiciones de contorno:

a) $f(x,y) = a+by,\ a,b \in \mathbb{R}$

b) $f(x,y) = axy,\ a \in \mathbb{R}$

c) $f(x,y) = x^2$

d) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Las condiciones frontera que siguen se dan en coordenadas polares

e) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = c\cos\varphi$

f) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = a + b\mathrm{sen}\varphi$

g) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = a\mathrm{sen}^2\varphi + b\cos^2\varphi$

h) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \sin^3\varphi.$

i) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^4\varphi.$

j) $f(\cos\varphi, \sin\varphi) = \cos^6\varphi + \sin^6\varphi.$

2. Escribir la ecuación de Laplace tridimensional en coordenadas cilíndricas.

3. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=0,\ u(x,0)=0,\ u(x,1)=f(x) \end{gathered}$$

4. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<\pi, \\ u(0,y)=0,\ u(\pi,y)=y(\pi-y),\ u(x,0)=0,\ u(x,\pi)=0 \end{gathered}$$

5. Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered} u_{xx}+u_{yy}=0,\ 0<x<\pi,\ 0<y<1, \\ u_x(0,y)=0,\ u_x(\pi,y)=0,\ u(x,0)=\cos x,\ u(x,1)=\sin^2 x. \end{gathered}$$

6. *a*) Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{21}$$

y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado. Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \xi)$ es solución de (21) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{22}$$

Recíprocamente, si v verifica (22) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (21) en $\mathbb{R}^n \setminus \xi$. Encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (22).

b) Usando el apartado anterior, pruébese que la solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x, \xi) = \begin{cases} \ln \|x - \xi\|, \ \text{si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n} \|x - \xi\|^{2-n}, \ \text{si } n > 2. \end{cases} \tag{23}$$

es una función armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$.

7. Calcúlese la única solución del problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$\Delta u(x, y, z) = g(x, y, z), \ (x, y, z) \in \Omega; \quad u(x, y, z) = 0, \ (x, y, z) \in \partial\Omega,$$

para los casos siguientes:

a) $g(x, y, z) = 1, \quad \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a), \ a > 0.$

b) $g(x, y, z) = Ar + B, \ A, B \in \mathbb{R}, \ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \ \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a), \ a > 0.$

c) $g(x, y, z) = 1, \ \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0; a) \setminus B_{\mathbb{R}^3}(0; b), \ a > b > 0.$

8. (**Examen de Caminos, 03/02/2005**)

a) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{24}$$

Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (24) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{25}$$

Recíprocamente, si v verifica (25) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (24) en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

b) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x,y) = 1,\ b^2 < x^2 + y^2 < a^2,$$
$$u(x,y) = 0, \text{ si } x^2 + y^2 = b^2 \text{ ó } x^2 + y^2 = a^2$$

9. (**Examen de Caminos, 07/09/2005**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) &= f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{26}$$

Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi$, el problema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\phi^2} &= 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathbb{R}, \\ u(1,\phi) &= g(\phi),\ \phi \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{27}$$

donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.

10. (**Examen de Caminos, 07/09/2005**) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$u_{xx} + u_{yy} = 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi,$$
$$u(0,y) = 0,\ u(1,y) = f(y),\ u(x,0) = 0,\ u(x,\pi) = 0$$

11. (**Examen de Caminos, 03/02/06**)

a) Enúnciese de manera precisa el Principio del Máximo-Mínimo para funciones armónicas (o para la ecuación de Laplace).

b) Demuéstrese que si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio acotado y las funciones $u_1, u_2 \in C^2(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$ satisfacen

$$\begin{aligned} &\Delta u_1(x) = \Delta u_2(x)\,, && \text{si } x \in \Omega \\ &u_1(x) \le u_2(x)\,, && \text{si } x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

entonces se verifica $u_1(x) \le u_2(x)\,,\quad \forall x \in \overline{\Omega}$.

c) Sea Ω el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Usando el apartado anterior, demuéstrese que

$$xy^3 + x^2 + y \le x^3y + y^2 + x\ ,\quad \forall (x,y) \in \overline{\Omega}.$$