FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, primer examen parcial, 31/03/2009.

1. Considérese el problema

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + h(x,t),\ a \le x \le b,\ t \ge 0 \\ u(x,0) = f(x),\ a \le x \le b;\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x),\ a \le x \le b \\ u(a,t) = n(t),\quad u(b,t) = m(t),\ t \ge 0.\end{gathered} \tag{1}$$

   (a) (**3 puntos**) Defínase la energía de la onda $u(x,t)$ y pruébese rigurosamente que si $h \equiv 0, n(t) \equiv 0$ y $m(t) \equiv 0$, dicha energía es una constante k. ¿Cuánto vale la constante k?

   (b) (**1 punto**) Usando el apartado anterior, pruébese que cuando los datos h, f, g, n y m son generales, (1) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([a,b] \times [0,+\infty))$.

   (c) (**4 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x + \operatorname{sen} x, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= \operatorname{sen} x - 3\operatorname{sen}(5x) + \cos x + \frac{2}{\pi}x - 1, && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.\end{aligned}$$

2. Considérese el problema de Cauchy (o de valores iniciales)

$$u_{xt}(x,t) = f(x,t),\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = \beta(x),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2, \tag{2}$$

   con $f \in C(\mathrm{R}^2)$, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$.

   (a) (**0.5 puntos**) Demuéstrese que si (2) tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$, entonces $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\, x \in \mathrm{R}$.

   (b) (**1.5 puntos**). Pruébese que si $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\, x \in \mathrm{R}$, entonces (2) tiene infinitas soluciones.