CAPÍTULO III: LA ECUACIÓN DEL CALOR [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una e.d.o.

2. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

3. Teorema de derivación de integrales paramétricas.

4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $C^1[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. Si $x_0 = b$, entonces $f'(x_0) \geq 0$.

5. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $C^2[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.

2. A. Cañada. Series de Fourier y aplicaciones: un tratado elemental con notas históricas y ejercicios resueltos. Pirámide, Madrid, 2002.

3. http://mathworld.wolfram.com/

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El capítulo comienza con el estudio del problema de Cauchy, o problema de valores iniciales, para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \Delta_x u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) &= \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{1}$$

[1] A. Cañada, Abril 2010, EDPFISICAS

Aquí,

$$\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$$

Si $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$, una solución de (1) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifica (1) puntualmente. En consonancia con esto, suponemos $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$. Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada. Una versión de este principio es el objeto del próximo teorema.

Teorema 1 . *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifica*

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \Omega, \tag{2}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}}\ u = \max_{\partial_1 \Omega}\ u,\quad \min_{\overline{\Omega}}\ u = \min_{\partial_1 \Omega}\ u, \tag{3}$$

donde $\partial_1 \Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_1(\Omega) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \leq t \leq T\}\ \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

Demostremos, por ejemplo, el principio del máximo. Se recomienda encarecidamente al alumno que, previamente, pinte las situaciones:

1. $n = 1,\ \omega = (a,b)$,
2. $n = 2$, ω un círculo arbitrario.

con el objeto de familiarizarse con la noción de frontera parabólica. Véase también, la última página de estas notas, donde se muestran algunos dibujos para clarificar el concepto de frontera parabólica.

La demostración consta de varias etapas:

1. Primero se considera la situación donde se tiene una desigualdad estricta negativa en (2) y el dominio es

   $$\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}.$$

   Es decir,
   $$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) < 0,\ \forall\ (x,t) \in \Omega_\varepsilon$$

   En este caso, sea $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}}\ u$. Entonces necesariamente $(x_0,t_0) \in \partial_1 \Omega_\varepsilon$. En efecto, si no fuese así, entonces caben dos posibilidades

a) $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$. Entonces se tiene

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \ \forall \ i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto,

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (2).

b) (x_0, t_0) es tal que $x_0 \in \omega$ y $t_0 = T - \varepsilon$. Entonces se tiene

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \ \forall \ i \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, de nuevo tenemos

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (2).

En resumen, en esta primera etapa hemos probado que si tenemos una desigualdad estricta negativa en (2), entonces

$$\max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} \ u = \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} \ u.$$

2. En una segunda etapa, hacemos tender ε a cero por la derecha, obteniendo que, si tenemos una desigualdad estricta negativa en (2), entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} \ u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} \ u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} \ u = \max_{\partial_1 \Omega} \ u$$

3. Para el caso en el que en (2) se tiene una igualdad, se considera la función auxiliar $v^k(x,t) = u(x,t) - kt$, con k positivo. Entonces

$$v^k_t - \Delta_x v^k = u_t - \Delta_x u - k = -k < 0.$$

Por lo anterior, tendremos que

$$\max_{\overline{\Omega}} \ v^k = \max_{\partial_1 \Omega} \ v^k.$$

Si ahora se hace tender k a cero por la derecha, tendremos (3).

Usando el principio del máximo-mínimo en dominios de la forma $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0; R) \times (0, T)$, puede probarse la unicidad de soluciones acotadas de (1). En efecto, tenemos el resultado siguiente.

Lema 2. *El problema de Cauchy (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada.*

Si (1) tuviese dos soluciones acotadas, entonces la diferencia de ambas verifica un problema como (1) con $\varphi \equiv 0$. Así pues, el lema estaría demostrado si probamos que, en el caso $\varphi \equiv 0$, la única solución acotada de (1) es la función idénticamente cero.
Estas son las principales ideas para el caso $n = 1$ (la modificación para el caso n general es obvia). Sea u una solución acotada de (1). Entonces existe alguna constante positiva M tal que $|u(x,t)| \leq M, \ \forall \ x \in \mathbb{R}, \ \forall \ t \geq 0$. Consideremos ahora el dominio $A = (-l, l) \times (0, T)$ con $l > 0$ y la función

$$v(x,t) = \frac{2M}{l^2} \left(\frac{x^2}{2} + t \right).$$

Es fácil comprobar que v es solución del calor en el dominio A y que en la frontera parabólica de A se tienen las desigualdades $-v \leq u \leq v$, o lo que es lo mismo, $|u| \leq v$. Por el principio del máximo-mínimo tendríamos que $|u| \leq v$ en $\overline{A}$. Si ahora hacemos $l \to +\infty$, tendríamos que $u \equiv 0$.

La existencia de soluciones acotadas de (1) es cosa aparte. Por cierto, que para motivar la fórmula que define la solución se usan algunas nociones elementales de la transformada de Fourier. De hecho, esta es una de las motivaciones más bonitas que conozco de la noción de transformada de Fourier, donde se pone de manifiesto el paso del caso discreto (series), al caso continuo (transformada integral). Las ideas fundamentales son las siguientes:

En primer lugar, simplificamos la situación suponiendo que $n = 1$ y que para φ acotada, buscamos soluciones u acotadas. La búsqueda de soluciones de la forma particular $u(x,t) = X(x)T(t)$, da lugar a las e.d.o.

$$X''(x) \ - \ \lambda X(x) = 0, \ x \in \mathbb{R},$$

$$T'(t) \ - \ \lambda T(t) = 0, \ t > 0.$$

Es elemental probar que la primera ecuación tiene soluciones no triviales acotadas si y solamente si $\lambda \leq 0$, de tal manera que, en adelante, sólo nos interesarán estos valores del parámetro λ. Así pues, las anteriores ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$X''(x) \ + \ \lambda^2 X(x) = 0, \ x \in \mathbb{R},$$

$$T'(t) \ + \ \lambda^2 T(t) = 0, \ t > 0.$$

Esto permite afirmar que, para λ un número real cualquiera, la función

$$A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}$$

con $A(\lambda)$ una constante (que depende de λ), es una solución (compleja) acotada de la ecuación del calor.
Si la función $\varphi(x)$ fuese de la forma $\varphi(x) = c\, e^{i\lambda x}$ para algún λ y c reales, el problema estaría resuelto; ahora bien, esto no es así en general, de tal forma que la pregunta básica puede ser la siguiente:
¿ Será posible calcular la (única) solución acotada de (1) teniendo en cuenta de alguna manera todas las soluciones acotadas anteriores?. Una manera intuitiva de hacer esto es "sumar" todas las soluciones, es decir, considerar la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}\, d\lambda,$$

donde $A(\lambda)$ se debe escoger para que

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x}\, d\lambda.$$

De la teoría de Transformada de Fourier se sabe que, cuando φ y A cumplen algunas condiciones adicionales (por ejemplo, $\varphi, A \in L^1(\mathbb{R})$), entonces

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y}\, dy.$$

Sustituyendo la anterior expresión, agrupando convenientemente y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2}\, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\, du = (\pi)^{1/2}, \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R},$$

llegamos finalmente a que la única solución acotada de (1) podría ser (esto hay que confirmarlo rigurosamente) la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,t)\varphi(\xi)\, d\xi, \quad \text{para} \quad t > 0,$$

donde

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

Para n arbitrario, la función que se obtiene en el proceso anterior, es

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

a la que se llama núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor.
El teorema de existencia de soluciones acotadas de (1) queda como sigue.

Teorema 3. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, la única solución acotada de (1) viene dada por la fórmula*

$$u(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x-\xi\|^2/4t)\varphi(\xi)\ d\xi, \ t > 0, \\ \varphi(x), \ t = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Además, u es de clase C^∞ para $t > 0$.

La demostración usa las siguientes propiedades (de comprobación inmediata) del núcleo K :
1) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.
2) $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x,\xi,t) = 0, \ \forall\ t > 0.$
3) $K(x,\xi,t) > 0, \ \forall\ t > 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi,t)\ d\xi = 1, \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\ t > 0.$
4) Para cualquier $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\|\xi - x\| > \delta} K(x,\xi,t) = 0,$$

de manera uniforme para $x \in \mathbb{R}^n$.

Una vez puestas de manifiesto las propiedades básicas de K, la comprobación de que $u \in C^\infty(\Omega)$ es trivial así como que u satisface el problema (1). La continuidad de u en $\overline{\Omega}$ puede probarse teniendo en cuenta la igualdad

$$u(x,t) - \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)(\varphi(y) - \varphi(\xi))\ dy$$

y a continuación expresando la integral anterior como suma de dos sumandos, donde en el primero de ellos, ξ está "cerca"de x; por último, teniendo en cuenta la continuidad de φ se prueba que $u \in C(\overline{\Omega})$.

El capítulo continua con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi, \ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi. \end{aligned} \tag{C2}$$

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: Tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a $0°$ centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.
Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, donde se sustituye el hecho de que la varilla se mantenga en sus extremos a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados.

La ecuación en derivadas parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{C}$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto lo probamos con detalle en este capítulo. No obstante, también se puede intuir desde el principio alguna diferencia cualitativa importante en lo que se refiere al comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a $+\infty$) de las soluciones de ambos problemas: mientras que para (C1) se tendrá $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, para (C2) se cumple $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = b$, constante que, en general, no es cero.

Designemos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega)$$

y que satisface (C1) puntualmente. Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse fácilmente que (C1) tiene, a lo sumo, una solución.

Pasemos a continuación a comentar el tema de la existencia de soluciones de (C1). El proceso es similar al que se realiza para la ecuación de ondas. En una primera etapa, usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de (C1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Así obtenemos el problema de valores propios

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi],\ X(0) = X(\pi) = 0, \qquad (PVP1)$$

y la familia uniparamétrica de e.d.o.

$$T'(t) - \mu T(t) = 0,\ t \in (0,T].$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) tiene solución no trivial. Así, diremos que μ es valor propio de (PVP1) si (PVP1) admite alguna solución no trivial.
La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado μ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:
- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1,\ X^2(x) = x,\ \forall\ x \in [0,\pi]$.
- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x),\ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.
- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = cos(\sqrt{-\mu}x),\ X^2(x) = sen(\sqrt{-\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

Cualquier solución de (PVP1) es de la forma $X(x) = c_1X^1(x) + c_2X^2(x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:
- Si $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2\pi &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).
- Si $\mu > 0$,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).
- Si $\mu < 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2 sen(\sqrt{-\mu}\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall\ x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto $\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall\ x \in [0, \pi]$.
El método de separación de variables permite calcular la única solución de (C1) en casos sencillos que son aquellos en los que la función f de (C1) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, .., n_m$, números naturales distintos. En estos casos, la única solución de (C1) es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \sin(n_i x) \exp(-n_i^2 t), \ \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

En una segunda etapa, usando tales casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \sin(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

probamos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1):

Teorema 4. *Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (C1) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \exp(-n^2 t), & si \ \ t > 0, \\ f(x), & si \ \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\ dx, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A continuación mostramos algunas propiedades referentes al comportamiento cualitativo de la solución: dependencia continua de la única solución de (C1) respecto de la temperatura inicial f, regularidad C^∞ de tal solución para cualquier tiempo positivo y el hecho de que, sea cual sea la temperatura inicial, la única solución de (C1) tiende a cero cuando el tiempo diverge a $+\infty$.

En lo que respecta al problema (C2), una solución es cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (C2) puntualmente. Respecto de la unicidad de soluciones, el principio del máximo-mínimo no parece ahora directamente aplicable, puesto que las condiciones de contorno, para $x = 0$ y $x = \pi$, son distintas de las consideradas en (C1). La idea básica para demostrar la unicidad de soluciones de (C2) es considerar una cierta integral de energía, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x} \right)^2\ dx \right]\ ds$$

Puede demostrarse que si u es cualquier solución de (C2), entonces $E(t)$ es constante. Como consecuencia se obtiene trivialmente que (C2) puede tener, a lo más, una solución.

Nuevamente, aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos, y usando éstos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2):

Teorema 5 . *Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \exp(-n^2 t), & si\ \ t > 0, \\ f(x), & si\ \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probamos, además, algunas propiedades sobre la dependencia continua de la única solución de (C2), respecto de la temperatura inicial f. Asimismo, se cumple en este caso la regularidad C^∞ de las soluciones, para cualquier tiempo positivo. En cambio, el comportamiento asintótico de las soluciones es ahora distinto del mostrado para el problema (C1). Para (C2) demostramos que, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, las soluciones convergen a una constante, en general no nula. Esto se corresponde con el hecho de que, al estar en (C2) los extremos y la superficie lateral de la varilla aislada, entonces no puede entrar ni salir calor de la misma, con lo que éste no se pierde; lo que sí tiende es a difundirse el calor, de manera homogénea, por la varilla.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.
2. H.F. Weinberger. Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Reverté, 1986.
3. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. En este capítulo se han estudiado dos problemas de tipo mixto para la ecuación del calor. En ambos se daba como dato inicial una determinada temperatura f. Además, en el primero de ellos se suponía conocida la temperatura en los extremos de $[0, \pi]$, mientras que en el segundo se daba como dato el flujo de calor a través de tales extremos. La clave para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se ha encontrado en el hecho de que, en ambos casos, la temperatura inicial admitía un desarrollo en serie, usando precisamente como sumandos de tal desarrollo las funciones propias de los problemas de valores propios correspondientes.
   Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, en un extremo de la varilla puede darse como dato la temperatura en cualquier tiempo, y en el otro, el flujo de calor, o incluso una combinación de ambos. Además, se puede suponer que la superficie lateral de la varilla no está aislada, de tal forma que puede entrar o salir calor. La intuición física sugiere que tales problemas han de tener solución única. Otra cosa es demostrarlo rigurosamente.

   Desde el punto de vista matemático, los problemas citados se pueden plantear de la forma

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \\ \alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = a(t),\ 0 < t \le T, \\ \beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = b(t),\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (sl1)$$

   donde f representa la temperatura inicial y la presencia de g significa que hay una fuente externa de calor, mientras que las otras dos condiciones en $(sl1)$ son condiciones de contorno que combinan la temperatura y el flujo de calor en los extremos de la varilla (u_x indica la función derivada parcial de u, respecto de la variable x).

   Bajo ciertas restricciones de regularidad sobre las funciones f, g, a y b, y sobre el signo de los coeficientes $\alpha_i, \beta_i,\ 1 \le i \le 2$, puede demostrarse, bien usando

el método de la energía, bien usando principios del máximo adecuados, que $(sl1)$ tiene, a lo más, una solución. Ya sabemos que a continuación viene la siguiente pregunta: ¿también a lo menos? Esto es harina de otro costal. No todos los problemas de la forma $(sl1)$ pueden resolverse por el método de separación de variables; pero combinando éste con otros métodos (como aquellos que buscan la solución como suma de dos más elementales, una de ellas estacionaria), puede resolverse un buen número de problemas similares a $(sl1)$. Se puede consultar para ello la bibliografía recomendada (especialmente H.F. Weinberger o A.N. Tijonov-A.A. Samarsky).
En general, la aplicación del método de separación de variables a aquellos problemas como $(sl1)$ que sean adecuados conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h, definida en $[0, \pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno de la forma:

$$\begin{array}{c} Z''(x) - \lambda Z(x) = 0, \ x \in [0, \pi], \\ \gamma_1 Z(0) + \gamma_2 Z'(0) = 0, \\ \delta_1 Z(\pi) + \delta_2 Z'(\pi) = 0, \end{array} \qquad (sl2)$$

donde $\gamma_i, \delta_i, \ 1 \leq i \leq n$, son constantes dadas.
Los problemas de contorno como $(sl2)$, donde las condiciones de contorno aparecen por separado, en los dos puntos extremos de $[0, \pi]$, se llaman problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. Sorprendentemente, el conjunto de funciones propias de $(sl2)$, convenientemente ortonormalizado, forma siempre (con ciertas restricciones sobre los coeficientes $\gamma_i, \delta_i, \ 1 \leq i \leq n$) una base del espacio $L^2[0, \pi]$.

EJERCICIOS

1. El núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor se define como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}$$

en dimensión uno y como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

para dimensión n arbitraria. Aquí, $\|x - \xi\|^2$ representa el cuadrado de la norma euclídea del vector $x - \xi$, es decir, si $x = (x_1, \ldots, x_n), \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, entonces

$$\|x - \xi\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \xi_i)^2$$

Pruébese que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, el núcleo $K(x, \xi, t)$, como función de las variables (x, t) es solución de la ecuación del calor para $t > 0$, es decir que se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x, \xi, t) = 0, \ \forall \ t > 0.$$

2. Encontrar la única solución acotada de los problemas siguientes:

   a) $u_t = u_{x_1x_1}, \ u(x_1, 0) = \cos x_1, \ t \geq 0$. Solución: $u(x_1, t) = \cos x_1 e^{-t}$.

   b) $u_t = \Delta_{(x_1x_2)}u, \ u(x_1, x_2, 0) = \cos(x_1 + x_2), \ t \geq 0$. Solución: $u(x_1, x_2, t) = \cos(x_1 + x_2)e^{-2t}$.

   c) $u_t = \Delta_{(x_1 \ldots x_n)}u, \ u(x_1, ..., x_n, 0) = \cos(x_1 + ... + x_n), \ t \geq 0$. Solución: $u(x_1, \ldots, x_n, t) = \cos(x_1 + \ldots + x_n)e^{-nt}$.

   d) $u_t = u_{x_1x_1}, \ u(x_1, 0) = \cos x_1 - 5\sin(8x_1) + 3\cos(\sqrt[4]{5}x_1), \ t \geq 0$. Solución: $u(x_1, t) = \cos x_1 e^{-t} - 5\sin(8x_1)e^{-64t} + 3\cos(\sqrt[4]{5}x_1)e^{-\sqrt{5}t}$. Intenta generalizar este resultado para datos $u(x_1, 0)$ más generales.

   e) $u_t = u_{xx}, \ u(x, 0) = \exp(-\lambda x^2), \ x \in \mathbb{R}, \ t \geq 0, \ \lambda > 0$. Solución: $u(x, t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 4\lambda t}} e^{-\dfrac{\lambda x^2}{1 + 4\lambda t}}$. Intenta generalizar este resultado para datos $u(x, 0)$ más generales.

3. (**Examen del 21/12/2005**)

   a) Escríbase de manera precisa la formulación de **problema de Cauchy para la ecuación del calor** $n-$**dimensional**, así como el concepto de solución del mismo.

   b) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución.

   c) Calcúlese la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{array}{c} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t), \ x \in \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(x, 0) = \exp(-3x^2), \ x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{5}$$

4. Calcúlese la única solución de

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, \ 0 < t \leq T, \\ u(0, t) & = & u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array} \tag{6}$$

   si $f(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{2x}{\pi}$.

5. Calcúlese la única solución de (6) si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

6. (**Propuesto en Matemáticas el 28/06/06**) Considérese el problema de tipo mixto (6). Si $f \equiv 0$, la única solución de (6) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \sin(2x)$, la única solución de (6) es $u(x,t) = \sin(2x)e^{-4t}$.
Si, como en el ejercicio previo,

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin(2x)e^{-4t}, \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

solución de (6)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (6) no se cumplen.

7. Considérese el problema

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, \ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) = c_1, & & u(\pi,t) = c_2, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{array} \tag{7}$$

Demuéstrese que si $f \in C^1([0,\pi])$ satisface $f(0) = c_1, \ f(\pi) = c_2$, entonces (7) tiene una única solución.

8. Calcúlese la única solución de

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, \ 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} & = & \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array} \tag{8}$$

si $f(x) = \sin(x)$.

9. Encuéntrese la única solución de (8) cuando $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [0, \pi]$, siendo a y b números reales dados.

10. (**Propuesto en el examen del 03/02/06**)

    a) Enúnciese de manera precisa el segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.

    b) Cálculese la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \operatorname{sen}^3(x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

(Sugerencia: demuéstrese previamente que $\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x),\ \forall x \in \mathbb{R}$).

11. (**Examen del 03/02/2005**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= \sin^3 x, && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

12. (**Examen del 07/09/2005**)

    a) Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor.

    b) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \sin(4x), \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

A. Cañada

(Abril 2009)

LA ECUACIÓN DEL CALOR
(Frontera parabólica)

Dimensión uno

$\omega = (0,\pi)$

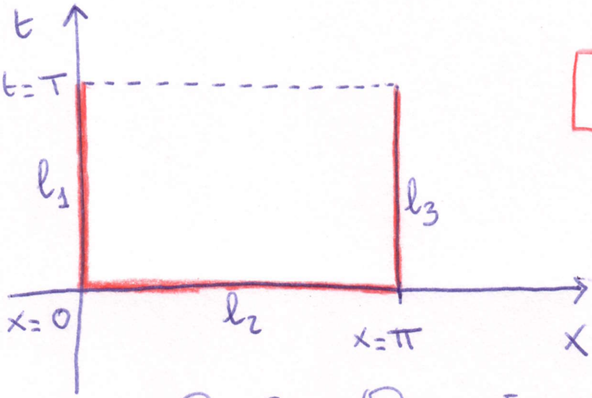
$\Omega = (0,\pi)\times(0,T)$

$$\boxed{\partial_1 \Omega = l_1 \cup l_2 \cup l_3}$$

$l_1 = \{0\}\times[0,T]$

$l_2 = [0,\pi]\times\{0\}$

$l_3 = \{\pi\}\times[0,T]$



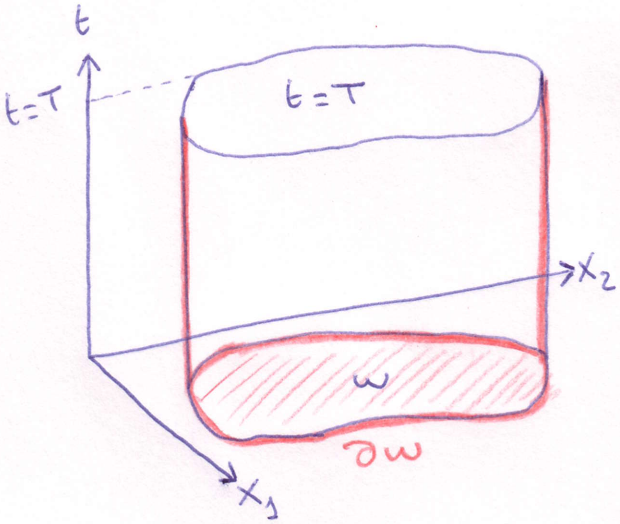
Nota: Observemos que $\partial_1 \Omega = (\partial\omega \times [0,T]) \cup (\overline{\omega}\times\{0\})$

Dimensión dos

$\omega \subset \mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2)/x_i\in\mathbb{R}\}$

$\Omega = \omega\times(0,T)$

$$\boxed{\partial_1 \Omega = (\partial\omega \times [0,T]) \cup (\overline{\omega}\times\{0\})}$$



$\partial\omega\times[0,T]$: superficie lateral

$\overline{\omega}\times\{0\}$: base inferior del "cilindro"

La frontera parabólica $\partial_1\Omega$ es un subconjunto de la frontera de Ω, $\partial\Omega$; de hecho

$$\partial\Omega = (\partial_1\Omega) \cup \{\overline{\omega}\times\{T\}\}$$

Es decir, la frontera de Ω es la unión de la frontera parabólica de Ω y de la base superior del "cilindro"