**FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA**

Segundo curso, examen final, 14/06/2010.

1. (a) (2 puntos) Si $f \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \left( \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\, dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$

(b) (1 punto) Teniendo en cuenta el resultado anterior, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).

2. Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (1.5 puntos) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(b) (1.5 puntos) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

(c) (1 punto) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2).

3. Considérese la ecuación de Laplace $n-$dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{2}$$

y sea $\xi \in \mathbf{R}^n$ dado.

(a) (1.5 puntos) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (2) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces $v$ verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\ r \in (0, +\infty) \tag{3}$$

Recíprocamente, si $v \in C^2(0, +\infty)$ verifica (3) entonces $u(x) = v(\|x-\xi\|)$ verifica (2) en $\mathbf{R}^n \setminus \{\xi\}$.

(b) (1.5 puntos) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x, y) = 1,\ b^2 < x^2 + y^2 < a^2,$$
$$u(x, y) = 0,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = b^2\ \ \text{ó}\ \ x^2 + y^2 = a^2$$