



FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI)
LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, 11/06/2008.

Nota. Los alumnos que se presentan para subir nota sólo deben realizar los ejercicios 2 y 3, siendo la puntuación de cada uno de ellos 5 puntos.

1. (Valor total del ejercicio: 3 puntos) Considérese el problema de tipo mixto

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad 0 \leq t, \quad (ONH)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

- (a) (0.5 puntos) Interpretese (ONH) desde el punto de vista de la Física.
- (b) (1 punto) Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución.
- (c) (1 punto) Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^m a_n \cos(nx), \quad g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^p b_n \cos(nx),$$

siendo a_n , $0 \leq n \leq m$, b_n , $0 \leq n \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

- (d) (0.5 puntos) Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.
2. (Valor total del ejercicio 3.5 puntos)

- (a) (1 punto) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor n -dimensional.

(b) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi, & 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi,\end{aligned}\tag{1}$$

Si $f \equiv 0$, la única solución de (1) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \text{sen}(2x)$, la única solución de (1) es $u(x,t) = \text{sen}(2x)e^{-4t}$.

Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{sen}(2x), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}\tag{2}$$

i. (1 punto) ¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \text{sen}(2x)e^{-4t}, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

solución de (1)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (1) no se cumplen.

ii. (1.5 puntos) Calcúlese la única solución de (1) para la función f dada en (2).

3. (Valor total del ejercicio 3.5 puntos)

- (a) (1.5 puntos) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.
- (b) (2 puntos) Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{aligned}u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < 1, & 0 < y < \pi, \\ u_y(x,0) &= 0, & u_y(x,\pi) &= 0, & u(0,y) &= \cos y, & u(1,y) &= \text{sen}^2 y.\end{aligned}$$