## CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

## CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Ley de Newton sobre el potencial gravitacional de distribuciones de masas discretas y continuas.
2. Teorema fundamental del cálculo y teorema de derivación de una integral paramétrica.
3. Cálculo de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Estos conocimientos se pueden consultar, por ejemplo, en las referencias siguientes:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. http://mathworld.wolfram.com/
4. http://scienceworld.wolfram.com/physics/

## RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo básico de este capítulo es que el alumno conozca el origen de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), tanto en su relación con otras disciplinas matemáticas como en el importante papel que juegan en las aplicaciones a diversas materias, especialmente física e ingeniería. Se pretende de manera especial que el

[1] A. Cañada, Febrero 2010, EDPFÍSICA

alumno reconozca adecuadamente los tres tipos básicos de EDP: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación del potencial. Asimismo, el alumno debe prestar una atención especial a los párrafos en letra negrita que le informan de problemas que aparecen en física, ingeniería, etc., relacionados con EDP.

*El problema de la cuerda vibrante y la ecuación de ondas*

**El primer problema que presentamos en este capítulo es el problema de la cuerda vibrante. Puede describirse de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ $y$ $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada $x$ ( $0 \leq x \leq \pi$ ) y el tiempo $t$ $(t \geq 0)$. El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.**

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond D'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean "*pequeñas*"), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219) que la función $u$ debe satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad && 0 < x < \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

(1) es un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas.** La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero. La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos. En definitiva, además de la ecuación se consideran dos tipos de condiciones:

condiciones en el tiempo inicial y condiciones en la frontera de la cuerda (de ahí el nombre de problemas de tipo mixto).

D'Alembert demostró también que la solución de (1) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{2}$$

donde $\tilde{f}$ es "*una extensión conveniente de la función $f$*." De manera más precisa, $\tilde{f}$ se obtiene, a partir de $f$, realizando una extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi-$ periódica. Esto se verá con detalle en el capítulo II.

La fórmula (2) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales $f$ que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función.
Otra manera de obtener la solución del problema (1) completamente distinta de la vista anteriormente fue propuesta por Daniel Bernoulli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (1) como superposición de ondas sencillas. Estas ondas sencillas pueden obtenerse usando el método de separación de variables, obteniéndose las funciones

$$u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt), \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo $t$ fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas $u_n$, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0,\pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (3). Es trivial demostrar que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, la función definida en (3) satisface tres de las cuatro condiciones que aparecen en (1) (la primera, tercera y cuarta). Claramente la segunda condición de (1) no se verifica necesariamente. Pues bien, D. Bernoulli afirmó que la solución de (1) se representa de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt), \tag{4}$$

donde los coeficientes $a_n$ han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (1). Si la solución propuesta por Bernoulli es correcta, ello obligaría a que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi], \tag{5}$$

para una adecuada elección de los coeficientes $a_n$. Las ideas expuestas por Bernoulli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (5) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*".

**Las condiciones sobre el problema de la cuerda vibrante original pueden ser más generales. Por ejemplo, la velocidad inicial de la cuerda no tiene que ser necesariamente cero. También la posición de los extremos de la misma puede variar con el tiempo. Esto origina problemas de tipo mixto más generales que (1) de la forma**

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} & = & \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t), & 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} & = & g(x), & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = m_1(t), & & u(\pi,t) = m_2(t), & t \ge 0 \end{array} \tag{6}$$

**También, problemas de vibraciones en dimensiones superiores a uno (por ejemplo, el problema de la membrana vibrante) conducen a la ecuación de ondas $n-$ dimensional**

$$\frac{\partial^2 u(x_1,...,x_n,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1,...,x_n,t)}{\partial x_i^2} \tag{7}$$

**Ecuaciones similares a la de ondas aparecen, además, en otras muchas situaciones de interés para los estudiantes de física e ingeniería. Por ejemplo:**

1. **En el estudio de los desplazamientos longitudinales de una viga, de sección constante $S$, en las hipótesis de la Resistencia de Materiales, la función $u(x,t)$ que define dichos desplazamientos longitudinales, verifica la ecuación**

$$\rho u_{tt} = ESu_{xx} + h(x,t)$$

**donde $\rho$ es la masa por unidad de longitud del medio, $E$ es el módulo de Young y $h(x,t)$ la fuerza por unidad de longitud actuando en el punto $x$ y en el instante $t$.**

2. **La ecuación anterior aparece también en el estudio de los desplazamientos en profundidad de un terreno y en el estudio de la torsión de una barra.**

3. **La ecuación de Klein-Gordon $c^2 u_{tt} = u_{xx} - \mu^2 u$ (onda relativista) y la ecuación de seno-Gordon $u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0$ que se usa para describir familias de partículas elementales y también aparece en la teoría de la unión de Josephson (el efecto Josephson es un efecto físico que se manifiesta por la aparición de una corriente eléctrica por efecto túnel entre dos superconductores separados).**

*La ecuación del calor y el nacimiento de las series de Fourier*

Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, envió en 1807 un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre el tema de la propagación del calor. Más concretamente, **Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos $\pi$, cuyos extremos se mantienen a $0°$ centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), Fourier se planteó la siguiente cuestión: ¿cuál será la temperatura de cualquier punto $x$ de la varilla en el tiempo $t$ ?**
**Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas, demostró que si $u(x,t)$ representa la temperatura en la sección $x$ y en el tiempo $t$ , entonces la función $u$ debe satisfacer:**

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi.
\end{aligned} \tag{8}$$

De nuevo estamos ante un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (8) es la **ecuación del calor**. La segunda significa que la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene a $0°$ centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Vamos a comentar a continuación las principales ideas que permiten obtener la ecuación del calor. Para ello, sea $u(x,t)$ la temperatura de una barra unidimensional en el punto de abscisa $x$ y en el tiempo $t$ $(a \leq x \leq b,\ t \geq 0.)$ Teniendo en cuenta el concepto de integral definida, la temperatura total en el tiempo $t$ para $x$ variando entre $a$ y $b$, vendrá dada por una expresión (salvo constantes positivas) de la forma $\int_a^b u(x,t)\ dx$. Asumamos, además, que hay una difusión del calor en la dirección positiva de la recta real (por $x = a$ entra calor y por $x = b$ sale), y que esta difusión viene dada por una función $\phi(x,t)$, que representa el flujo de calor.

La derivación de la llamada **ecuación del calor**, para el caso que nos ocupa, se basa en la aplicación de dos tipos de leyes fundamentales:

- Una ley de conservación, aplicada al crecimiento de la temperatura total respecto del tiempo.

- Una ley que relaciona el flujo de calor desde las partes con más temperatura a las de menos, con la tasa de variación de la citada temperatura respecto de la variable espacial. Aquí usaremos la ley de Fourier, matemático y físico francés que puede considerarse como el fundador de la teoría clásica del calor a principios del siglo XIX.

La ley de conservación que puede aplicarse en este caso, es la siguiente: para cualquier intervalo $[a,b]$, la tasa de crecimiento de la temperatura total, respecto del tiempo $t$, vendrá dado por el flujo de calor en la sección $a$ menos el flujo de calor en la sección $b$, o lo que es lo mismo, el flujo total de calor a través de la frontera del intervalo $(a,b)$. Esto se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) \tag{9}$$

Si las funciones $u$ y $\phi$ son suficientemente regulares (no debe preocuparnos este aspecto en la deducción de la ecuación) entonces:

$$a)\ \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \int_a^b u_t(x,t)\ dx$$

$$b)\ \phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \phi_x(x,t)\ dx$$

donde los subíndices indican las derivadas parciales respecto de la correspondiente variable.

En suma, tenemos que

$$\int_a^b \left[u_t(x,t) + \phi_x(x,t)\right]\ dx = 0$$

para cualquier intervalo $[a,b]$. Por tanto, se debe tener

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t > 0 \tag{10}$$

Esto es una ley de conservación expresada por una ecuación en derivadas parciales de primer orden.
En la expresión anterior aparecen dos funciones, $u$ y $\phi$, y una sola ecuación. La experiencia sugiere que ambas deben estar relacionadas. En nuestro caso, si se observa empíricamente la difusión del calor, generalmente éste se difunde desde las partes de temperatura alta a las de temperatura baja de una forma proporcional al gradiente de la temperatura (respecto de la variable espacial), y con signo opuesto al de éste. En efecto, si $u_x(x_0, t_0) > 0$, esto significa que, fijado el tiempo $t_0$, la función $u$, como función de la variable $x$ es creciente en un entorno del punto $x_0$. Por tanto, hay más temperatura a la derecha de $x_0$ que a la izquierda y, lógicamente, la difusión del calor se produce hacia la izquierda de $x_0$. Así podemos asumir que

$$\phi(x,t) = -Du_x(x,t) \tag{11}$$

que es la mencionada Ley de Fourier ($D$ es una constante positiva, llamada constante de difusión, que depende de la situación particular que estemos tratando).
Combinando (10) con (11) se obtiene

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0, \tag{12}$$

que es el modelo clásico de difusión unidimensional. A esta ecuación se le llama habitualmente en Física **ecuación del calor**, puesto que modela muchos tipos de fenómenos relacionados con la distribución y evolución de la temperatura en los cuerpos, y en general fenómenos con difusión. Es además el representante típico de las ecuaciones de tipo parabólico.
En la deducción del modelo anterior no se ha tenido en cuenta la influencia que en la evolución de la temperatura pueden tener otros parámetros, tales como fuentes de calor externas. En general, esto se expresa por una función $f(x,t,u)$, de tal manera que una ecuación más general que (12) es

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = f(x,t,u) \tag{13}$$

que se conoce con el nombre de **ecuación del tipo reacción-difusión**, de gran importancia no sólo en Física sino también en Biología, Química y otras Ciencias.
Vamos a intentar ahora trasladar las ideas anteriores al caso $n$-dimensional. Esto no es tarea fácil, como sabemos muy bien aquellos que nos dedicamos a la enseñanza del análisis matemático. El análisis de funciones de varias variables reales difiere sensiblemente, tanto en las ideas, como en los resultados, del análisis de funciones de una variable real. Baste citar, por ejemplo, el concepto de derivabilidad de una función en un punto o los resultados relacionados con los teoremas integrales del análisis vectorial (Barrow, Green, Stokes, etc.).
En primer lugar, la temperatura es ahora una función de $n+1$ variables: $n$ variables para el espacio y una para el tiempo. Así, en general tenemos $u(x,t)$ para dicha

temperatura, con $x \in \Omega$ y $t \geq 0$, donde $\Omega$ es ahora una región acotada de $\mathbb{R}^n$. En este caso, la ley de conservación (9) se expresa como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} u(x,t)\ dx = -\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds, \tag{14}$$

donde $\partial\Omega$ significa la frontera topológica de $\Omega$, $\displaystyle\int_{\Omega} u(x,t)\ dx$ representa la integral múltiple correspondiente, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds$ es una integral de superficie, que expresa el flujo de calor a través de la frontera de $\Omega$ y $n(s)$ es el vector normal exterior a la superficie (o hipersuperficie) $\partial\Omega$ en el punto $s$. En el caso unidimensional, la frontera topológica de $\Omega = (a,b)$ está formada por el conjunto $\{a,b\}$. En $s = a$ la normal exterior es el vector unidimensional $-1$ y en $s = b$, la normal exterior es el vector unidimensional 1.

Como anteriormente, la ecuación integral (14) puede escribirse, si las funciones que aparecen en ella son regulares, como una ecuación en derivadas parciales. Para ello, lo primero que debemos hacer es escribir la integral de superficie que aparece en la relación anterior, como una integral múltiple. Esto se puede hacer, cuando el dominio $\Omega$ considerado es también bueno, usando el Teorema de la Divergencia, resultado fundamental del análisis vectorial, del cual se deduce la expresión

$$\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds = \int_{\Omega} div_x\ \phi(x,t)\ dx$$

donde si el flujo $\phi(x,t) = (\phi_i(x,t)), 1 \leq i \leq n$, la divergencia de $\phi$, respecto de la variable $x$, se define como

$$div_x\ \phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x_i}$$

Aplicando este teorema y usando las mismas ideas que para el caso unidimensional, llegamos a la ecuación

$$u_t(x,t) + div_x\ \phi(x,t) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\ t > 0, \tag{15}$$

que es la versión general de (10).

Por último, la ley de Fourier multidimensional, afirmaría ahora que el vector flujo $\phi(x,t)$ es directamente proporcional (en sentido negativo) al gradiente de la temperatura respecto de la variable espacial; es decir,

$$\phi(x,t) = -D\ \nabla_x u(x,t),$$

donde $\nabla_x u(x,t)$, es el vector gradiente de $u$, respecto de la variable espacial $x$. Así obtendríamos

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = 0, \tag{16}$$

donde $\Delta_x$, el operador Laplaciano respecto de $x$, viene dado por

$$\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$$

A la ecuación anterior se le conoce con el nombre de **ecuación del calor o ecuación de la difusión** $n$-dimensional. Nuevamente, admitiendo otros factores de influencia en la temperatura, obtendríamos la ecuación

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = f(x,t,u) \tag{17}$$

Volvamos al problema (8). Partiendo de las ideas de Bernoulli para la ecuación de ondas (soluciones con variables separadas), Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan formalmente dicha ecuación, obtenemos los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0, \ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{18}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0, \ 0 < t < T. \tag{19}$$

En la expresión anterior, $\mu$ hace el papel de parámetro real. Es fácil ver que (18) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2, \ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún $n$ natural, el conjunto de soluciones de (18) es un espacio vectorial real de dimensión uno generado por la función $sen(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (19) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2 t)$. Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas soluciones elementales de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y $v_n$ se define como

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{20}$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura $f$, es algún múltiplo de $sen(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (8) es un múltiplo adecuado de $v_n$
Ahora bien, $f$ no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernoulli, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución $u$ de (8), para cualquier $f$ dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas $v_n$? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes $a_n$ tal que la única solución de (8) sea de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{21}$$

como en el caso de la ecuación de ondas? Fourier afirmó en su artículo que esto era así, obteniéndose de nuevo la relación (5). Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes que han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas.

**Otras situaciones dan lugar a problemas distintos. Por ejemplo, si se trata de estudiar la temperatura de una varilla delgada, pero donde se sustituye el hecho de que los extremos de la misma estén a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados, tenemos el problema de tipo mixto**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi. \end{aligned} \tag{C2}$$

**Problemas relacionados con la propagación del calor en cuerpos tridimensionales originan la ecuación del calor en dimensión tres. En general, la ecuación del calor $n-$ dimensional se expresa de la forma:**

$$\frac{\partial u(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1,\ldots,x_n,t)}{\partial x_i^2} \tag{22}$$

**Otras situaciones de interés para los estudiantes de ingeniería, donde aparecen ecuaciones similares a la ecuación del calor son las siguientes:**

1. **Difusión de sustancias químicas en otro medio.**

2. **En el estudio del flujo de agua en acuíferos en un medio no homogéneo se obtiene, suponiendo un flujo bidimensional, una ecuación de la forma**

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_j}\right) = f(x_1,x_2,t)$$

   **Obsérvese que si $a_{ij} = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker), entonces tenemos la ecuación del calor bidimensional.**

*La ecuación del potencial*

La ecuación del potencial tiene su origen en la teoría de Newton de la gravitación universal. Posteriormente, Gauss, Green y Kelvin, en el siglo XIX, realizaron aportaciones importantes dentro del marco del llamado análisis vectorial, no sólo en el tema del potencial gravitacional sino también en temas relacionados con electrostática e hidrodinámica.
El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ por una masa $m$ localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G\ \frac{m}{\|x - \xi\|}$$

donde $G$ es la constante de gravitacional universal y $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea. La fuerza gravitacional $g(x)$ viene dada por $g(x) = -\nabla V(x)$, donde $\nabla V$ indica el gradiente de la función $V$. Trivialmente se comprueba que el potencial es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, esto es, que verifica la **ecuación de Laplace**

$$\Delta V(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\} \tag{23}$$

Aquí, $\Delta V$ es el laplaciano de la función $V$, dado por

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} \tag{24}$$

El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define de manera análoga como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

Trivialmente $V$ es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.
Lo anterior se refiere a "distribuciones discretas finitas de masas". Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una "distribución continua de masa" que se encuentra en el espacio euclídeo. Aquí la suma finita se transforma en una "suma continua", dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$. **Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de $\mathbb{R}^3$ con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, el potencial gravitacional se define como**

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|}\ d\xi \tag{25}$$

Trivialmente $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$.Bajo condiciones muy amplias ($\rho$ medible y acotada) se demostrará en el capítulo IV que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, se mencionarán también ejemplos en este capítulo que ponen de manifiesto que aunque $\rho$ sea continua, $V$ no tiene que ser necesariamente de clase $C^2$ en $\Omega$. Trivialmente

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \notin \overline{\Omega} \tag{26}$$

Demostraremos en el capítulo IV que si $\rho \in C^1(\Omega)$ y además es acotada, entonces

$$\Delta V(x) = 4\pi G\rho(x), \ \forall \ x \in \Omega \tag{27}$$

Como curiosidad, puede demostrarse fácilmente que

$$\Delta_x \frac{\rho(\xi)}{\|x-\xi\|} = 0, \ \forall x \neq \xi$$

con lo que, para obtener las derivadas de segundo orden de $V$ en $\Omega$, no puede intercambiarse la derivación con la integración en la fórmula (25). *Esto le suele llamar la atención a los alumnos. No porque crean que siempre se pueden intercambiar ambas operaciones (ya nos encargamos los matemáticos de ponerles suficientes ejemplos patológicos al respecto) sino porque este es un ejemplo muy natural que surge en física e ingeniería y donde se pone de manifiesto que el rigor matemático es crucial si se quieren hacer las cosas bien.*
Las disquisiciones anteriores motivan el estudio de la existencia de soluciones radiales no triviales de la ecuación de Laplace (23): soluciones de la forma $V(x) = v(\|x-\xi\|)$. Esto origina la ecuación diferencial ordinaria

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\ v'(r) = 0, \ \forall \ r \in (0, +\infty). \tag{28}$$

Integrando esta ecuación se obtiene lo que se llama solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \ln \|x-\xi\|, \ \text{si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n}\|x-\xi\|^{2-n}, \ \text{si } n > 2. \end{cases} \tag{29}$$

que, como su nombre indica, desempeñará un papel importante en el estudio de ecuaciones elípticas en el capítulo IV.

El principio del máximo-mínimo para funciones armónicas, que se demostrará en el capítulo IV, motiva el tipo de problemas que "de una manera lógica" se pueden asociar a la ecuación del potencial: **los problemas de contorno**. Este hecho se ve corroborado en las aplicaciones de la teoría de ecuaciones elípticas a la Ciencia, donde tales problemas de contorno se presentan con frecuencia. Por ejemplo, en electrostática, los problemas de contorno usuales (problema de Dirichlet) responden al planteamiento

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= g(x),\ x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x),\ x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{30}$$

donde $\Omega$ es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ indica su frontera topológica y las funciones $f$ y $g$ son dadas. En cambio, en hidrodinámica lo usual son problemas de contorno del tipo

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= g(x),\ x \in \Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} &= f(x),\ x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{31}$$

donde $n$ indica el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y $\dfrac{\partial u(x)}{\partial n} =< \nabla u(x), n(x) >,\ \forall\, x \in \partial\Omega$. Estos se conocen con el nombre de problemas de contorno tipo Neumann.

**La ecuación de laplace $n-$dimensional se escribe de la forma**

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} = 0$$

**y se cumple para soluciones estacionarias (soluciones que no dependen de la variable tiempo $t$) de las ecuaciones $n-$dimensionales de ondas (7) y del calor** (22).

Los ejemplos de EDP que se presentan en este capítulo surgieron en los siglos XVIII y XIX. No obstante, siguen representando un papel fundamental en la teoría moderna de EDP y en torno a ellos, o a variaciones de ellos, existen numerosos interrogantes que se comentarán en el curso. La teoría moderna de EDP surgió a finales del siglo XIX y principios del XX con contribuciones importantes de Poincaré y Hilbert, alcanzando un grado notable de contenido con el desarrollo en la primera mitad del siglo XX del análisis funcional. Desde mediados de los años cincuenta del siglo pasado el uso de funciones generalizadas (distribuciones, espacios de Sobolev, etc.) y de la teoría de espacios de Hilbert, ha permitido avances muy importantes. Por último, diremos que en la actualidad hay un interés especial (debido a las aplicaciones) por el estudio de EDP no lineales así como por los métodos numéricos de aproximación a las soluciones de las mismas.

A las ecuaciones integrales, cuya teoría fue iniciada por Volterra y desarrollada por Fredholm y Hilbert a comienzos del siglo XX, dedicamos el último capítulo. Este capítulo es importante por varios motivos: en primer lugar, problemas de índole muy diversa, que se plantean tanto en e.d.o. como en ecuaciones en derivadas parciales, se pueden reducir, vía una función de Green apropiada, a ecuaciones integrales, proporcionando éstas una visión unificada de aquellos. También, la teoría de ecuaciones integrales (e.i), presentada desde un punto de vista moderno, proporciona al alumno la posibilidad de entrar en contacto con el lenguaje y métodos del Análisis funcional (espacios de Hilbert, desarrollos de funciones, operadores de diversa clase, etc.), disciplina clave en la investigación moderna de las ecuaciones diferenciales. Precisamente, la teoría de espacios de Hilbert y operadores, tiene su origen en problemas planteados en ecuaciones integrales. Por ejemplo, la ecuación

$$g(x) = f(x) - \int_a^b K(x,y)f(y)\, dy$$

fue estudiada por Fredholm, que estableció el llamado hoy en día Teorema de la alternativa de Fredholm. Este estudio fue continuado por Hilbert mediante una serie de artículos publicados entre los años 1.904 y 1.910, los cuales permitieron no sólo avanzar en el conocimiento de las ecuaciones integrales, sino establecer también los fundamentos de la teoría de espacios de Hilbert. Los más curioso (aunque no extraño, pues este tipo de cosas suceden en Matemáticas), es que, la teoría de espacios de Hilbert y operadores, ha mostrado su utilidad no sólo en el campo de las ecuaciones integrales, sino que a partir de mediados del siglo XX comenzó a utilizarse también en problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales (además, por supuesto, de otras muchas ramas de la Matemática). En el capítulo V se describen los tipos clásicos de ecuaciones integrales: de Volterra y de Fredholm, así como los problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. El tema de las ecuaciones integrales de Fredholm lineales y autoadjuntas alcanza su culminación en el desarrollo de Hilbert-Schmidt, que puede marcar el comienzo de una teoría general de desarrollos en serie de Fourier.

El tratamiento de los problemas de contorno, cuyo estudio fue iniciado por Sturm y Liouville en el siglo XIX, lo hacemos con el punto de vista de Hilbert, que mediante el método de la función de Green, los redujo a ecuaciones integrales. Esto proporciona una extraordinaria economía de métodos y demostraciones y al mismo tiempo es una buena ilustración de la utilidad de las ecuaciones integrales. En particular, se describe de manera muy fácil el conjunto de valores propios y funciones propias, además de algunas propiedades notables, como la complitud de tales funciones en ciertos espacios de funciones, resultado importante para aplicar el método de separación de variables en el estudio de numerosos problemas de contorno o de tipo mixto para e.d.p.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada, Series de Fourier y Aplicaciones. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.
2. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992.

3. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
4. A.N.Tijonov y A.A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

**ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS**

**Es muy recomendable que el alumno complete la información histórica** que se proporciona en el capítulo con las referencias siguientes:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, Madrid, 2002. En la Introducción de este libro se pueden consultar algunos hechos relevantes de los métodos de Fourier y su relación con las EDP.
2. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992. Muy recomendable para la historia de las EDP en los siglos XVIII y XIX.
3. Página web:
   http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html

**EJERCICIOS**

El objetivo fundamental de esta primera relación de ejercicios es que el alumno se familiarice con los tres tipos básicos de EDP (ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Laplace) así como con algunas soluciones especiales de las mismas. Se pretende, además, que el alumno recuerde algunos hechos básicos sobre cambios de variables así como sobre series de funciones que serán importantes en los capítulos siguientes.

1. Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{32}$$

   *a*) Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x+t, \ \mu = x-t$, la ecuación anterior se transforma en

$$u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0, \ (\xi,\mu) \in \mathbb{R}^2 \tag{33}$$

   *b*) Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de (33) y usando el cambio de variable indicado, calcúlese el conjunto de soluciones de (32).

*c*) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (32) y de (33) es un espacio vectorial real de dimensión infinita (se pueden encontrar infinitas soluciones linealmente independientes).

*d*) Compárense los resultados anteriores con los que el alumno conoce para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones de la forma $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0, \ t \in [a, b]$. ¿Cuál es la diferencia fundamental que observa el alumno?.

*e*) Extiéndanse los resultados anteriores para una ecuación de ondas de la forma

$$u_{xx}(x,t) = a^2 u_{tt}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{34}$$

donde $a$ es una constante no nula.

2. Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{35}$$

donde $a$ y $b$ son constantes reales y $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

*a*) Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (35).

3. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x,t) \equiv \operatorname{sen}(nx)\cos(nt)$ es solución de la ecuación de ondas (32).
Demuéstrese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es asimismo solución de (32).
Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x,t) \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$ sea de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y verifique la ecuación de ondas.

4. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x,t) \equiv \operatorname{sen}(nx)\exp(-n^2 t)$ es solución de la ecuación del calor. Asimismo, pruébese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es solución de la ecuación del calor.
Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x,t) \equiv \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$ sea de clase $C^2$ y verifique la ecuación del calor para $t > 0$.

5. *a*) El potencial gravitacional $V(x)$ que se origina por un número finito de masas puntuales $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

donde $G$ es la constante de gravitación universal y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$. Demuéstrese que $V$ es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

*b*) Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, una función dada (medible y acotada), donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado. Demuéstrese que el potencial gravitacional

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi \tag{36}$$

está bien definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y que $\Delta V(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.