FÍSICA MATEMÁTICA (EDP y EI), LICENCIATURA EN FÍSICA

Segundo curso, examen final, 01/07/2009.

1. Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$

   (a) Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en

$$u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathrm{R}^2 \tag{2}$$

   (b) Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (2) y usando el cambio de variable indicado, calcúlese el conjunto de soluciones de (1).

   (c) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (1) y de (2) es un espacio vectorial real de dimensión infinita (se pueden encontrar infinitas soluciones linealmente independientes).

   (d) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{3}$$

   donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$. Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (3).

2. (a) Escríbase de manera precisa la formulación de **problema de Cauchy para la ecuación del calor** $n-$**dimensional**, así como el concepto de solución del mismo.

   (b) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución.

   (c) Calcúlese la única solución acotada del problema de Cauchy

$$\begin{array}{c} u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \exp(-5x^2),\ x \in \mathrm{R}. \end{array} \tag{4}$$

3. Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \tag{5}$$

   Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\mathrm{sen}\phi$, el problema anterior se transforma en

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2}\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathrm{R}, \\ u(1,\phi) = g(\phi),\ \phi \in \mathrm{R}, \end{array} \tag{6}$$

   donde $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ está definida como $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.

Alumnos que tienen que examinarse de los capítulos I, II, III y IV: ejercicio 1, apartados a) y b). Ejercicios 2 y 3 completos.

Alumnos que tienen que examinarse sólo de los capítulos I y II: ejercicio 1 completo (apartados a), b), c) y d)).

Alumnos que tienen que examinarse sólo de los capítulos III y IV: Ejercicios 2 y 3 completos.

Alumnos que quieran subir nota: ejercicios 1 y 2 completos. Ejercicio complementario.

Ejercicio complementario (para subir nota). Grupo B Sea $u : \Omega \to \mathrm{R}$ una función C^∞, donde Ω es un abierto de $\mathbf{R}^N$. Sea $x \in \Omega$ fijo, y $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset \Omega$. Definimos:

$$f : [0, r) \to \mathrm{R},\ f(t) = \frac{N}{\omega_N} \int_{B(0,1)} u(x + tz)\, dz,$$

donde $B(0, 1)$ es la bola unidad en $\mathbf{R}^N$ y ω_N es la medida de la esfera unidad $(N - 1)$-dimensional (por ejemplo, $\omega_2 = 2\pi$, $\omega_3 = 4\pi$).

a) ¿Cómo interpretas la función $f(t)$? ¿Cuánto vale $f(0)$?

b) Demostrar que:

$$f'(t) = t \frac{N}{2\omega_N} \int_{B(0,1)} \Delta u(x + tz) \Big(1 - |z|^2\Big)\, dz.$$

Si u es una función armónica, ¿qué consecuencia obtenemos?

c) Calcular $f''(0)$ e interpretar el resultado.

Ejercicio complementario (para subir nota). Grupo A

1. Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{array}{c} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathbf{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathbf{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathbf{R}. \end{array} \tag{7}$$

   (a) Sea $(x_0, t_0) \in \mathbf{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) \ &= \frac{1}{2}\,[v(x_0+t_0,0) \ + \ v(x_0-t_0,0)\,] + \\ &+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+\frac{1}{2}\int_T (v_{tt}-v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{8}$$

   Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathbf{R})$, *entonces* $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T}(P\ dx + Q\ dt)$.

   (b) Defínase con precisión el concepto de solución de (7) y usando la fórmula anterior, pruébese que (7) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (7).

   (c) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (7).