Antonio Cañada | FUNCIONES CONVEXAS DERIVABLES

TEOREMA 1

Sea Ω abierto y convexo de $\mathbb{R}^n$ y $f:\Omega \to \mathbb{R}$, derivable. Son equivalentes:

1) f convexa en Ω

2) $f(x) - f(y) \geq \langle \overbrace{\nabla f(y)}^{f'(y)}, x-y \rangle, \ \forall x,y \in \Omega$

3) $\langle \underbrace{\nabla f(x)}_{f'(x)} - \underbrace{\nabla f(y)}_{f'(y)}, x-y \rangle \geq 0, \ \forall (x,y) \in \Omega \times \Omega.$

Demostración

1) ⟹ 2)

$$f(y+\lambda(x-y)) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$\forall \lambda \in (0,1) \Rightarrow$

$$\underbrace{\frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda}}_{\downarrow \lambda \to 0^+} \leq f(x) - f(y)$$

$$\langle \nabla f(y), x-y \rangle.$$

2) ⟹ 3)

$$\left.\begin{array}{l} f(x)-f(y) \geq \langle \nabla f(y), x-y \rangle \\ f(y)-f(x) \geq \langle \nabla f(x), \cancel{y}-\cancel{x} \rangle \end{array}\right\}$$

$$0 \geq \langle \nabla f(y) - \nabla f(x), x-y \rangle$$

3) ⟹ 1) (Como en el caso escalar)

$p:[0,1] \to \mathbb{R} \,/\, p(\lambda) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) - \lambda f(x) - (1-\lambda) f(y)$

Si $p(\lambda) \leq 0, \forall \lambda \in [0,1]$. Está demostrado.

Ahora bien, si $\exists \lambda_0 \in (0,1) / p(\lambda_0) > 0$, sea $\lambda_1 \in (0,1)$ t. q.

$$p(\lambda_1) = \max_{[0,1]} p \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(\lambda_1) > 0 \\ p'(\lambda_1) = 0. \end{array}\right.$$

Además $\forall \lambda \in (\lambda_1, 1)$,

$p'(\lambda) - p'(\lambda_1) = f'(\lambda x + (1-\lambda) y)(x-y) - \cancel{f(x)} + \cancel{f(y)} -$

$- f'(\lambda_1 x + (1-\lambda_1) y)(x-y) + \cancel{f(x)} - \cancel{f(y)} =$ (*)

Antonio Cañada

TEOREMA 2

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω abierto y convexo y $f: \Omega \to \mathbb{R}$ derivable.
Entonces son equivalentes:

1) f estrictamente convexa en Ω
2) $f(x) - f(y) > \langle f'(y), x-y \rangle$, $\forall x \neq y$, $x, y \in \Omega$
3) $\langle f'(x) - f'(y), x-y \rangle > 0$, $\forall x \neq y$, $x, y \in \Omega$.

1) $\Rightarrow$ 2)

f estric. convexa $\Rightarrow$ f convexa (luego podemos usar el apartado 2) del Teorema anterior)

$$f(y+\lambda(x-y)) = f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \quad \forall \lambda \in (0,1) \quad \forall x, y \in \Omega, x \neq y$$

$$\Rightarrow \frac{f(\overbrace{y+\lambda(x-y)}^{u}) - f(\overset{v}{y})}{\lambda} < f(x) - f(y)$$

$$\frac{\langle \nabla f(v), u-v \rangle}{\lambda} \leq \frac{f(u) - f(v)}{\lambda}$$

$$\frac{\langle \nabla f(y), \lambda x - \lambda y + \cancel{y} - \cancel{y} \rangle}{\lambda} = \langle \nabla f(y), x-y \rangle. \quad \text{Así:}$$

$$\langle \nabla f(y), x-y \rangle \leq \frac{f(y+\lambda(x-y)) - f(y)}{\lambda} < f(x) - f(y)$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \nabla f(y), x-y \rangle < f(x) - f(y), \quad \text{c.q.d.}$$

2) $\Rightarrow$ 3) Como en el Teorema anterior.

3) $\Rightarrow$ 1) " " " " "

Antonio Cañada

NOTA 1

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ / $\exists f'(x), f''(x), \forall x\in(a,b)$. Entonces

$\forall x\in(a,b)$

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2+\omega(x,h) \text{ t.q.}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x,h)}{h^2}=0,\quad \forall x\in(a,b)$$

En efecto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{\omega(x,h)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2}=$$

$$=(\text{L'Hospital})=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)-f''(x)h}{2h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}\left[\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}-f''(x)\right]=0 \text{ (por definición de } f''(x))$$

NOTA 2 $\quad g(0)=0$

$$g'(\lambda)=\langle\nabla f(x+\lambda y),y\rangle-\langle\nabla f(x),y\rangle \Rightarrow g'(0)=0$$

$$g''(\lambda)=y\,(Hf)(x+\lambda y)\,y^t \Rightarrow g''(0)=y\,(Hf)(x)\,y^t$$

F. Taylor (Apostol) (Cañada, pg. 287)

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$, Ω abierto ; $f:\Omega\to\mathbb{R}^m$, $\exists f'(x), f''(x),\dots,f^{m)}(x), \forall x\in\Omega$.

Entonces $\forall\, x,y\in\Omega$ / $[x,y]\subset\Omega$, se tiene que

$\exists\,\xi\in[x,y]$ verificando:

$$f(y)=f(x)+\frac{1}{1!}f'(x)(x-y)+\frac{1}{2!}f''(x)[x-y]^2+\dots+\frac{1}{(m-1)!}f^{m-1)}(x)[x-y]^{m-1}$$

$$+\frac{1}{m!}f^{m)}(\xi)[x-y]^m$$

R. L'Hopital (Cañada, pg 278-279)

I intervalo, $a\in I$, $f,g: I\setminus\{a\}\to\mathbb{R}$ t.q.

i) f,g derivables en $I\setminus\{a\}$, ii) $g'(x)\neq 0, \forall x\in I-\{a\}$, iii) $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}f(x)=0$

Entonces: i) $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}=L \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

Antonio Cañada

TEOREMA 3

Sea Ω convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ derivable 2 veces.
$(\exists\, \underbrace{f'(x)}_{\nabla f(x)}, \underbrace{f''(x)}_{(Hf)(x)}, \forall x \in \Omega)$

Entonces son equivalentes:

1) f convexa en Ω

2) $(Hf)(x)$ semidef. positivo $\forall x \in \Omega$

Demostración.

(*) Véase nota de la pg. izquierda.

$1) \Rightarrow 2)$

Sea $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrario $\Rightarrow \exists \bar{\lambda} > 0 / \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda})$, $x + \lambda y \in \Omega$. Por tanto

$f(x+\lambda y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), \lambda y \rangle = \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle \Rightarrow$

$f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle \geq 0, \quad \forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}).$ (**)

Sea ahora $g : [0, \bar{\lambda}) \to \mathbb{R}$, $g(\lambda) = f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle$

$\exists g'(\lambda), g''(\lambda)$. Luego por la nota / de la pg. izquierda

$g(\lambda) = g(0) + g'(0)\lambda + \frac{g''(0)}{2}\lambda^2 + w(\lambda) \Big/ \lim_{\lambda \to 0} \frac{w(\lambda)}{\lambda^2} = 0$

Por (**), $w(\lambda) = g(\lambda) - g(0) - g'(0)\lambda - \frac{g''(0)}{2}\lambda^2 = (g(0) = 0, g'(0) = 0)$

$= f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda \langle \nabla f(x), y \rangle \cancel{- \langle \nabla f(x), y \rangle} - \frac{1}{2} y Hf(x) y^t \cdot \lambda^2$

$\overset{(**)}{\geq} -\frac{1}{2} y (Hf)(x) y^t \lambda^2 \Rightarrow \quad y (Hf)(x) y^t \geq 2 \frac{w(\lambda)}{\lambda^2} \to 0$

$\Rightarrow y (Hf)(x) y^t \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (Hf)(x)$ semidef. posit. $\lambda \to 0^+$

$2) \Rightarrow 1)$ (simplemente F. Taylor), $\forall x, y \in \Omega$, tenemos

$f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{1}{2!} \underbrace{(y-x)(Hf)(\xi)(y-x)}_{\geq 0} \Rightarrow$

$f(y) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), y - x \rangle$, c.q.d.

Antonio Canicé

TEOREMA 4

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y convexo, $f: \Omega \to \mathbb{R} / \exists f'(x), f''(x) \ \forall x \in \Omega$

Entonces:

1) f estric. convexa en $\Omega \Rightarrow (Hf)(x)$ semidef. positiva $\forall x \in \Omega$

2) $(Hf)(x)$ def. positiva $\forall x \in \Omega \Rightarrow f$ estric. convexa en Ω

Demostración:

1) ~~1) ⇒~~ f estric. convexa $\Rightarrow f$ convexa en $\Omega \Rightarrow (Hf)(x)$ semidef. $+$.

2) Otra vez la fórmula de Taylor.

NOTA! f estric. convexa en $\Omega \not\Rightarrow (Hf)(x)$ def. positiva $\forall x \in \Omega$

Ejemplo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4$ $\quad (f''(0) = 0)$