CAPÍTULO II: LA ECUACIÓN DE ONDAS[1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una ecuación diferencial ordinaria, e.d.o.
2. Convergencia uniforme de series de funciones
3. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes
4. Derivación de integrales paramétricas
5. Fórmula de Green en el plano.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.
2. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
3. http://mathworld.wolfram.com/

[1] A. Cañada, Octubre 2006, EDPICCP

RESUMEN DEL CAPÍTULO

En este capítulo se estudian diferentes problemas asociados a la ecuación de ondas, comenzando por el llamado problema de Cauchy. En dimensión uno este problema se escribe como

$$\begin{array}{c} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x), \; x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x), \; x \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1}$$

Observemos que para el tiempo inicial $t = 0$ se dan dos datos: la solución u y el valor de la derivada u_t.

Indicaremos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \; : \; t > 0 \}.$$

Una solución de (1) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, que verifica (1) en todo punto.

El próximo resultado (fórmula de D'Alembert) se refiere a la existencia y unicidad de soluciones de (1).

Teorema 1. *Si $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ y $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, (1) tiene una única solución dada por*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha(x+t) \; + \; \alpha(x-t)] \; + \; \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s) \; ds, \; \forall \; (x,t) \in \overline{\Omega}. \tag{2}$$

En la demostración se usa en primer lugar el cambio de variables $\xi = x + t, \; \mu = x - t$, que transforma la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $u_{\xi\mu} = 0$. De aquí se deduce que la solución de (1) debe ser de la forma

$$u(x,t) = H(x+t) \; + \; G(x-t),$$

donde $H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Imponiendo las condiciones dadas en el tiempo inicial se llega fácilmente a la conclusión de que

$$H(x) = \frac{1}{2} \; \alpha(x) \; + \; \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s) \; ds \; + \; c_1,$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \; \alpha(x) \; - \; \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s) \; ds \; + \; c_2,$$

donde c_1, c_2 son constantes que satisfacen $c_1 + c_2 = 0$. De aquí se obtiene (2).

Notas de interés sobre la fórmula de D'Alembert

1. La solución dada por (2) se puede escribir de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t}\beta(s)\ ds\right]\ +\ \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t}\beta(s)\ ds\right],$$

o lo que es lo mismo,

$$u(x,t) = u_1(x,t)\ +\ u_2(x,t),$$

donde

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t}\beta(s)\ ds\right] = H(x+t),$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t}\beta(s)\ ds\right] = G(x-t).$$

Así, u es "suma o superposición de dos ondas" u_1 y u_2, que se desplazan, respectivamente, a la izquierda y a la derecha, con velocidad uno. De aquí, que al método utilizado en la demostración del teorema 1, se le llame método de propagación de las ondas.

2. Notemos en segundo lugar que la ecuación de ondas no tiene efecto regularizante (para tiempos positivos) sobre los datos iniciales, puesto que de (2) se deduce que u (para t fijo) tiene la misma regularidad que α.

3. De (2), se obtiene que el valor de u en un punto (x_0, t_0) de Ω, depende de los valores de α en los puntos $x_0 + t_0$ y $x_0 - t_0$ así como de los valores de β en el intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$; de aquí que al intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ se le llame **dominio de dependencia** del punto (x_0, t_0).
Al triángulo determinado por los puntos $(x_0, t_0), (x_0 - t_0, 0)$ y $(x_0 + t_0, 0)$ se le denomina **triángulo característico del punto** (x_0, t_0).

4) Los efectos de las perturbaciones no son instantáneos, sino que éstas se propagan con velocidad finita. Tal afirmación se puede comprender fácilmente si se considera el caso en que las funciones α y β son ambas idénticamente nulas; entonces la única solución de (1) es la función $u \equiv 0$. Si mantenemos $\beta \equiv 0$ y tomamos una función α que sea no nula y positiva solamente "cerca"de un punto dado $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces si x_1 es cualquier otro punto diferente de x_0, el valor $u(x_1, t)$ será cero para pequeños valores de t, (aunque no para valores "grandes"de t).

4. Dado $(x_0, 0)$, el dominio de influencia de éste punto será el conjunto de todos aquellos puntos de Ω tales que su dominio de dependencia incluya al punto x_0.

Pasamos a continuación a considerar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \alpha(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \beta(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3}$$

Como en (1), una solución de (3) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que cumple (3) puntualmente.

El estudio del problema anterior se va a realizar usando la fórmula de Green.

Lema 2. *Sea $(x_0, t_0) \in \Omega$ y T su triángulo característico. Entonces si u es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene*

$$\begin{aligned} u(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\ [u(x_0+t_0,0)\ +\ u(x_0-t_0,0)\ ]\ + \\ &+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} u_t(x,0)\ dx + \\ &+\frac{1}{2}\int_T (u_{tt}-u_{xx})(x,t)\ dxdt. \end{aligned} \tag{4}$$

Para la demostración se procede como sigue: la fórmula de Green en el plano, afirma que

$$\int_D [Q_x(x,t) - P_t(x,t)]\ dxdt = \int_{\partial D} [P(x,t)dx + Q(x,t)dt] \tag{5}$$

para dominios convenientes D del plano y funciones P, Q que sean $C^1(D) \bigcap C(\overline{D})$. Aplicando (5) para el caso $D = T, P = -u_t, Q = -u_x$, se obtiene

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x,t)\ dxdt = \int_{\partial T} (-u_t(x,t)\ dx - u_x(x,t))\ dt,$$

donde ∂T está orientada positivamente.
La integral de línea anterior se descompone en tres sumandos, correspondientes, respectivamente, a los lados del triángulo T. Parametrizando cada uno de estos lados, se pueden calcular de manera explícita las integrales resultantes, obteniéndose

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x,t)\ dxdt = 2u(x_0,t_0) - u(x_0+t_0,0) - u(x_0-t_0,0) - \int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} u_t(x,0)dx$$

De aquí se deduce (4).

Por último, escribiendo la integral

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(x,t)\ dxdt$$

de la forma

$$\int_0^{t_0} \int_{t+x_0-t_0}^{-t+x_0+t_0} (u_{tt} - u_{xx})(x,t)\ dxdt,$$

se dispone de una fórmula que proporciona la posible solución de (3). Esto se confirma en el siguiente teorema:

Teorema 3. *Sean* $\alpha \in C^2(\mathbb{R}),\ \beta \in C^1(\mathbb{R})$ *y* $f, \dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(\overline{\Omega})$.
Entonces la única solución de (3) es

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t)\ +\ \alpha(x-t)]\ +\ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds\ + \\ &+\frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau, \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{6}$$

Para llevar a cabo la demostración, conviene que introduzcamos la función

$$H(x,t,\tau) = \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau \tag{7}$$

con lo que

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha(x+t)\ +\ \alpha(x-t)]\ +\ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds\ + \frac{1}{2}\int_0^t\ H(x,t,\tau)\ d\tau, \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}. \tag{8}$$

Entonces, tenemos

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) \; - \; \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t)+\beta(x-t)] + \frac{1}{2}[H(x,t,t) + \int_0^t H_t(x,t,\tau)\; d\tau] =$$

$$\frac{1}{2}[\alpha'(x+t) \; - \; \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t)+\beta(x-t)] + \frac{1}{2}\int_0^t (f(x+t-\tau,\tau) + f(x-t+\tau,\tau))\; d\tau,$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) \; + \; \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta'(x+t)-\beta'(x-t)] +$$

$$\frac{1}{2}[f(x,t) + \int_0^t f_x(x+t-\tau,\tau)\; d\tau + f(x,t) - \int_0^t f_x(x-t+\tau,\tau)\; d\tau],$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha'(x+t) \; + \; \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t)-\beta(x-t)] + \frac{1}{2}\int_0^t H_x(x,t,\tau)\; d\tau] =$$

$$\frac{1}{2}[\alpha'(x+t) \; + \; \alpha'(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta(x+t)-\beta(x-t)] + \frac{1}{2}\int_0^t (f(x+t-\tau,\tau) - f(x-t+\tau))\; d\tau,$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}[\alpha''(x+t) \; + \; \alpha''(x-t)] + \frac{1}{2}[\beta'(x+t)-\beta'(x-t)] +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^t (f_x(x+t-\tau,\tau) - f_x(x-t+\tau,\tau))\; d\tau \tag{9}$$

A partir de las expresiones anteriores, es trivial comprobar que la función u definida en (6) es la única solución de (3).

El capítulo sigue con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación de ondas (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

El primero de ellos responde a la formulación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), & 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), & 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & t \ge 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

y modela las vibraciones pequeñas de una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$, estando la posición inicial de la misma dada por la función f y la velocidad inicial por g.

Si $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$, una solución de (10) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (10) puntualmente.

Demostramos en primer lugar que (10) puede tener, a lo sumo, una solución, usando el de método de la energía. Para ello, si u es la diferencia entre dos soluciones de (10), entonces u satisface un problema como (10), con $f = g = 0$. Si consideramos la función de energía $I(t) = \displaystyle\int_0^\pi \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2 \right) \, dx$, entonces puede probarse que $I'(t) = 0, \ \forall t > 0$. Por tanto, la función I es constante en $[0,+\infty)$. Como $I(0) = 0$, se obtiene $I(t) = 0, \ \forall \ t \geq 0$. Ello obliga a que $u_x(x,t) = u_t(x,t) = 0, \forall \ (x,t) \in \overline{\Omega}$. Así pues, u debe ser constante en $\overline{\Omega}$. Como $u(x,0) = 0, \ \forall \ x \in [0,\pi]$, se obtiene $u \equiv 0$, en $\overline{\Omega}$.

Una vez que hemos demostrado que (10) puede tener como mucho una solución, habrá que ver que, por lo menos, hay una. Para tratar de intuir cuál puede ser la forma de la solución buscada, pensemos que u es una función de dos variables y que las funciones de dos variables más sencillas que se pueden presentar son las que vienen dadas por el producto de dos funciones de una variable. Entonces, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Tendrá (10) soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{11}$$

para funciones convenientes $X : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, y $T : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$? Esto origina las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ x \in [0,\pi], \tag{12}$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \ t \in [0,+\infty). \tag{13}$$

Además, puesto que la solución buscada u debe ser continua en $\overline{\Omega}$, se ha de cumplir

$$u(0,t) = X(0)T(t) = u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0, \forall \ t \in [0,+\infty).$$

Esto nos conduce a la "condición natural" que ha de satisfacer la función X en los extremos del intervalo : $X(0) = X(\pi) = 0$. Todo ello origina el siguiente problema de contorno para $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ x \in [0,\pi], \ X(0) = X(\pi) = 0. \tag{14}$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real λ son aquellos para los que (14) tiene solución no trivial. Así, diremos que λ es valor propio de (14) si (14) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla,

puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado λ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \lambda X(x) = 0, \ x \in [0,\pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:
- Si $\lambda = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1, \ X^2(x) = x, \ \forall \ x \in [0,\pi]$.
- Si $\lambda > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\lambda}x), \ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\lambda}x), \ \forall \ x \in [0,\pi]$.
- Si $\lambda < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = cos(\sqrt{-\lambda}x), \ X^2(x) = sen(\sqrt{-\lambda}x), \ \forall \ x \in [0,\pi]$.

Cualquier solución de (14) es de la forma $X(x) = c_1X^1(x)+c_2X^2(x), \ \forall \ x \in [0,\pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:
- Si $\lambda = 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\pi = 0, \end{gathered}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\lambda = 0$, no es valor propio de (14).
- Si $\lambda > 0$,

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\lambda}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\lambda}\pi) = 0. \end{gathered}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\lambda}\pi) - \exp(\sqrt{\lambda}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (14).
- Si $\lambda < 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 cos(\sqrt{-\lambda}\pi) + c_2 sen(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0. \end{gathered}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\lambda = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (14) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall \ x \in [0,\pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (14) es el conjunto $\{-n^2, \ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\lambda = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (14) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall \ x \in [0,\pi]$.
Por otra parte, la constante λ ha de ser la misma en (12) y (13). Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de soluciones reales de (13) es un espacio vectorial real de dimensión dos engendrado por las funciones $T_n^1(t) = cos(nt), T_n^2(t) = sen(nt)$.
Por tanto, cuando $\lambda = -n^2, \ n \in \mathbb{N}$, cualquier solución de (13) es de la forma $Z_n(t) = A_n cos(nt) + B_n sen(nt)$, con A_n, B_n números reales arbitrarios.

El procedimiento anterior permite calcular la única solución de (10) en casos sencillos. En efecto, si las funciones f y g son de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i sen(n_i x),$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j sen(m_j x),$$

siendo $a_i,\ 1 \leq i \leq p,\ b_j,\ 1 \leq j \leq q$, números reales dados y $n_i,\ 1 \leq i \leq p,\ m_j,\ 1 \leq j \leq q$, números naturales distintos, entonces (10) tiene una única solución dada por

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{p} a_i cos(n_i t) sen(n_i x) + \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{m_j} sen(m_j t) sen(m_j x)$$

Usando Series de Fourier, extendemos las ideas anteriores a casos más generales, obteniendo el resultado siguiente:

Teorema 4. *Si f y g satisfacen las condiciones*

$$f \in C^3[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$
$$g \in C^2[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0,$$

entonces (10) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n\ \sin(nt)\right)\ \sin(nx),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\ \sin(nx)\ dx,\ B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x)\ \sin(nx)\ dx,\ \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

El otro problema de tipo mixto que estudiamos responde a la formulación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \geq 0,
\end{aligned} \tag{15}$$

que se corresponde con el caso en que los extremos de la cuerda están libres. Estudiamos la existencia (método de separación de variables) y unicidad (método de la energía) de las soluciones de (15) de forma análoga a como hemos hecho para (10), obteniendo el resultado siguiente.

Teorema 5. *si f y g satisfacen las condiciones*

$$\begin{array}{c} f \in C^3[0,\pi],\ f'(0^+) = f'(\pi^-) = 0, \\ g \in C^2[0,\pi],\ g'(0^+) = g'(\pi^-) = 0, \end{array} \tag{16}$$

entonces (15) *tiene una única solución u dada por la fórmula*

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nt) + B_n sen(nt))\, cos(nx) \tag{17}$$

donde

$$\begin{array}{c} A_n = f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi f(x)cos(nx)\ dx, \forall\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ B_0 = g_0 = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)dx,\ B_n = \dfrac{g_n}{n} = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^\pi g(x)cos(nx)\ dx,\ \forall\ n \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{18}$$

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002. Capítulo IV

2. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky. Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. Es de gran interés el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Comentemos detalladamente los casos $n = 2$ y $n = 3$, representativos de lo que ocurre, respectivamente, para n par e impar, generales.

   Sea el problema

$$\begin{array}{c} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \phi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{array} \tag{19}$$

Si $\Omega = \{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : t > 0 \}$, una solución de (19) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisface (19) en todo punto.

El método que vamos a utilizar para solucionar (19) se denomina método de las medias esféricas y sus ideas fundamentales son las siguientes:

1) Si u es cualquier solución de (19) y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado, se puede definir la función

$$I(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} u(y_1,y_2,y_3,t)\ ds,$$

donde $S((x,y,z);\ r)$ es la esfera centrada en (x,y,z), de radio r, y la integral anterior es una integral de superficie en las variables (y_1,y_2,y_3).

Claramente, la función anterior, llamada media esférica de u, está definida para cualquier $r > 0$ y cualquier $t \geq 0$. Además, los valores $I(r,0)$, $I_t(r,0)$, se calculan a partir de los datos iniciales de (19); en efecto,

$$I(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \phi(y_1,y_2,y_3)\ ds \equiv F(r),$$

$$I_t(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \psi(y_1,y_2,y_3)\ ds \equiv G(r).$$

2) El objetivo es, a partir de las funciones F y G, calcular $I(r,t)$. Posteriormente, observando que la continuidad de u, implica

$$u(x,y,z,t) = \lim_{r \to 0^+} I(r,t),$$

llegaríamos a una expresión para la función u, que tendríamos que demostrar que define una solución de (19).

La anterior discusión permite enunciar y probar el siguiente teorema sobre existencia y unicidad de soluciones de (19):

Teorema 6. *Si* $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *y* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, *el problema de Cauchy (19) tiene una única solución* u *dada, para* $t > 0$, *por*

$$\begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \phi(Y)\ ds_Y\right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \psi(Y)\ ds_Y, \end{aligned} \tag{20}$$

Merece la pena realizar algunos comentarios sobre la conclusión del teorema anterior, y compararlos con los que hicimos sobre la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno. Por ejemplo, el valor $u(X,t)$ depende de los valores de ψ, ϕ y de los de las derivadas parciales de primer orden de la función ϕ en la esfera centrada en X y de radio t (principio de Huygens). Así, este conjunto puede considerarse ahora como el dominio de dependencia de un punto (X,t). Recíprocamente, los datos iniciales ϕ y ψ cerca de un punto X_0 del hiperplano $t = 0$, sólo tienen influencia en los valores $u(X,t)$ para aquellos puntos (X,t) que están "cerca"del cono $|X - X_0| = t$. Por tanto, si ϕ y ψ tienen soporte contenido en algún subconjunto D de $\mathbb{R}^3$, para que $u(X,t)$ no sea cero, el punto X debe pertenecer a alguna esfera de radio t con centro en algún punto $Y \in D$. La unión de todas estas esferas contiene al soporte de la función u en el tiempo t. Esto es típico de las soluciones de la ecuación de ondas en dimensiones impares.

Seguidamente se pueden aprovechar los resultados obtenidos sobre el problema (19), para estudiar el problema de Cauchy en dimensión dos:

$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = u_{tt},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ t > 0, \\ u(x,y,0) = \phi(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\ u_t(x,y,0) = \psi(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{gathered} \tag{21}$$

Si $\Omega = \{\ (x,y,t) \in \mathbb{R}^3 :\ t > 0\ \}$, una solución de (21) es cualquier función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaga (21) en todo punto.

A partir de la fórmula que proporciona la única solución de (19), aplicaremos el llamado **método del descenso** para encontrar la fórmula de la solución de (21).

Teorema 7. *Si* $\phi \in C^3(\mathbb{R}^2)$ *y* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^2)$, *el problema (21) tiene una única* *solución dada por*

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\leq 1} \frac{\psi(x+t\xi_1, y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\, d\xi_1 d\xi_2 + \\ &+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\leq 1} \frac{\phi(x+t\xi_1, y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\, d\xi_1 d\xi_2\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

Quizás la novedad más importante sea lo que es ahora el dominio de dependencia de un punto (x, y, t) de Ω. Claramente se observa, a partir de las dos fórmulas anteriores, que éste debe ser la bola euclídea cerrada de centro (x, y) y radio t. Esto marca una profunda diferencia entre los casos $n = 3$ (donde es válido el principio de Huygens) y $n = 2$ (donde tal principio no se verifica).Se puede consultar para estos aspectos: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

2. La solución del problema (10) puede escribirse de una manera más conveniente, usando el método de propagación de las ondas. Con esto puede probarse que se pueden rebajar las condiciones de regularidad sobre f y g. Más concretamente, *si f y g satisfacen las condiciones*

$$\begin{gathered} f \in C^2[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^1[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{gathered}$$

entonces la única solución u de (10) está dada por la fórmula (llamada fórmula de d'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G_1(z)\ dz,$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y $2\pi-$periódicas de f y g, a $\mathbb{R}$. Para este aspecto puede consultarse: A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, 2002 (capítulo IV, ejercicio 9).

3. Puede demostrarse la equivalencia entre la ecuación de ondas y una cierta ecuación en diferencias, que ayuda a la aproximación numérica de las soluciones de dicha ecuación, así como al cálculo efectivo de la solución de ciertos problemas de tipo mixto. En efecto, si $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, entonces son equivalentes:
1) $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$.
2) $u(P_1)+u(P_4) = u(P_2)+u(P_3)$, para cualquier cuaterna de puntos P_1, P_2, P_3, P_4, de $\mathbb{R}^2$, que sean vértices de paralelogramos característicos (sus lados son rectas características) arbitrarios, situados de tal forma que P_1 y P_4 sean vértices opuestos (y por tanto, P_2 y P_3).

No deja de llamar la atención de los alumnos el hecho de que en 2) no aparezca ninguna expresión diferencial. Para este aspecto puede consultarse: F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.

4. Es muy recomendable que el alumno consulte la bibliografía recomendada para estudiar los principales hechos de las series de Fourier en varias variables (especialmente en dos y tres variables), así como sus aplicaciones al estudio de problemas de tipo mixto para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Hay nociones que son similares (por ejemplo la noción de base del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$). Otras en cambio, se van complicando a medida que la dimensión aumenta, como por ejemplo los criterios de convergencia puntual de la serie de Fourier.
   En general, al aplicar el **método de separación de variables** a estos problemas se llegaría a problema de valores propios del tipo

$$\begin{array}{c} \Delta X(x) \ + \ \lambda X(x) = 0, \ x \in \Omega, \\ X(x) = 0, \ x \in \partial\Omega, \end{array}$$

   donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$. Se puede consultar para este tema: A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

EJERCICIOS

En esta relación de ejercicios se plantean al alumno diversos problemas asociados a la ecuación de ondas, tanto homogénea como no homogénea. Se pretende que el alumno adquiera suficiente destreza como para poder resolver diferentes problemas de valores iniciales y problemas de tipo mixto. La interpretación física de estos problemas se ha detallado en el resumen teórico anterior y es muy conveniente que el alumno conozca de manera adecuada dicha interpretación para su posible aplicación en otras asignaturas.

1. Calcular la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{array}{c} u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = x, \ u_t(x,0) = 0, \ x \in \mathbb{R}, \end{array}$$

   donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sugerencia: resuélvase en primer lugar el caso en el que $c = 1$ y a continuación hágase un cambio de variable adecuado para resolver el caso de c general.

2. (**Propuesto en el examen del 03/02/06**) Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

$$u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}(x) \ , \quad x \in \mathbb{R} \ , t > 0$$

$$u(x,0) = x^2, \ \forall\, x \in \mathbb{R}; \quad u_t(x,0) = x^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Si u es la función solución del problema anterior, ¿cuánto vale $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$?

3. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0.
\end{aligned}$$

cuando $f(x) = \sin^3(x), \ g(x) = x(\pi - x), \ \forall\, x \in [0,\pi]$.

4. Demuéstrese que el problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \sin(x), && 0 \le x \le \pi, \ t > 0 \\
u(x,0) &= 2 \sin(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0
\end{aligned}$$

tiene una única solución u. Defínase la energía de la onda u, en el tiempo t. Demuéstrese que dicha energía no es constante.

5. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0,
\end{aligned}$$

cuando tomamos las funciones $f(x) = \cos^2 x, \ g(x) = 2x - \sin(2x), \ \forall\, x \in [0,\pi]$.

6. (**Examen del 21/12/2004**)

   a) Escríbase de manera precisa la formulación del **primer problema de tipo mixto para la ecuación de ondas unidimensional**, así como el concepto de solución del mismo.

   b) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de tipo mixto anterior, proporcionando además la fórmula que da la única solución .

   c) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x),\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0,\end{gathered} \tag{23}$$

   donde

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \pi/2, \\ (\pi - x), & \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

7. (**Examen del 03/02/2005**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= \sin x, && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{24}$$

   Sugerencia: búsquese la solución u de (1) de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$.

8. (**Examen del 07/09/2005**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \sin x,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin^2 x,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0,\end{gathered} \tag{25}$$