Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. tercer curso, 05/09/2007, segunda parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema

$$\begin{array}{c} \Delta u(x,y) = 0, \ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y), \ (x,y) \in \partial\Omega. \end{array} \tag{1}$$

   (a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que, mediante un cambio a coordenadas polares (ρ, ϕ), el problema (1) se transforma en

$$\begin{array}{c} \dfrac{1}{\rho} \ \dfrac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \dfrac{1}{\rho^2} \ \dfrac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0, \ 0 < \rho < 1, \ \phi \in \mathbb{R}, \\ \\ u(1,\phi) = g(\phi), \ \phi \in \mathbb{R}, \end{array} \tag{2}$$

   donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función continua y 2π-periódica definida por $g(\phi) = f(cos\ \phi, sen\ \phi)$.

   (b) (**1 punto**) Demuéstrese que las funciones constantes y, para cada número natural n, las funciones

$$u_n(\rho,\phi) = \rho^n (A_n cos\ (n\phi) + B_n sen\ (n\phi)),$$

   donde A_n, B_n son números reales arbitrarios, son soluciones de la ecuación que aparece en (2).

   (c) (**1 punto**) Usando el apartado anterior, escríbase la fórmula (dada por una serie infinita) que resuelve (2).