Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. tercer curso, 05/09/2007, primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 puntos**) Formúlese el primer problema de tipo mixto asociado a la ecuación de ondas unidimensional sobre el conjunto de puntos $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$ y enúnciese un teorema de existencia y unicidad de solución para dicho problema. Dar la fórmula explícita de dicha solución como serie de Fourier.

   (b) (**1 punto**) Calcúlese la única solución del problema

$$(P_0) \equiv \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \le x \le \pi/2, \\ \pi - x, & \text{si } \pi/2 \le x \le \pi. \end{cases}$$

   (c) (**1 punto**) Calcúlese la única solución del problema de Cauchy

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \operatorname{sen}^2 x, \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**) Sean $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ dos constantes. Considérese el problema

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ 0 \le x \le \pi,\ \ 0 < t \le T, \\ u(0,t) = c_1,\ u(\pi,t) = c_2,\ 0 \le t \le T, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi. \end{gathered} \tag{1}$$

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor y usando dicho principio pruébese que si $c_1 = c_2 = 0$ y $f \equiv 0$, entonces (1) sólo tiene la solución $u \equiv 0$.

   (b) (**0.5 puntos**) Si $c_1 = c_2 = 0$ y $f \in C^1([0,\pi])$ satisface $f(0) = f(\pi) = 0$, dar la fórmula explícita de la única solución de (1) como serie de Fourier.

   (c) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que si $f \in C^1([0,\pi])$ satisface $f(0) = c_1,\ f(\pi) = c_2$, entonces (1) tiene una única solución. Dar una fórmula (en términos de la función f y de las constantes c_1, c_2) que proporcione dicha solución. *Indicación: Hacer un cambio de variable $v(x,t) = u(x,t) + Mx + N$ para unas adecuadas constantes M y N.*

   (d) (**0.5 puntos**) En el caso particular de que $c_1 = c_2$ y la función f sea la constante c_1 (es decir $f(x) = c_1, \forall x \in [0,\pi]$), ¿Cuál es la solución $u(x,t)$ del anterior apartado?