



Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2006, Primera parte

1. (Valor total del ejercicio 3.5 puntos)

Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}, & 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= g(x), & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

- (a) (0.5 puntos) Interpretese (1) desde el punto de vista de la Física.
- (b) (1 punto) Demuéstrese que (1) tiene, a lo sumo, una solución. (Sugerencia: método de la energía).
- (c) (1 punto) Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^m a_i \operatorname{sen}(i x), \quad g(x) = \sum_{j=1}^p b_j \operatorname{sen}(j x),$$

siendo $a_i, 1 \leq i \leq m$ y $b_j, 1 \leq j \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (1)?

- (d) (1 punto) Si $g \equiv 0$ y $f \in C^3[0, \pi]$, $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$, ¿cuál es la única solución de (1)?

2. (Valor total del ejercicio 3 puntos)

- (a) (1 punto) Enúnciese de manera precisa el primer problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.
- (b) (2 puntos) Cálculase la única solución del siguiente segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 < t \leq T$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ x - \frac{\pi}{2}, & \text{si } \frac{\pi}{2} < x \leq \pi. \end{cases}$$