Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 07/09/2005, Primera parte

1. (**2 puntos**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

   Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho \mathrm{sen}\phi$, el problema anterior se transforma en

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathrm{R}, \\ u(1,\phi) = g(\phi),\ \phi \in \mathrm{R}, \end{aligned} \tag{2}$$

   donde $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ está definida como $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.

2. (**3 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen} x,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \mathrm{sen}^2 x,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \end{aligned} \tag{3}$$