CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN Y MOTIVACIÓN [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Ley de Newton sobre el potencial gravitacional de distribuciones de masas discretas y continuas (no imprescindible).
2. Teorema fundamental del cálculo y teorema de derivación de una integral paramétrica.
3. Cálculo de las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Estos conocimientos se pueden consultar, por ejemplo, en las referencias siguientes:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.
2. I. Peral : Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales.Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. J.J. Quesada: Ecuaciones diferenciales, análisis numérico y métodos matemáticos. Editorial Santa Rita, Granada, 1996.
4. http://mathworld.wolfram.com/
5. http://scienceworld.wolfram.com/physics/

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo básico de este capítulo es que el alumno conozca el origen de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), tanto en su relación con otras disciplinas matemáticas como en el importante papel que juegan en las aplicaciones a diversas

[1] A. Cañada, Septiembre 2006, EDPICCP

materias, especialmente ingeniería, física, etc. Se pretende de manera especial que el alumno reconozca adecuadamente los tres tipos básicos de EDP: la ecuación de ondas, la ecuación del calor y la ecuación del potencial. Asimismo, el alumno debe prestar una atención especial a los párrafos en letra negrita que le informan de problemas que aparecen en ingeniería, física, etc., relacionados con EDP.

El problema de la cuerda vibrante y la ecuación de ondas

El primer problema que presentamos en este capítulo es el problema de la cuerda vibrante. Puede describirse de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t $(t \geq 0)$. El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond D'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean "*pequeñas*"), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219) que la función u debe satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && 0 < x < \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0
\end{aligned} \tag{1}$$

(1) es un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas.** La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero. La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos. En definitiva, además de la ecuación se consideran dos tipos de condiciones:

condiciones en el tiempo inicial y condiciones en la frontera de la cuerda (de ahí el nombre de problemas de tipo mixto).

D'Alembert demostró también que la solución de (1) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{2}$$

donde $\tilde{f}$ es "*una extensión conveniente de la función* f." De manera más precisa, $\tilde{f}$ se obtiene, a partir de f, realizando una extensión a $\mathbb{R}$, impar y $2\pi-$ periódica. Esto se verá con detalle en el capítulo II.

La fórmula (2) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función.
Otra manera de obtener la solución del problema (1) completamente distinta de la vista anteriormente fue propuesta por Daniel Bernouilli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (1) como superposición de ondas sencillas. Estas ondas sencillas pueden obtenerse usando el método de separación de variables, obteniéndose las funciones

$$u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt), \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0,\pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (3).

D. Bernouilli afirmó que la solución de (1) se representa de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt), \tag{4}$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (1). Si la solución propuesta por Bernouilli es correcta, ello obligaría a que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi], \tag{5}$$

para una adecuada elección de los coeficientes a_n. Las ideas expuestas por Bernouilli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (5) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*".

Las condiciones sobre el problema de la cuerda vibrante original pueden ser más generales. Por ejemplo, la velocidad inicial de la cuerda no tiene que ser necesariamente cero. También la posición de los extremos de la misma puede variar con el tiempo. Esto origina problemas de tipo mixto más generales que (1) de la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + h(x,t), && 0 < x < \pi, \ t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = m_1(t), & \qquad u(\pi,t) = m_2(t), && t \ge 0 \end{aligned} \tag{6}$$

También, problemas de vibraciones en dimensiones superiores a uno (por ejemplo, el problema de la membrana vibrante) conducen a la ecuación de ondas $n-$ dimensional

$$\frac{\partial^2 u(x_1,...,x_n,t)}{\partial t^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1,...,x_n,t)}{\partial x_i^2} \tag{7}$$

Ecuaciones similares a la de ondas aparecen, además, en otras muchas situaciones de interés para los estudiantes de ingeniería. Por ejemplo:

1. **En el estudio de los desplazamientos longitudinales de una viga, de sección constante S, en las hipótesis de la Resistencia de Materiales, la función $u(x,t)$ que define dichos desplazamientos longitudinales, verifica la ecuación**

$$\rho u_{tt} = ESu_{xx} + h(x,t)$$

donde ρ es la masa por unidad de longitud del medio, E es el módulo de Young y $h(x,t)$ la fuerza por unidad de longitud actuando en el punto x y en el instante t.

2. **La ecuación anterior aparece también en el estudio de los desplazamientos en profundidad de un terreno y en el estudio de la torsión de una barra.**

3. **Ecuaciones de Maxwell en Electromagnetismo.**

La ecuación del calor y el nacimiento de las series de Fourier

Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés, envió en 1807 un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre el tema de la propagación del calor. Más concretamente, **Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), Fourier se planteó la siguiente cuestión: ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?**
Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas, demostró que si $u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t , entonces la función u debe satisfacer:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned} \tag{8}
$$

De nuevo estamos ante un **problema de tipo mixto**. La primera condición en (8) es la **ecuación del calor**. La segunda significa que la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de Bernouilli para la ecuación de ondas (soluciones con variables separadas), Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan formalmente dicha ecuación, obtenemos los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{9}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0,\ 0 < t < T. \tag{10}$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Es fácil ver que (9) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (9) es un espacio vectorial real de dimensión uno generado por la función $sen(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (10) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2 t)$. Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas soluciones elementales de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{11}$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura f, es algún múltiplo de $sen(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (8) es un múltiplo adecuado de v_n
Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernouilli, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución u de (8), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (8) sea de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{12}$$

como en el caso de la ecuación de ondas? Fourier afirmó en su artículo que esto era así, obteniéndose de nuevo la relación (5). Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes que han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas.

Otras situaciones dan lugar a problemas distintos. Por ejemplo, si se trata de estudiar la temperatura de una varilla delgada, pero donde se sustituye el hecho de que los extremos de la misma estén a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados, tenemos el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T,\\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T,\\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi.
\end{aligned} \tag{C2}$$

Problemas relacionados con la propagación del calor en cuerpos tridimensionales originan la ecuación del calor en dimensión tres. En general, la ecuación del calor $n-$ dimensional se expresa de la forma:

$$\frac{\partial u(x_1, ..., x_n, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x_1, ..., x_n, t)}{\partial x_i^2} \tag{13}$$

Otras situaciones de interés para los estudiantes de ingeniería, donde aparecen ecuaciones similares a la ecuación del calor son las siguientes:

1. **Difusión de sustancias químicas en otro medio.**

2. **En el estudio del flujo de agua en acuíferos en un medio no homogéneo se obtiene, suponiendo un flujo bidimensional, una ecuación de la forma**

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial x_j} \right) = f(x_1, x_2, t)$$

Obsérvese que si $a_{ij} = \delta_{ij}$ (la delta de Kronecker), entonces tenemos la ecuación del calor bidimensional.

La ecuación del potencial y el cálculo de variaciones

La ecuación del potencial tiene su origen en la teoría de Newton de la gravitación universal. Posteriormente, Gauss, Green y Kelvin, en el siglo XIX, realizaron aportaciones importantes dentro del marco del llamado análisis vectorial, no sólo en el tema del potencial gravitacional sino también en temas relacionados con electrostática e hidrodinámica.
El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ por una masa m localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G \, \frac{m}{\|x - \xi\|}$$

donde G es la constante de gravitacional universal y $\| \cdot \|$ denota la norma euclídea. La fuerza gravitacional $g(x)$ viene dada por $g(x) = -\nabla V(x)$, donde ∇V indica el gradiente de la función V. Trivialmente se comprueba que el potencial es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, esto es, que verifica la **ecuación de Laplace**

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\} \tag{14}$$

Aquí, ΔV es el laplaciano de la función V, dado por

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} \tag{15}$$

El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define de manera análoga como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

Trivialmente V es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.
Lo anterior se refiere a "distribuciones discretas finitas de masas". Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una "distribución continua de masa" que se encuentra en el espacio euclídeo. Aquí la suma finita se transforma en una "suma continua", dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$. **Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de $\mathbb{R}^3$ con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \to \mathbb{R}^3$, el potencial gravitacional se define como**

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi \tag{16}$$

Trivialmente $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$.Bajo condiciones muy amplias (ρ medible y acotada) se demostrará en el capítulo IV que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Sin embargo, se mencionarán también ejemplos en este capítulo que ponen de manifiesto que aunque ρ sea continua, V no tiene que ser necesariamente de clase C^2 en Ω. Trivialmente

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \notin \overline{\Omega} \tag{17}$$

Demostraremos en el capítulo IV que si $\rho \in C^1(\Omega)$ y además es acotada, entonces

$$\Delta V(x) = 4\pi G \rho(x), \ \forall \ x \in \Omega \tag{18}$$

Como curiosidad, puede demostrarse fácilmente que

$$\Delta_x \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} = 0, \ \forall x \neq \xi$$

con lo que, para obtener las derivadas de segundo orden de V en Ω, no puede intercambiarse la derivación con la integración en la fórmula (16). *Esto le suele llamar la atención a los alumnos. No porque crean que siempre se pueden intercambiar ambas operaciones (ya nos encargamos los matemáticos de ponerles suficientes ejemplos patológicos al respecto) sino porque este es un ejemplo muy natural que surge en*

ingeniería y física donde se pone de manifiesto que el rigor matemático es crucial si se quieren hacer las cosas bien.
Las disquisiciones anteriores motivan el estudio de la existencia de soluciones radiales no triviales de la ecuación de Laplace (14): soluciones de la forma $V(x) = v(\|x-\xi\|)$. Esto origina la ecuación diferencial ordinaria

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\ r \in (0, +\infty). \tag{19}$$

Integrando esta ecuación se obtiene lo que se llama solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \ln \|x-\xi\|, \ \text{si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n}\|x-\xi\|^{2-n}, \ \text{si } n > 2. \end{cases} \tag{20}$$

que, como su nombre indica, desempeñará un papel importante en el estudio de ecuaciones elípticas en el capítulo IV.

El principio del máximo-mínimo para funciones armónicas, que se demostrará en el capítulo IV, motiva el tipo de problemas que "de una manera lógica" se pueden asociar a la ecuación del potencial: **los problemas de contorno**. Este hecho se ve corroborado en las aplicaciones de la teoría de ecuaciones elípticas a la Ciencia, donde tales problemas de contorno se presentan con frecuencia. Por ejemplo, en electrostática, los problemas de contorno usuales (problema de Dirichlet) responden al planteamiento

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = g(x), \ x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), \ x \in \partial\Omega \end{array} \tag{21}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega$ indica su frontera topológica y las funciones f y g son dadas. En cambio, en hidrodinámica lo usual son problemas de contorno del tipo

$$\begin{array}{c} \Delta u(x) = g(x), \ x \in \Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = f(x), \ x \in \partial\Omega \end{array} \tag{22}$$

donde n indica el vector normal exterior a $\partial\Omega$ y $\dfrac{\partial u(x)}{\partial n} =< \nabla u(x), n(x) >, \ \forall\, x \in \partial\Omega$. Estos se conocen con el nombre de problemas de contorno tipo Neumann.

La ecuación de laplace $n-$dimensional se escribe de la forma

$$\Delta V(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_i^2} = 0$$

y se cumple para soluciones estacionarias (soluciones que no dependen de la variable tiempo t) de las ecuaciones $n-$dimensionales de ondas (7) y del calor (13).

Hablemos a continuación del llamado cálculo de variaciones.
La primera publicación de Leibnitz sobre cálculo diferencial apareció en 1.684, con el título "Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus". Esto muestra el interés de los matemáticos, ya desde finales del siglo XVII, por los problemas de máximos y mínimos. Los problemas que trata el cálculo de Variaciones se formularon desde el origen del cálculo diferencial. El nombre de cálculo de variaciones se debe a que así se llamaba a la derivación (variación $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$, y posterior paso al límite) al comienzo. Usando algo más el lenguaje matemático, diremos que el cálculo de variaciones trata sobre problemas de máximos, mínimos y puntos críticos de funciones (¿funcionales?)

$$f : M \to \mathbb{R}$$

donde, según motivan las aplicaciones, M puede ser un conjunto de números, de funciones, de curvas, de superficies, etc.
Quizás una de las frases más acertadas sobre el método variacional y que puede dar idea de su importancia, sea la siguiente, atribuida a Euler: "*Puesto que el Universo es perfecto y fue creado por el Creador más sabio, nada ocurre en él, sin que esté presente alguna ley de máximo o mínimo.*"

Suele considerarse que lo que se entiende hoy en día por cálculo variacional, nació con la proposición de Johann Bernouillien 1.696 del problema de la braquistocrona: una masa puntual se desliza, por acción de la gravedad, desde un punto A, hasta otro punto B, a través de alguna curva. Claramente, el tiempo empleado para ir desde A hasta B, depende de la curva elegida. ¿Para qué curva se tendrá que tal tiempo es mínimo? Esto exige el estudio de funcionales de la forma

$$\int_a^b \left(\frac{1+y'(x)^2}{2gy(x)} \right)^{1/2} \, dx$$

La solución no es ni el segmento rectilíneo que une A con B, ni ningún arco de circunferencia que pase por A y B. La solución, un arco de cicloide, fue encontrada por diferentes matemáticos: Jakob Bernouilli, Newton, Leibnitz, L'Hopital, etc.
Otro problema significativo del cálculo de variaciones es el que se conoce con el nombre de problema isoperimétrico: "Dado un número real positivo L, se trata de estudiar la cuestión siguiente: de todas las curvas cerradas del plano de longitud dada $L > 0$, ¿cuál es la que encierra mayor área?"

En problemas variacionales relacionados con EDP, el principio de Dirichlet suele considerarse el punto de partida. Para ello, sea Ω un dominio (subconjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$. Consideremos el problema de contorno

$$\left.\begin{array}{ll} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega \\ u(x) = f(x) & x \in \partial\Omega \end{array}\right\} \tag{23}$$

Lo que se trata es del estudio de la existencia de funciones armónicas en Ω que tomen valores prefijados, dados por la función f, en la frontera de Ω.

En el estudio de este problema desde el punto de vista variacional, se considera el llamado funcional de energía:

$$F(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx = \int_\Omega \left[\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} \right)^2 + ... + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^2 \right] dx \tag{24}$$

que está definido sobre el conjunto de funciones:

$$\mathcal{A} = \left\{ u : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R} \quad / \quad u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega), u_{|\partial\Omega} = f \right\} \tag{25}$$

(o un conjunto más amplio que se precisará en su momento). En electrostática, u es el potencial eléctrico y $F(u)$ la energía.

Los puntos estacionarios de F son, en algún sentido que se precisará, soluciones del problema (23) (principio de Dirichlet). En particular es de interés el estudio de la existencia de $\min_{\mathcal{A}} F$. Se pensó durante mucho tiempo que este problema siempre tenía solución, ya que F está acotado inferiormente. No obstante, matemáticos como Weierstrass encontraron contraejemplos interesantes.

Los problemas del cálculo de variaciones son de una gran importancia en la actualidad. Por ejemplo, diseñar la forma de un avión o un automóvil para que su resistencia al aire sea mínima. Problemas donde se trata de controlar un determinado sistema para obtener un rendimiento óptimo, problemas sobre la mejor estrategia en determinados juegos, etc.

Los ejemplos detallados que se presentan en este capítulo surgieron en los siglos XVIII y XIX. No obstante, siguen representando un papel fundamental en la teoría moderna de EDP y en torno a ellos, o a variaciones de ellos, existen numerosos interrogantes que se comentarán en el curso. La teoría moderna de EDP surgió a finales del siglo XIX y principios del XX con contribuciones importantes de Poincaré y Hilbert, alcanzando un grado notable de contenido con el desarrollo en la primera mitad del siglo XX del análisis funcional. Desde mediados de los años cincuenta del siglo pasado el uso de funciones generalizadas (distribuciones, espacios de Sobolev, etc.) y de la teoría de espacios de Hilbert, ha permitido avances muy importantes.

Por último, diremos que en la actualidad hay un interés especial (debido a las aplicaciones) por el estudio de EDP no lineales así como por los métodos numéricos de aproximación a las soluciones de las mismas.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada, Series de Fourier y Aplicaciones. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.
2. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
3. A.N.Tijonov y A.A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Es muy recomendable que el alumno complete la información histórica que se proporciona en el capítulo con las referencias siguientes:

1. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, Madrid, 2002. En la Introducción de este libro se pueden consultar algunos hechos relevantes de los métodos de Fourier y su relación con las EDP.
2. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992. Muy recomendable para la historia de las EDP en los siglos XVIII y XIX.
3. Página web:
   http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html

EJERCICIOS

El objetivo fundamental de esta primera relación de ejercicios es que el alumno se familiarice con los tres tipos básicos de EDP (ecuación de ondas, ecuación del calor y ecuación de Laplace) así como con soluciones fundamentales de las mismas. Se pretende, además, que el alumno recuerde algunos hechos básicos sobre cambios de variables así como sobre series de funciones que serán importantes en los capítulos siguientes.

1. Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{26}$$

a) Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x+t,\ \mu = x-t$, la ecuación anterior se transforma en

$$u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathbb{R}^2 \tag{27}$$

b) Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de (27) y usando el cambio de variable indicado, calcúlese el conjunto de soluciones de (26).

c) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (26) y de (27) es un espacio vectorial real de dimensión infinita (se pueden encontrar infinitas soluciones linealmente independientes).

d) Compárense los resultados anteriores con los que el alumno conoce para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y homogéneas de segundo orden, es decir, ecuaciones de la forma $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0,\ t \in [a,b]$. ¿Cuál es la diferencia fundamental que observa el alumno?.

e) Extiéndanse los resultados anteriores para una ecuación de ondas de la forma

$$u_{xx}(x,t) = a^2 u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{28}$$

donde a es una constante no nula.

2. (**Propuesto en el examen realizado el 03/02/06**) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t)\ , \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2 \tag{29}$$

Teniendo en cuenta el ejercicio previo, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (29).

(Sugerencia: recuérdese que $\dfrac{\partial \left(\int_0^t H(x,t,s)\,ds \right)}{\partial t} = H(x,t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial H(x,t,s)}{\partial t}\,ds$).

3. (**Propuesto en el examen de Matemáticas del 25/06/05**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + b u_y(x,y) + ab u(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \tag{30}$$

donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

a) Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (30).

4. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x,t) \equiv \operatorname{sen}(nx)\cos(nt)$ es solución de la ecuación de ondas (26).
   Demuéstrese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es asimismo solución de (26).
   Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$ sea de clase $C^2(\mathbb{R}^2)$ y verifique la ecuación de ondas.

5. El núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor se define como

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

   en dimensión uno y como

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

   para dimensión n arbitraria. Aquí, $\|x-\xi\|^2$ representa el cuadrado de la norma euclídea del vector $x-\xi$, es decir, si $x = (x_1,\ldots,x_n), \xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$, entonces

$$\|x-\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \xi_i)^2$$

   Pruébese que para cada $\xi \in \mathbb{R}^n$ fijo, el núcleo $K(x,\xi,t)$, como función de las variables (x,t) es solución de la ecuación del calor para $t > 0$, es decir que se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x,\xi,t) = 0, \ \forall \ t > 0.$$

6. Demuéstrese que para cada $n \in \mathbb{N}$, la función $u_n(x,t) \equiv \operatorname{sen}(nx)\exp(-n^2 t)$ es solución de la ecuación del calor. Asimismo, pruébese que cualquier combinación lineal finita de funciones del tipo anterior es solución de la ecuación del calor.
   Dar condiciones suficientes sobre la sucesión de números reales $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ para que la función $u(x,t) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t)$ sea de clase C^2 y verifique la ecuación del calor para $t > 0$.

7. (**Propuesto en el examen del 03/02/05**)

   a) Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{31}$$

y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado. Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \xi)$ es solución de (31) de la forma $u(x) = v(\|x-\xi\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0,+\infty). \tag{32}$$

Recíprocamente, si v verifica (32) entonces $u(x) = v(\|x-\xi\|)$ verifica (31) en $\mathbb{R}^n \setminus \xi$. Encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (32).

b) Usando el apartado anterior, pruébese que la solución fundamental de la ecuación de Laplace

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \ln\|x-\xi\|, \ \text{si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n}\|x-\xi\|^{2-n}, \ \text{si } n > 2. \end{cases} \tag{33}$$

es una función armónica en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$.

8. *a*) El potencial gravitacional $V(x)$ que se origina por un número finito de masas puntuales $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x-\xi_i\|}$$

donde G es la constante de gravitación universal y $\|\cdot\|$ es la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$. Demuéstrese que V es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

b) Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, una función dada (medible y acotada), donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado. Demuéstrese que el potencial gravitacional

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x-\xi\|}\, d\xi \tag{34}$$

está bien definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y que $\Delta V(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.