Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 03/02/2005

1. (**Valor total del ejercicio: 3 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= \operatorname{sen}^3 x, && 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}
$$

2. (**Valor total del ejercicio: 3 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= \operatorname{sen} x, && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

Sugerencia: búsquese la solución u de (1) de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$.

3. (**Valor total del ejercicio: 4 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

   $$\Delta u(x) = 0 \tag{2}$$

   Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (2) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

   $$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0,+\infty). \tag{3}$$

   Recíprocamente, si v verifica (3) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (2) en $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$.

   (b) (**3 puntos**) Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

   $$
   \begin{gathered}
   \Delta u(x,y) = 1,\ b^2 < x^2 + y^2 < a^2, \\
   u(x,y) = 0,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = b^2\ \ \text{ó}\ \ x^2 + y^2 = a^2
   \end{gathered}
   $$