Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales
Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos. Tercer curso, 03/02/2006, Primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Si $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, demuéstrese que la función

   $$v(x,t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\, dy \right) ds$$

   verifica

   $$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t)\ , \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$$
   $$v(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}; \quad v_t(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   (Sugerencia: recuérdese que $\dfrac{\partial \left(\int_0^t H(x,t,s)\, ds \right)}{\partial t} = H(x,t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial H(x,t,s)}{\partial t}\, ds$).

   (b) (**2 puntos**) Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy

   $$u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0$$
   $$u(x,0) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R}; \quad u_t(x,0) = x^2 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$$

   (c) (**0.5 puntos**) Si u es la función obtenida en el apartado anterior, ¿cuánto vale $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$?

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**1 punto**) Enúnciese de manera precisa el segundo problema de tipo mixto asociado a la ecuación del calor, así como la fórmula que proporciona la única solución del mismo.

   (b) (**2 puntos**) Cálculese la única solución del problema

   $$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T$$

   $$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \le T$$

   $$u(x,0) = \operatorname{sen}^3(x); \quad 0 \le x \le \pi$$

   (Sugerencia: demuéstrese previamente que $\operatorname{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)\ , \forall x \in \mathbb{R}$).