Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada
Ecuaciones en Derivadas Parciales I.C.C.P. Tercer curso, 02/02/2007, Primera parte

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 punto**) Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de solución para el primer problema mixto (tipo 1) asociado a la ecuación de ondas unidimensional sobre el conjunto de puntos $(x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$. Dar la fórmula explícita de dicha solución como serie de Fourier.

   (b) (**2 puntos**) Sean $\ell > 0$ y $u(x,t)$ la solución del problema

$$(P_0) \equiv \left\{ \begin{array}{rcl} u_{tt} - u_{xx} & = & 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0, \\ u(x,0) & = & f(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u_t(x,0) & = & g(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ u(0,t) = u(\ell,t) & = & 0, \quad t > 0, \end{array} \right.$$

   donde se suponen f y g en las hipótesis del teorema de existencia y unicidad. Escríbase la fórmula que da la única solución de (P_0) como serie de Fourier.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**2 puntos**) Enúnciese de manera precisa el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor. Aplíquese dicho principio para demostrar el siguiente resultado: Sea $f \in C^1[0,\pi]$ verificando $f(0) = f(\pi) = 0$. Sea $u(x,t)$ la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = f(x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

   Entonces se verifica

$$\max_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,T]} u(x,t) = \max_{x\in[0,\pi]} f(x) \qquad \text{y} \qquad \min_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,T]} u(x,t) = \min_{x\in[0,\pi]} f(x)$$

   (b) (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$u(0,t) = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(\pi,t) = \pi^2; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = x^2; \quad 0 \leq x \leq \pi$$

   (Sugerencia: hágase un cambio de variable $v(x,t) = u(x,t) + h(x)$ para una adecuada función h).