Métodos Matemáticos I. Control 22-nov-2021

1. *Sea γ la curva cerrada $z(t) = 2\cos(t) + i\,\mathrm{sen}(2t)$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$.*

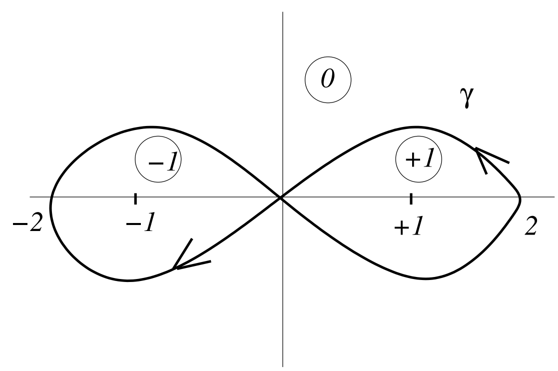
a) *γ divide $\mathbb{C}$ en dominios. Dibuja aproximadamente la curva e indica cuál es el índice de los puntos de cada dominio respecto de la curva.*

b) *Si la función multivaluada $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^{1/3}$ toma el valor $w_a = 3^{1/3}$ cuando z está al inicio de la curva y z recorre γ eligiendo en todo momento la raíz por continuidad, calcula el valor w_b de la función después de recorrer la curva. Justifícalo.*

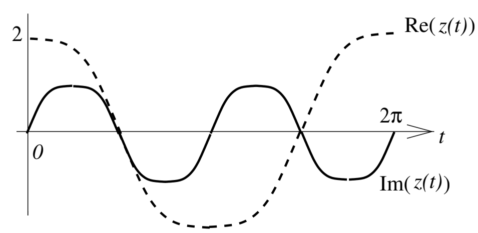
Solución:

$a)$ La curva se puede dibujar calculando algunos puntos

t	$z(t)$
0	2
$\pi/4$	$\sqrt{2}+i$
$\pi/2$	0
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}-i$
π	0
$5\pi/4$	$-\sqrt{2}+i$
$3\pi/2$	0
$7\pi/4$	$\sqrt{2}-i$
2π	2



O bien componiendo las curvas de $\mathrm{Re}(z(t))$ e $\mathrm{Im}(z(t))$:



El índice $\mathrm{Ind}(z,\gamma)$ es el número de veces que γ rodea a z con su signo. En el presente caso los puntos en el lóbulo derecho tienen índice $+1$ (sentido antihorario) y en el izquierdo -1 (sentido horario). Los puntos que están fuera de la curva tienen índice 0.

$b)$ Inicialmente $w_a = 3^{1/3}$ tiene argumento 0, al final w_b debe ser uno de los valores $w_b = 3^{1/3}e^{2\pi ik/3}$, $k = 0,1,2$. Por tanto hay que determinar el argumento de w_b. (La función multivaluada tiene tres ramas.)

Podemos calcular la variación del argumento de w a lo largo de la curva mediante

$$\begin{aligned}\Delta_\gamma \arg(f(z)) &= \frac{1}{3}\Delta_\gamma \arg(\frac{z+1}{z-1}) = \frac{1}{3}(\Delta_\gamma \arg((z+1)) - \Delta_\gamma \arg((z-1)) \\ &= \frac{1}{3}(2\pi\,\mathrm{Ind}(-1,\gamma) - 2\pi\,\mathrm{Ind}(+1,\gamma)) = -\frac{4\pi}{3}\end{aligned}$$

Dado que $\arg(w_a) = 0$ se deduce que $\arg(w_b) = -\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi$. En consecuencia

$$w_b = 3^{1/3}e^{2\pi i/3} = 3^{1/3}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

2. *Sea $u(x,y) = e^{\alpha x+\beta y}\cos(x+y)$ siendo $\alpha > \beta$. Elige α y β de modo que $u(x,y) = \mathrm{Re}(f(z))$ siendo $f(z)$ una función entera tal que $f(0) = 1-i$, determina tal función y evalúa $f((1+i)\pi)$.*

Solución:

Se puede hacer usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann para obtener $v(x,y) = \mathrm{Im}(f(z))$. Pero no toda función $u(x,y)$ tiene una armónica conjugada. Una condición necesaria es que u sea armónica, $\partial_x^2 u + \partial_y^2 u = 0$. Para escribir menos uso la notación

$$e \equiv e^{\alpha x+\beta y}, \qquad c \equiv \cos(x+y), \qquad s \equiv \mathrm{sen}(x+y)$$

de modo que $u = ec$ y

$$\begin{aligned} \partial_x u &= e(\alpha c - s), \quad \partial_x^2 u = e((\alpha^2-1)c - 2\alpha s), \\ \partial_y u &= e(\beta c - s), \quad \partial_y^2 u = e((\beta^2-1)c - 2\beta s), \end{aligned}$$

La condición de que u sea armónica requiere

$$\alpha + \beta = 0 \qquad \alpha^2 + \beta^2 = 2$$

Tiene dos soluciones, $\alpha = -\beta = \pm 1$. Como en nuestro caso $\alpha > \beta$, la solución es

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -1$$

Por C-R

$$\partial_y v = \partial_x u = e(c-s) \qquad \partial_x v = -\partial_y u = e(c+s)$$

Utilizando por ejemplo de la primera ecuación, integrando o a ojo se ve que

$$v = es + h(x)$$

siendo $h(x)$ una función real arbitraria de x. Usando ahora la segunda ecuación de C-R, así como $v(0) = -1$,

$$e(c+s) = \partial_x v = e(c+s) + h'(x) \quad \Longrightarrow \quad h'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad h(x) = \mathrm{cte} = h(0) = -1$$

En conjunto

$$f(z) = u + iv = e(c+is) - i = e^{x-y}e^{i(x-y)} - i = e^{(1+i)z} - i$$

Por último

$$f((1+i)\pi) = e^{(1+i)^2\pi} - i = e^{2i\pi} - i = 1 - i$$

Método alternativo: $u = \mathrm{Re}(f(z)) = \dfrac{1}{2}(f(z) + (f(z))^*)$, donde $f(z)$ sólo contiene z y no z^*, por C-R, y entonces $(f(z))^*$ sólo tiene z^* y no z. Teniendo en cuenta que $\cos(w) = \frac{1}{2}(e^{iw} + e^{-iw})$,

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left(e^{\alpha x+\beta y+ix+iy} + \mathrm{c.c.}\right)$$

donde c.c. indica el complejo conjugado de lo anterior.

Ahora hacemos el cambio de variable $x=(z+z^*)/2$, $y=(z-z^*)/(2i)$, para ver la dependencia en z y z^*,

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+1+i(1-\beta))z/2}e^{(\alpha-1+i(1+\beta))z^*/2}+\text{c.c.}\right)$$

Se ve entonces que eligiendo $\alpha=1$, $\beta=-1$ el primer sumando sólo contiene z. (La otra posibilidad es $\alpha=-1$, $\beta=1$ y el primer sumando sólo contiene z^*, también produce una función entera, pero la descartamos por $\alpha>\beta$.) Entonces $u=\mathrm{Re}(e^{(1+i)z})$ y $f(z)=e^{(1+i)z}-i$.

Observación: Para calcular la integral de $\partial_y v=e(c-s)$ no es imperativo usar integración por partes. Es claro que la familia de funciones $e(Ac+Bs)$, A,B ctes, es cerrada bajo derivación. Entonces (usando ya $\alpha=-\beta=1$)

$$v=e(Ac+Bs),\quad e(c-s)=\partial_y v=e((B-A)c-(A+B)s)) \quad\Longrightarrow\quad A=0,\ B=1$$

También se puede hacer la integral usando la forma exponencial de las funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}\int e^{x-y}(\cos(x+y)-\mathrm{sen}(x+y))dy &= \int e^{x-y}\,\mathrm{Re}\left((1+i)e^{i(x+y)}\right)dy=\mathrm{Re}\left((1+i)e^{(1+i)x}\frac{e^{(-1+i)y}}{-1+i}\right)\\ &=\mathrm{Re}\left((-i)e^{(1+i)x}e^{(-1+i)y}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{(1+i)x}e^{(-1+i)y}\right)\\ &=e^{x-y}\,\mathrm{sen}(x+y)\end{aligned}$$

3. *Sea la integral*

$$I_n(r) = \int_\gamma z^n \log(1-rz)\, dz$$

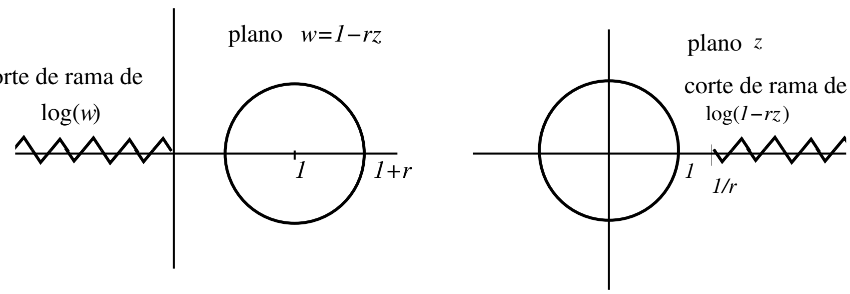
donde $\gamma = C(0,1), \quad 0 < r < 1, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \alpha \le \arg(z) < \alpha + 2\pi, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

a) *Elige* α *de modo que el corte de rama del logaritmo no cruce el camino de integración.*

b) *Calcula* $I_n(r)$ *para todos los valores* $-2 \le n \le 2$ *y justifícalo.*

Solución:

a) Si definimos $w = 1 - rz$ (el argumento del logaritmo en el integrando), la variable $w = 1 - re^{it}$ describe la circunferencia $C(1,r)$ de radio r centrada en $w = 1$, entonces una elección válida del corte de rama de $\log(w)$ en el plano w es $\mathbb{R}_0^-$, por ejemplo $\alpha = -\pi$.



Si se prefiere un argumento analítico, el punto de ramificación (finito) de $\log(1-rz)$ en el plano z está en $1 - rz = 0$, es decir, $z = \dfrac{1}{r} > 1$. Para que el corte de rama (en el plano z) esté situado en $\dfrac{1}{r} + \mathbb{R}_0^+$ debe tenerse $z = \dfrac{1}{r} + t$, $t \ge 0$, entonces $w = 1 - rz = -rt$ que recorre $\mathbb{R}_0^-$ en el plano w (cuando t recorre $\mathbb{R}_0^+$). El corte $w \in \mathbb{R}_0^-$ corresponde a $\alpha = (2n+1)\pi$ y elegimos $\alpha = -\pi$ de modo que $\log(1) = 0$.

b) La función $\log(1-rz)$ es analítica sobre γ y su interior. Para $n \ge 0$ el integrando $z^n \log(1-rz)$ es analítico y por tanto la integral se anula, por el teorema de la integral de Cauchy,

$$I_n(r) = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

En particular $I_0 = I_1 = I_2 = 0$.

Para $n < 0$, se aplica la fórmula integral de Cauchy

$$n = -m-1, \quad m \ge 0, \qquad I_n(r) = \int_\gamma \frac{\log(1-rz)}{z^{m+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{m!} \frac{d^m}{dz^m} \log(1-rz)\Big|_{z=0}$$

Para $m = 0$ y $m = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} I_{-1}(r) &= 2\pi i \log(1-rz)\Big|_{z=0} = \log(1) = 0, \qquad && (m=0) \\ I_{-2}(r) &= 2\pi i \frac{-r}{1-rz}\Big|_{z=0} = -2\pi i r && (m=1) \end{aligned} \tag{1}$$

4. *Sean* $G_1 = \{z |\ |z| < 1\}$, $\bar{G} = \{z |\ 1 \leq |z| \leq 3\}$ *y* $\bar{G}_3 = G_1 \cup \bar{G}$, *y sean* $f(z)$, $g(z)$ *y* $h(z)$ *funciones no constantes definidas en* $\bar{G}_3$.

a) *Si* $|f(z)|$ *alcanza un máximo sobre* $\bar{G}$ *en* $z = 2i$, *¿qué implica esto sobre* $f(z)$ *en* $\bar{G}$*? Justifícalo y pon un ejemplo de tal función.*

b) *Si* $g(z)$ *es analítica en* $\bar{G}$ *y* $|g(z)|$ *alcanza un máximo sobre* $\bar{G}$ *en* $z = i$, *¿qué implica esto sobre* $g(z)$ *en* G_1*? Justifícalo y pon un ejemplo de tal función.*

c) *Si* $h(z)$ *es analítica en* $\bar{G}_3$ *y* $|h(z)|$ *alcanza un mínimo no nulo sobre* $\bar{G}$ *en* $z = -i$, *¿qué implica esto sobre* $h(z)$ *en* G_1*? Justifícalo y pon un ejemplo de tal función.*

Solución:

a) $z = 2i$ es un punto interior de $\bar{G}$. Por el principio del módulo máximo, si $f(z)$ es analítica en $\bar{G}$ debe ser constante ahí. La otra posibilidad es que $f(z)$ no sea analítica en $\bar{G}$.

Un ejemplo de la primera posibilidad: $f(z) = 1$ en $\bar{G}$ y $f(z) = 0$ en G_1. Un ejemplo de la segunda posibilidad: $f(z) = 1/(1 + |z - 2i|)$.

b) Se concluye que $g(z)$ no puede ser analítica en G_1. Si lo fuera, sería analítica en todo $\bar{G}_3$ y el máximo de $g(z)$ sobre $\bar{G}_3$ estaría en la frontera, en un z_0 tal que $|z_0| = 3$. Como la función no es constante no tiene máximos interiores, esto implicaría que $|g(i)| < |g(z_0)|$, lo cual contradice que $g(z)$ tenga un máximo sobre $\bar{G}$ en $z = i$.

Un ejemplo es $g(z) = 1/z$ en $z \neq 0$ y $g(0) = 0$.

c) Se concluye que $h(z)$ debe tener ceros en G_1. Puesto que el mínimo sobre $\bar{G}$ es no nulo se deduce que $h(z)$ no tiene ceros en $\bar{G}$. Si tampoco los tuviera en G_1 no habría ceros en todo $\bar{G}_3$ y el mínimo de $h(z)$ sobre $\bar{G}_3$ estaría en un z_1 de su frontera, $|z_1| = 3$. Como la función no es constante no tiene mínimos interiores, esto implicaría que $|h(-i)| > |h(z_1)|$, lo cual contradice que $h(z)$ tenga un mínimo sobre $\bar{G}$ en $z = -i$.

Un ejemplo es $h(z) = z$.