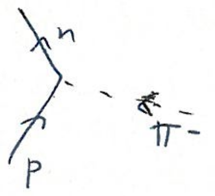
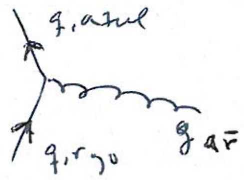
- sim. cinemáticas
- sim. internas: grados de libertad internos

$|p\rangle, |n\rangle$ $\begin{pmatrix} |p\rangle \\ |n\rangle \end{pmatrix}$ doblete de isospín $SU(2)$



ó



- dinámicas
  * de la dinámica, (ej. accidental) extienden sim. cinemáticas
  * generan el espectro (ej. boosts, transforman estado propio en otro)

Simetría: "Propiedades de ~~grupos~~ de transformaciones que produzcan consecuencias útiles para resolver la dinámica".

Simetrías dinámicas

Aparte de simetrías cinemáticas y simetrías internas, es de interés estudiar grupos de transformaciones (que pueden ser simetrías de la dinámica o no) que ayuden a resolver la dinámica y a determinar el espectro.

Un ejemplo típico es el del potencial coulombiano y su degeneración accidental: por invariancia bajo rotaciones la energía del estado $|nlm\rangle$ no depende de m, E_{nl} (degeneración indica simetría), sin embargo en el caso coulombiano es E_n (indep. de l,m). Esta degeneración extra corresponde a una simetría mayor. En efecto

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2} - \frac{Z}{r} \qquad \text{(unidades ~~adecuadas~~ atómicas } m = \hbar = e = 1) \quad \Rightarrow c = \alpha^{-1} \approx 137 \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ genera rotaciones y $[\vec{L}, H] = 0$

pero también $\vec{M} \equiv \frac{1}{2}(\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{Z}{r}\vec{r}$ (vector de Runge-Lenz)

es una simetría de H: $[H, \vec{M}] = 0$ (prop. especial de H coulombiano)

la idea es que $\vec{M}$ genera transf. que cambian lm (aunque no n)

Se tiene* $\vec{M} \cdot \vec{L} = \vec{L} \cdot \vec{M} = 0$, $\vec{M}^2 = 2H(\vec{L}^2 + 1) + Z^2$

$$[L_i, M_j] = i\epsilon_{ijk} M_k, \quad [M_i, M_j] = -2iH\epsilon_{ijk} L_k$$

En la medida en que H es cte (respecto de $\vec{L}$ y $\vec{M}$) $\vec{L}, \vec{M}$ cierran un álgebra de Lie, de hecho def. $\vec{K} = \frac{\vec{M}}{\sqrt{2H}}$ queda $(H > 0)$

$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} L_k$ es decir $\vec{L}$ y $\vec{K}$ forman el álgebra de Lorentz $SO(3,1)$

las rep. unitarias requieren $H > 0$ y esto es útil en estados de colisión**

* Para cualquier vector $\vec{V}$: $\vec{J} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{J}$ por $[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk} V_k$

** $SO(3,1)$ no compacto, rep. unitaria $\Rightarrow$ dim. infinita (en estado colisión hay un $\vec{p}$ arbitrario $|\vec{p}|$ fijo) ($Z = 0 \Rightarrow$ caso libre) para estados ligados, $H<0$ se define $\vec N = \dfrac{\vec M}{\sqrt{-2H}}$

$$\vec L \times \vec L = i\vec L, \quad [L_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} N_k, \quad [N_i, N_j] = i\epsilon_{ijk} L_k$$

es el álgebra de $SO(4)$ (rotaciones en $\mathbb{R}^4$). Esta álgebra se puede separar definiendo $\vec I = \frac{1}{2}(\vec L + \vec N)$, $\vec K = \frac{1}{2}(\vec L - \vec N)$ que cumplen

$$\vec I \times \vec I = i\vec I, \quad \vec K \times \vec K = i\vec K, \quad (\vec I, \vec K) = 0$$

es decir $\vec I, \vec K$ generan transf. de $SU(2)$ independientes

CCOC $\vec I^2\,\vec K^2, I_3, K_3$ $|IK, I_3 K_3\rangle$ $\vec L = \vec I + \vec K$ (*)

Teniendo en cuenta ($\vec L \perp \vec M$) $\vec I^2 = \frac{1}{4}\left(\vec L^2 - \frac{\vec M^2}{2H}\right) = \vec K^2$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec L^2 - \frac{1}{2H}\left(2H(\vec L^2+1) + Z^2\right)\right) = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{Z^2}{2H}\right)$$

$$\Rightarrow \quad H = -\frac{Z^2}{2}\,\frac{1}{4\vec I^2 + 1}, \qquad \vec I^2 = \vec K^2$$

(Pauli 1926)

si se diagonaliza $\cancel{(\vec I^2, I_3)}\ \cancel{(\vec K^2, K_3)}$ $(\vec I^2 = \vec K^2, I_3, K_3)$ se tiene el espectro de H. Como es $SU(2)$

se sabe que $\vec I^2 = k(k+1)$, $k = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots$ ($\vec I, \vec K$ hermíticos)

def. $n = 2k+1$, $\quad E_n = -\dfrac{Z^2}{2}\,\dfrac{1}{4\left(\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}\right)+1} = -\dfrac{Z^2}{2n^2}$ (**) $n = 1, 2, \ldots$

(I_3, K_3 son combinaciones ~~función~~ de l y m) (buscarlas) lm se pueden cambiar con operadores $I_\pm$, $K_\pm$

Notar que $SO(4)$ (ó $SO(3,1)$ para estados no ligados) no es una simetría interna (en el sentido de que no está asociada a nuevos grados de libertad internos y sus transformaciones). $SO(3) \subset SO(4)$

Para el oscilador armónico isótropo el grupo es $SU(3) \supset SU(2)$

(*) ó base acoplada $\vec L = \vec I + \vec K$ CCOC $\vec L^2, \vec I^2, \vec K^2, L_z$

$\vec L = \vec I + \vec K \Rightarrow l \leq 2k = n-1 \Rightarrow n > l \quad n = l+1, l+2, \ldots$

Ahora vemos otro ejemplo en el que el grupo de transformaciones cambia la energía, de hecho genera unos estados propios a partir de otros*.

Repasemos brevemente lo que ocurre con $SO(3)$. ~~tag~~ El álgebra de Lie es

$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$ y ~~$\vec{J}^2 = J_i J_i$ es un inv. $[\vec{J}^2, J_i] = 0$~~

buscamos rep. irreducibles de esta álgebra (realizaciones abstractas en algún espacio V). El método es considerar un conjunto completo**, ej: $\{\vec{J}^2, J_3\}$

$\vec{J}^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$ es un inv., $[\vec{J}^2, J_3] = 0$, y equivale a un núm. en la irrep.

la elección de J_3 no es esencial (todas las direcciones son equivalentes)

$\vec{J}^2 |\Lambda m\rangle = \Lambda |\Lambda m\rangle$, $J_3 |\Lambda m\rangle = m |\Lambda m\rangle$ $\{|\Lambda m\rangle\}_{\Lambda \text{ fijo}}$ = base de V

se definen los op. escalera $J_+ = J_1 + iJ_2$, $J_- = J_1 - iJ_2$ que cumplen

$[J_3, J_\pm] = \pm J_\pm$ $[J_+, J_-] = 2J_3$ $\vec{J}^2 = J_\mp J_\pm + J_3^2 \pm J_3$

de donde $J_+ |\Lambda m\rangle = A_{\Lambda m} |\Lambda m+1\rangle$, $J_- |\Lambda m\rangle = B_{\Lambda m} |\Lambda m-1\rangle$ (no normalizados)

se deduce que hay cuatro tipos de representaciones, según el espectro de J_3

1) acotadas inferiormente: $\exists m_0$, $B_{\Lambda m_0} = 0$ $J_- |\Lambda m_0\rangle = 0$, pero $A_{\Lambda m} \neq 0$

2) " superiormente: $\exists m_0$ $J_+ |\Lambda m_0\rangle = 0$ pero $J_- |\Lambda m\rangle \neq 0$

3) acotada inf. y superior: $\exists m_2 > m_1$ $J_+ |\Lambda m_2\rangle = J_- |\Lambda m_1\rangle = 0$

4) no acotada: $J_\pm |\Lambda m\rangle$ no se anula para ningún m.

En general el espectro de J_3 es del tipo $\{m = a + k,\ k \in \mathbb{Z},\ k_1 \leq k \leq k_2\}$, $a \in \mathbb{C}$

con $k_{1,2}$ finitos o infinitos

(notar $|m\rangle$ es la única etiqueta, si hubiera otra $|m, \alpha\rangle$ habría una serie para cada α y el espacio no sería irreducible)

* De hecho los boosts ya son un ejemplo de esto

** se sabe que $\vec{J}^2, J_3$ conmutan, que el conjunto es completo se ve después.

Si nos restringimos a irrep. unitarias $\vec{J}^\dagger = \vec{J}$ respecto cierto producto escalar*,

$$\Rightarrow \quad J_3^\dagger = J_3, \quad J_\pm^\dagger = J_\mp, \quad \vec{J}^{2\dagger} = \vec{J}^2$$

además $\vec{J}^2 \geq 0$, $J_+J_- \geq 0$ y $J_-J_+ \geq 0$ y Λ, m reales, $\Lambda \geq 0$

usando $|\Lambda m\rangle$ normalizados

$$0 \leq \| J_\pm |\Lambda m\rangle \|^2 = \langle \Lambda m | J_\mp J_\pm |\Lambda m\rangle = \langle \Lambda m | (\vec{J}^2 - J_3^2 \mp J_3) |\Lambda m\rangle = \Lambda - m(m\pm 1)$$

$\Lambda \geq m^2 \pm m = m(m\pm1)$

se deduce $m^2 \leq \Lambda$ $\Rightarrow$ espectro de J_3 acotado $-\Lambda \leq m \leq \Lambda$

$\Lambda = m_2(m_2+1) = m_1(m_1-1) \Rightarrow m_2 = \begin{cases} -m_1 & \text{NO} \\ m_1 - 1 \end{cases}$ $m_2 \geq m_1$

$\Rightarrow$ $J_+|\Lambda m_2\rangle = J_-|\Lambda m_1\rangle = 0$ ($m_2 - m_1$ entero no negativo $\equiv 2j$) implica (ó $j=0$)

$\Lambda = j(j+1)$, $2j+1$ entero positivo ~~no negativo~~, $m_{2,1} = \pm j$.

$m_2 = j$ $\quad \Lambda = j(j+1) = (j-k)(j-k-1) \Rightarrow 2j = k$, $m_1 = -j$

$m_1 = j-k$ $\quad k \geq 0$ entero $\quad k \neq -1$

Consideremos ahora el grupo $SO(2,1)$ y sus rep. irreducibles unitarias.

Este es el grupo de Lorentz en 2+1 dim. y su álgebra es (se puede sacar del estudio hecho de Poincaré) (T_1, T_2 boosts, T_3 rotación)

$$[T_1, T_2] = -iT_3, \quad [T_2, T_3] = iT_1, \quad [T_3, T_1] = iT_2$$

de hecho de momento no hay diferencia con $SO(3)$ def.** $\vec{J}$

$$J_1 = iT_1, \quad J_2 = iT_2, \quad J_3 = T_3$$

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

de nuevo que es inmediato obtener

$\vec{T}^2 \equiv T_3^2 - T_1^2 - T_2^2$ $\quad [\vec{T}^2, T_i] = 0$ es un casimir ($\vec{T}^2 = \vec{J}^2$)

$T_\pm \equiv T_1 \pm iT_2$ ($= -iJ_\pm$) son los op. escalera

* Notar que si A es un op. en V y cada producto escalar define un $A^\dagger$ distinto.

** En un espacio tiempo complejo no hay dif. entre euclídeo y Lorentz que cumplen

$$[T_+, T_-] = -2T_3, \qquad [T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$$

y $\quad T^2 = -T_+T_- + T_3^2 - T_3 = -T_-T_+ + T_3^2 + T_3$

Tomamos $\{T^2, T_3\}$ como conjunto completo !!! (la elección de T_3 introducirá una diferencia con respecto T_1 ó T_2 cuando nos restrinjamos a rep
T_3 "rotación" inf.
unitarias)

$$T^2 |Qq\rangle = Q |Qq\rangle, \qquad T_3 |Qq\rangle = q |Qq\rangle$$

$$T_3 T_\pm |Qq\rangle = (T_\pm T_3 \pm T_\pm) |Qq\rangle = (q \pm 1) T_\pm |Qq\rangle$$

$$\Rightarrow \quad T_+ |Qq\rangle = A_{Qq} |Q\, q+1\rangle, \qquad T_- |Qq\rangle = B_{Qq} |Q\, q-1\rangle$$

hasta aquí esto vale para $SO(3)$ y $SO(2,1)$ (sólo es un cambio de notación).

Ahora imponemos que la irrep. sea unitaria para $SO(2,1)$ ($\Rightarrow$ no unitaria para $SO(3)$): $\vec{T}^\dagger = \vec{T}$, o equivalentemente

$$T_\pm^\dagger = T_\mp, \quad T_3^\dagger = T_3, \quad \vec{T}^2 = \vec{T}^{2\dagger} \text{ (no def. no.)}, \quad T_+T_- \geq 0, \quad T_-T_+ \geq 0$$

y elegimos $|Qq\rangle$ normalizados $\quad \langle Qq|Qq'\rangle = \delta_{qq'}$ (la ortogonalidad cuando $q \neq q'$ se deduce de $T_3 = T_3^\dagger$ no es una elección). Ahora A_{Qq}, B_{Qq} están definidos (salvo fase) se elige $A_{Qq}, B_{Qq} \geq 0$ (es compatible)

Se deduce

$$0 \leq A_{Qq}^2 = \| T_+ |Qq\rangle \|^2 = \langle Qq | T_-T_+ | Qq\rangle = \langle Qq | (-T^2 + T_3^2 + T_3) | Qq\rangle = -Q + q(q+1)$$

$$0 \leq B_{Qq}^2 = \| T_- |Qq\rangle \|^2 = \langle Qq | T_+T_- | Qq\rangle = \langle Qq | (-T^2 + T_3^2 - T_3) | Qq\rangle = -Q + q(q-1)$$

Q, q reales, $\qquad A_{Qq} = +\sqrt{q(q+1) - Q}$

$\qquad\qquad\qquad B_{Qq} = +\sqrt{q(q-1) - Q}$

Rep mais geral unitária de $SO(2,1)$ tal que T_3 auto-adj. ($\Rightarrow T_3$ não acotado)

$$T_3 \,|q_0;q\rangle = q\,|q_0;q\rangle \qquad Q \quad q_0 > 0 \qquad q_0 \equiv \alpha \in \mathbb{R}$$

$$T_\pm \,|q_0;q\rangle = \sqrt{q(q\pm1) - q_0(q_0-1)}\;|q_0;q\pm1\rangle \qquad q = q_0 + n \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$T^2 \,|q_0;q\rangle = q_0(q_0-1)\,|q_0;q\rangle$$

ó bem $T=0$

$$J_3\,|j;m\rangle = m\,|j\,m\rangle \qquad m = -j+n \qquad n = 0,\ldots,2j$$

$$J_\pm\,|j\,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm1)}\;|j\,m\pm1\rangle \qquad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \ldots$$

$$\vec{J}^2\,|j\,m\rangle = j(j+1)\,|j\,m\rangle$$

$$\vec{J}^2 = J_- J_+ + J_3^2 + J_3 \qquad [J_3, J_\pm] = \pm J_\pm \qquad [J_+, J_-] = 2J_3$$

$$J_3^\dagger = J_3 \qquad J_\pm^\dagger = J_\mp \qquad J^{2\,\dagger} = J^2 .$$

$$T^2 = -T_- T_+ + T_3^2 + T_3 \qquad T_3 = T_3^\dagger \qquad T_\pm^\dagger = T_\mp \qquad T^{2\,\dagger} = T^2$$

$$[T_+, T_-] = -2T_3 \qquad [T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$$

Representaciones irreducibles unitarias de $SO(2,1)$

$[T_+, T_-] = -2T_3$, $[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$ $\qquad T_\pm = T_1 \pm i T_2$

$T_\pm^\dagger = T_\mp$, $T_3^\dagger = T_3$

si $V \neq 0$ y $\exists |q_0\rangle \neq 0$ $\quad T_3|q_0\rangle = q_0|q_0\rangle$ ~~(por T_3 hermítica)~~ (en realidad no tiene porqué si $\dim V = \infty$)

por V irreducible, V se genera aplicando $\vec{T}$ sobre $|q_0\rangle$

Si $T_3|q\rangle = q|q\rangle$ $\sim$

$T_3 T_\pm |q\rangle = (T_\pm T_3 \pm T_\pm)|q\rangle = (q \pm 1) T_\pm |q\rangle$

se deduce que aplicando $T_\pm^n |q_0\rangle \propto |q_0 \pm n\rangle$ genero una base de V (*) de vectores propios de T_3 con valores propios $q = q_0 + n$ $\quad n \in \mathbb{Z}$

$T_\pm |q\rangle = A_q^\pm |q \pm 1\rangle$ $\qquad$ con esto se satisface $[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm$

Falta imponer la otra relación de conmutación

$0 = ([T_+, T_-] + 2T_3)|q\rangle = (A_q^- A_{q-1}^+ - A_q^+ A_{q+1}^- + 2q)|q\rangle = 0$

$A_q^- A_{q-1}^+ - A_q^+ A_{q+1}^- + 2q = 0$ $\qquad$ (cualquier solución de esto da una irrep. de $SO(2,1)$)

Para seguir imponemos que sea unitaria. $T_3 = T_3^\dagger \Rightarrow q$ real $\quad \langle q|q'\rangle = \delta_{qq'}$ (normal. elección)

$T_\pm^\dagger = T_\mp$ $\qquad A_q^\pm = \langle q \pm 1|T_\pm|q\rangle = \langle q|T_\pm^\dagger|q \pm 1\rangle^* = \langle q|T_\mp|q \pm 1\rangle^* = (A_{q\pm1}^\mp)^*$

Elección de fases: $\forall q \geq q_0$ elijo $|q\rangle$ tal que $A_q^+ \geq 0$
ídem $\forall q \leq q_0$ elijo $A_q^- \geq 0$
pero $A_q^- = A_{q-1}^{+\,*} \geq 0$ $\forall q \leq q_0 \Rightarrow A_q^+ \geq 0$ $\forall q < q_0$

$\Rightarrow$ $\underline{A_q^\pm \geq 0 \quad \forall q}$

la ecuación queda $(A_{q-1}^+)^2 - (A_q^+)^2 + 2q = 0$ que permite calcular recurrentemente

$A_q^\pm$ eligiendo $\underline{q_0,\ A_{q_0}^+}$ en forma arbitraria. excepto que al resolver la recurrencia $(A_q^\pm)^2 > 0$ siempre ó bien $(A_q^\pm)^2$ pasa por cero antes hacerse negativo.

(*) $|q\rangle \xrightarrow{T_+} |q+1\rangle \xrightarrow{T_-} |q\rangle$ no aparecen nuevos vectores $\{|q_0+n\rangle\}$ forman una base

Por $T_\mp T_\pm = -T^2 + T_3(T_3 \pm 1)$, $T^2 =$ cte en V por Schur

Queremos T_3 acotado inf. $\qquad T_-|q_0\rangle = 0$

$$0 = A^-_{q_0} = A^+_{q_0-1} \underset{\text{recurr.}}{\Rightarrow} 0 \leq A^+_{q_0} = 2q_0 \Rightarrow q_0 \geq 0$$

Si $q_0 = 0$ $\quad A^+_{q_0} = 0 \quad T_+|q_0\rangle = 0 \Rightarrow \vec{T} = 0$, es la rep. trivial.
dim = 1

Sup. $q_0 > 0 \qquad q = q_0 + n \qquad n = 0, 1, 2, \dots$ $\qquad$ ($2q_0 > 0 \Rightarrow$ la serie $\uparrow$ no se corta) dim. infinita

$$(A^+_{q_0+n})^2 = 2(q_0+n) + (A^+_{q_0+n-1})^2 = \sum_{k=0}^{n} 2(q_0+k)$$

$$= (n+1)(n+2q_0) \underset{n = q - q_0}{\overset{\uparrow}{=}} q(q+1) - q_0(q_0-1) \qquad Q \equiv q_0 \,)$$

$$T_3|Q;q\rangle = q|Q;q\rangle \qquad T_\pm|Q;q\rangle = +\sqrt{q(q\pm1) - q_0(q_0-1)}\,|Q;q\pm1\rangle$$

$$T^2 = -T_\pm T_\mp + T_3(T_3 \mp 1) \qquad T^2|Q;q\rangle = Q(Q-1)|Q;q\rangle$$

$q = \overset{Q}{q_0} + n \qquad \overset{Q}{q_0} \geq 0$
$n = 0$ si $\overset{Q}{q_0} = 0$
$n = 0, 1, 2, \dots$ si $\underset{Q}{q_0} > 0$

(lo que importa es $\overset{Q}{q_0}$. Para $0 \leq \overset{Q}{q_0} \leq 1$ hay 2 valores de $\underset{Q}{q_0}$ con el mismo $\underset{T^2}{Q}$, y las dos son irrep. inequiv.

la solución cerrada de la recurrencia se encuentra más fácilmente

usando $T^2 = -T_{\mp}T_{\pm} + T_3^2 + T_3$ $\qquad [T^2, \vec{T}\,] = 0 \qquad T^2|q\rangle \equiv Q|q\rangle$

$$Q|q\rangle = T^2|q\rangle = \left(-A_q^{\pm}A_{q\pm1}^{\mp} + q(q\pm1)\right)|q\rangle \Rightarrow$$

$$Q = -(A_q^{\pm})^2 + q(q\pm1) \qquad \text{ó} \qquad A_q^{\pm} = +\sqrt{q(q\pm1)-Q}$$

ahora se elige q_0, Q arbitrarios (fija $A^{\pm}_{q_0}$) excepto $q(q\pm1) \geq Q$ $\forall q$ del espectro.

~~(de hecho $q(q+1) \geq Q$ $\forall q$ del espectro)~~

(si $A_q^{\pm\,2} < 0$ debe pasar antes por $A_q^{\pm} = 0$ y la serie se corta.

$T_3 |Qq\rangle = q|Qq\rangle \qquad T^2|Qq\rangle = Q|Qq\rangle$

$T_\pm |Qq\rangle = \sqrt{q(q\pm1)-Q}\,|Q\,q\pm1\rangle$

cumple el álgebra de Lie y es unitaria si Q, q reales

y $q(q\pm1)-Q \geq 0$ ó $q^2 \pm q \geq Q$

El caso general es más complicado que en SO(3) (porq: Q no determina el espectro en SO(2,1) en general). Sin embargo sólo nos hará falta el caso en el que T_3 está acotado inferiormente pero no superiormente*:

$T_-|Qq_0\rangle = 0 \Rightarrow q_0^2 - q_0 = Q$, $\quad q = q_0 + n \quad n = 0,1,2,\dots$

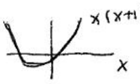
suele definirse $k \equiv q_0 - 1$ de modo que

$\underline{q = k+1+n, \quad n = 0,1,2,\dots}$ y $\underline{Q = k(k+1)}$

falta imponer que la serie no se corte por arriba:

$q(q+1) - Q > 0$ (y no $=0$) $\forall q$ (**)

$\Leftrightarrow (k+1+n)(k+2+n) > Q = k(k+1) \Leftrightarrow 2(k+1)+n > 0 \qquad n = 0,1,2,\dots$

es decir $\underline{k > -1}$ (k real) y viceversa si $k > -1$  $\left.\begin{array}{l} q \geq k+1 \geq 0 \\ k \geq -1 \end{array}\right\} q(q+1) \geq k(k+1)$

$T_3|kq\rangle = q|kq\rangle$

$T_\pm|kq\rangle = \sqrt{q(q\pm1)-k(k+1)}\,|k\,q\pm1\rangle, \qquad q = k+1+n, \quad n = 0,1,2,\dots$

$T^2|kq\rangle = k(k+1)|kq\rangle, \qquad k > -1$ ($k \in \mathbb{R}$) (equiv. $q_0 > 0$ ó $T_3 > 0$

Siempre que T_3 acotado inf. y $\neq 0$.

* Si $k=-1$, $T_\pm|q_0=0\rangle = 0$ $\vec{T}|q_0=0\rangle$ es la rep. trivial no hay otras irrep. unitarias de dim. finita: SO(2,1) no compacto.

si $k<-1$ $q_0<0$ $\quad q_0(q_0+1) - Q = 2q_0 < 0$: no es unitaria

** Si $q(q+1) = Q = k(k+1)$ $\quad q = k$ ó $q = -k-1 \Rightarrow \underset{\text{NO}}{n+1=0}$ ó $2(k+1)+n=0 \Rightarrow \begin{array}{l} n=0 \\ k=-1 \end{array}$

Ahora buscamos realizaciones de $so(2,1)$ en términos de op. diferenciales. en una dim. (*)

Probamos con op. del tipo (no nulos)

$$A = f(x)\partial^2 + g(x), \quad B = h(x)\partial + k(x), \quad C = l(x) \qquad \left(\partial \equiv \frac{d}{dx}\right)$$

$$[\partial, x] = 1$$

Imponemos que cierre un álgebra de Lie:

$$[A,B] = (2fh' - f'h)\partial^2 + (fh'' + 2fk')\partial + fk'' - hg'$$

$$\equiv aA + bB + cC \qquad a \neq 0 \quad b' \neq 0 \quad c'' \neq 0$$

redef. g y k se pueden elegir $b = c = 0$

$$[A,C] = 2fl'\partial + fl'' \equiv b'B + c'C$$

$$[B,C] = hl' \equiv c''C$$

donde a, b, c, b', c', c'' son ctes. Se obtiene un sistema de ecuaciones:

$$2fh' - f'h = af \qquad 2fl' = b'h \qquad hl' = c''l$$

$$fh'' + 2fk' = bh \qquad fl'' = b'k + c'l$$

$$fk'' - hg' = ag + bk + cl$$

Como esto todavía es muy general elegimos $f = x^\alpha$, $h = x^\beta$

(no es más general tomar λx^α y μx^β, notar que $\underbrace{A, B, C \neq 0}_{\text{queremos}}$)

* $\underline{2fh' - f'h = af}$ $\Rightarrow$ $(2\beta - \alpha)x^{\alpha+\beta-1} = a x^\alpha$

como no queremos $a = 0$, $\Rightarrow$ $\beta = 1$, $\boxed{\alpha = 2 - a}$ $\boxed{f = x^{2-a}}$, $\boxed{h = x}$

$so(2,1)$ simple

* $\underline{hl' = c''l}$ $\Rightarrow$ $l = l_0 x^{c''}$ pero como $C \neq 0$, se puede elegir $l = x^{c''}$

* $\underline{2fl' = b'h}$ $\Rightarrow$ $2c'' x^{2-a+c''-1} = b'x$. o bien $C = l = 1$ o bien $\underline{c'' = a}$, $\underline{b' = 2c'' = 2a}$

$c'' = 0 = b'$

No $so(2,1)$

$$\boxed{l = x^a}$$

(*) En $\mathbb{R}^3$ tenemos las típicas de Lorentz $\overset{L^2(\mathbb{R}^3)}{\psi(x)} \to \psi(x\delta^{-1})$ $x = (\vec{x}, 1)$

y las físicas de Lorentz en $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$A = x^{\alpha}\partial^{2} + g(x), \quad B = x^{\beta}\partial + k(x), \quad C = l(x)$$

$$[A, B] = (2\beta - \alpha)\, x^{\alpha+\beta-1}\partial^{2} + \left(\beta(\beta-1)\, x^{\alpha+\beta-2} + 2x^{\alpha}k'(x)\right)\partial + \left(x^{\alpha}k''(x) - x^{\beta}g'(x)\right)$$

$$= aA + bB + cC$$

$$[A, C] = 2x^{\alpha}l'(x)\,\partial + x^{\alpha}l''(x) = b'B + c'C$$

$$[B, C] = x^{\beta}l'(x) = c''C$$

* $fl'' = b'k + c'l$: $a(a-1) = 2ak + c'x^a$

de donde $k = \frac{a-1}{2} + \frac{c'}{2a} x^a$

Sin pérdida de generalidad se puede tomar $c' = 0$ (redefiniendo $B - \frac{c'}{2a} C$ como nuevo B) $\Rightarrow$ $c' = 0$, $\boxed{k(x) = \frac{a-1}{2}}$

* $fh'' + 2fk' = bh$ $\Rightarrow$ $b = 0$

* $fk'' - hg' = ag + bk + cl$ $\Rightarrow$ $-xg' = ag + cx^a$

la sol. más general (particular + homogénea)

$$g(x) = \frac{\lambda}{x^a} \mp \frac{c}{2a} x^a \quad \text{con}$$

de nuevo se puede elegir $c = 0$ sin cambiar el espacio generado por A, B, C

$c = 0$, $\boxed{g(x) = \lambda x^{-a}}$ λ arbitrario

En resumen

$$A = x^{2-a} \partial^2 + \lambda x^{-a} \qquad a \neq 0$$

$$B = x\partial + \frac{a-1}{2}$$

dep. de los parámetros arbitrarios a y λ

$$C = x^a$$

con $[A, B] = aA$, $[A, C] = 2aB$, $[B, C] = aC$

Es un álgebra simple (no tiene ideales). Basta hacer un cambio para llevarla a la forma estándar*. Por ej.: (A, C se parecen $J_\pm$, y B a J_3)

$$T_1 = -\frac{1}{2a^2} A - \frac{1}{2} C \qquad A = -a^2 (T_1 + T_3)$$

$$T_2 = -\frac{i}{a} B \qquad B = ia T_2 \qquad a \neq 0$$

$$T_3 = -\frac{1}{2a^2} A + \frac{1}{2} C \qquad C = T_3 - T_1$$

* La base estándar no es única. Esto es completamente evidente en SO(3)

se comprueba que produce el álgebra de $SO(2,1)$ (no hace falta calcular los conmutadores de nuevo) $[T_1, T_2] = -i T_3$, $[T_2, T_3] = i T_1$, $[T_3, T_1] = i T_2$

Def. $P \equiv -i\partial + \varphi(x)$ $\quad [P, x] = -i$

$$T_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} x^{2-a} P^2 + \frac{\tau}{x^a} - x^a\right) \qquad a \neq 0$$

$$\left(\tau = -\frac{\lambda}{2a^2}\right)$$

$$T_2 = \frac{1}{a}\left(xP - \frac{i}{2}(a-1)\right)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} x^{2-a} P^2 + \frac{\tau}{x^a} + x^a\right)$$

Como esta es ~~una~~ rep. concreta (dep. de a y τ) el op. inv. T^2 tendrá un valor concreto. Un cálculo detallado produce

$T^2 = T_3^2 - T_1^2 - T_2^2$

$$T^2 = \tau + \frac{1-a^2}{4a^2}$$

Por ~~los~~ argumentos generales, se sabe $[T_i, T^2] = 0$, pero para esta representación se obtiene un resultado más fuerte: $[x, T^2] = [P, T^2] = 0$

otra observación es que lo único que realmente se usa es $[P, x] = -i$ no hace falta que $P = -i\partial$, por ej: $P = -i\partial + \varphi(x)$ también vale.

Así $\quad [P, x^a] = [-i\partial + \varphi(x), x^a] = [-i\partial, x^a] = -i a x^{a-1}$

escritas en términos de P, las relaciones no dependen de $\varphi(x)$.

(corresponde a hacer una t. ~~unitaria~~ de semejanza $(U\psi)(x) = e^{-i\varphi(x)} \psi(x)$

$P_\varphi = U P_0 U^{-1}$) (por tanto T^2 tampoco depende de φ)

$x_\varphi = U x U^{-1} = x$

Aplicación al potencial coulombiano (3 dim. y no relativista):

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2} - \frac{Z}{r} = \frac{p_r^2}{2} + \frac{\vec{L}^2}{2r^2} - \frac{Z}{r} \qquad p_r = -\frac{i}{r}\partial_r r = -i\partial_r - \frac{i}{r}$$

$$p_r^2 = -\frac{1}{r}\partial_r^2 r = -\partial_r^2 - \frac{2}{r}\partial_r$$

$$\psi = R(r)\, Y_{\ell m}(\hat{r})$$

Se puede hacer separación de variables y en el espacio $|\ell m\rangle$ de f. radiales

$$H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} - \frac{Z}{r}$$

la ecuación de autovalores es $(H-E)R = 0$ y al caso de estados ligados $E<0$, (requiere $Z>0$)

Para conectar con las fórmulas anteriores defino $\underline{r = \gamma x}$, $\underline{p_r = \gamma^{-1} P}$

donde $\gamma > 0$ es una cte a elegir después. $\qquad P = -\frac{i}{x}\partial_x x$

$$0 = \Big(\frac{1}{2}\gamma^{-2} P^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell(\ell+1)}{x^2}\gamma^{-2} - \gamma^{-1}\frac{Z}{x} - E\Big) \underbrace{R(\gamma x)}_{\phi(x)} \qquad x>0$$

multiplicando ahora por $\gamma^2 x$:

$$0 = \Big(\frac{1}{2} x P^2 + \frac{1}{2}\frac{\ell(\ell+1)}{x} - \gamma Z - \gamma^2 E x\Big)\phi(x)$$

si se elige γ de modo que $\underline{2\gamma^2 E = -1}$ y $\tau = \ell(\ell+1)$

la ecuación queda $\underline{(T_3 - \gamma Z)\phi = 0}$

con $T_1 = \frac{1}{2}\big(xP^2 + \frac{\tau}{x} - x\big)$, $T_2 = xP$, $T_3 = \frac{1}{2}\big(xP^2 + \frac{\tau}{x} + x\big)$

correspondiendo a la rep. de $SO(2,1)$ de antes con $a=1$ y $\tau = \ell(\ell+1)$

de modo que la ec. es una ec. de autovalores de T_3 con $\underline{q = \gamma Z}$.

$$\text{y} \quad \underset{\substack{\shortparallel \\ Q(Q-1)}}{T^2} = k(k+1) = \tau + \frac{1-a^2}{4a^2} = \ell(\ell+1) \qquad (k = \ell \text{ ó } -\ell-1)$$

$\underline{Q = \ell+1}$ ó $Q = -\ell$

si $Q>0$ $\quad$ ($T_2 = 0$ no interesa)
$\quad Q = 0$

$$T_2 = x\, p \qquad p = \frac{1}{x}(-i\partial_x)\, x = -i\partial_x - \frac{i}{x}$$

$$= -i\partial_x x$$

def. $\langle\phi|\psi\rangle = \int_0^\infty dx\, \phi^*(x)\psi(x)$

$$\langle\phi|T_2|\psi\rangle = \int_0^\infty dx\, \phi^*(-i\partial_x)x\psi \neq \langle\psi|T_2|\phi\rangle^*$$

def. $\langle\phi|\psi\rangle_\rho \equiv \int_0^\infty dx\, \phi^*(x)\,\hat{\rho}\,\psi(x) = \langle\phi|\hat{\rho}|\psi\rangle$

con $\hat{\rho} > 0 \quad \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho} \quad$ ($\dagger$ respecto de $\langle|\rangle$)

$(\langle\phi|\phi\rangle_\rho > 0) \quad (\langle\phi|\psi\rangle_\rho = \langle\psi|\phi\rangle_\rho^*)$

$$\langle\phi|T_2|\psi\rangle_\rho = \langle\phi|\hat{\rho}\,T_2|\psi\rangle = \int_0^\infty dx\, \phi^*\hat{\rho}\,(-i\partial_x)x\psi$$

basta tomar $\hat{\rho} = x$ para que $= \langle\psi|T_2|\phi\rangle_\rho^*$

T_2 es hermítico respecto de $\langle|\rangle_\rho \qquad (T_2^{\dagger_\rho} = T_2)$

En general $\quad A^{\dagger_\rho} = \hat{\rho}^{-1}A^\dagger\hat{\rho}$

$$A^{\dagger_\rho} = A \iff (\hat{\rho}A)^\dagger = \hat{\rho}A$$

El mismo $\langle|\rangle_\rho$ hace hermítico a los otros T_i.

$f(x)^{\dagger_\rho} = f(x)$ si $f(x)$ real

$x\,p^2 = (-i\partial_x)^2 x \quad \Rightarrow \quad x\,(x\,p^2) = x(-i\partial_x)^2 x$ es hermítico respecto de $\langle|\rangle$.

$\Rightarrow \; x\,p^2$ es hermítico respecto de $\langle|\rangle_\rho$.

$T_i^{\dagger_\rho} = T_i$ con $\rho = x$.

$\langle \psi | \phi \rangle_0$ cierto producto escalar, $A^\ddagger$ adjunto respecto de $\langle | \rangle_0$

$$\langle \psi | A | \phi \rangle_0 = \langle A^\ddagger \psi | \phi \rangle_0$$

Otro producto escalar será de la forma

$$\langle \psi | \phi \rangle = \langle \psi | \hat{\rho} | \phi \rangle_0 \overset{\equiv \langle \psi | \hat{\rho} \phi \rangle_0}{} \quad \text{con} \quad \hat{\rho} = \hat{\rho}^\ddagger > 0$$

(para que $\langle \psi | \phi \rangle = \langle \phi | \psi \rangle^*$ y $\langle \psi | \psi \rangle > 0$)

sea $A^\dagger$ el adjunto de A respecto de $\langle | \rangle$

$$\langle \psi | A^\dagger | \phi \rangle = \langle A \psi | \phi \rangle = \langle A \psi | \hat{\rho} | \phi \rangle_0 = \langle \psi | A^\ddagger \hat{\rho} \phi \rangle_0$$
$$= \langle \psi | \hat{\rho} \hat{\rho}^{-1} A^\ddagger \hat{\rho} \phi \rangle_0 = \langle \psi | \hat{\rho}^{-1} A^\ddagger \hat{\rho} \phi \rangle$$

$$\Rightarrow \quad A^\dagger = \hat{\rho}^{-1} A^\ddagger \hat{\rho} \qquad \text{(en particular } \hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}^\ddagger = \hat{\rho} \text{)}$$

Si queremos $A^\dagger = A \quad \Leftrightarrow \quad \rho A = A^\ddagger \rho = (\rho A)^\ddagger$

es decir equivale a ρA hermítico respecto de $\langle | \rangle_0$.

Simplificar todo el rollo del producto escal.

y mostrar que $\left\langle -\frac{Z}{r} \right\rangle = 2E$

$$\langle n | r | n \rangle = \frac{\int dx\, x\, \phi^2 r}{\int dx\, x\, \phi^2} = \frac{\int dx\, x^2 \phi^2}{\int dx\, x^2 \phi^2 \frac{1}{r}} = \frac{1}{\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle}$$

$$\parallel$$

$$\gamma \langle n | (\overbrace{T_3 - T_1}^{x}) | n \rangle = \gamma \langle n | T_3 | n \rangle = \gamma q = \gamma^2 Z = -\frac{Z}{2E}$$

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_+ + T_-)$$

Para determinar el espectro hay que verificar que $\vec{T}$ son hermíticos y T_3 acotado inferiormente en un espacio de Hilbert adecuado.

En nuestro caso $\phi(x)$ está definido ~~para~~ en $[0,\infty)$ $x \geq 0$. En cuanto al producto escalar, está claro que $\langle\phi|\phi\rangle_0 \equiv \int_0^\infty dx\, \phi^*(x)\phi(x)$ no es adecuado y hay que generalizarlo a

$$\langle\psi|\phi\rangle \equiv \int_0^\infty dx\, \rho(x)\, \psi^*(x)\, \phi(x) \qquad \rho \geq 0$$

$$= \langle\psi|\rho|\phi\rangle_0$$

(más generalmente $\hat{\rho}$ puede ser un op. $\hat{\rho} \geq 0$, $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$)

Para que A sea hermítico respecto de $\langle|\rangle$:

$$\langle\psi|A|\phi\rangle = \langle A\psi|\phi\rangle$$

$$\Rightarrow \langle\psi|\rho A|\phi\rangle_0 = \langle A\psi|\rho\phi\rangle_0 = \langle\rho A\psi|\phi\rangle_0$$

es decir ρA debe ser hermítico respecto de $\langle|\rangle_0$

(Más generalmente si $A^\dagger$ es el adjunto respecto de $\langle|\rangle$ y $A^\ddagger$ es adjunto respecto de $\langle|\rangle_0$

$$\left.\begin{aligned} \langle\psi|A\phi\rangle &= \langle A^\dagger\psi|\phi\rangle = \langle\rho A^\dagger\psi|\phi\rangle_0 \\ \langle\psi|\rho A\phi\rangle_0 &= \langle(\rho A)^\ddagger\psi|\phi\rangle_0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\rho A^\dagger = (\rho A)^\ddagger = A^\ddagger\rho \\ &\Rightarrow A^\dagger = \rho^{-1}A^\ddagger\rho \end{aligned}$$

)

~~Puesto que P, x son hermíticos respecto de $\langle|\rangle_0$ se deduce que $\rho = \frac{1}{x}$ es adecuado ($\vec{T}$ son hermíticos respecto de $\langle|\rangle$ ya que $\frac{1}{x}\vec{T}$ lo son respecto de $\langle|\rangle_0$)~~

$$\langle\psi|\phi\rangle \equiv \int_0^\infty \frac{dx}{x}\, \psi^*$$

X es es claramente hermítico respecto de $\langle | \rangle_0$ y lo mismo $-i\partial_x$

(con condiciones de contorno adecuadas sobre $\phi(x)$)

y también $\quad X^2 P = X^2(-i)\frac{1}{X}\partial_x X = -i X \partial_x X$

así como $\quad X^2 P^2 = X^2(-)\frac{1}{X}\partial_x^2 X = -X\partial_x^2 X$

en resumen $X\,\vec{T}$ son hermíticos respecto $\langle | \rangle_0$ y por tanto

$\vec{T}$ lo son respecto de $\langle \psi | \phi \rangle = \int_0^\infty dx\, x\, \psi^*(x)\phi(x)$, $\quad \rho(x) = x$ (*)

En cuanto a T_3

$$\langle \phi | T_3 | \phi \rangle = \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \phi^*(x)\left(x^2 P^2 \phi + (\overset{c>0}{c} + x^2)\phi\right) \geq \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, \phi^*(-x\partial_x^2(x\phi))$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, (x\partial_x\phi)^2 \geq 0 \qquad \left(x^2P^2 = (x^2P)\frac{1}{x^2}(x^2P) > 0 \right)$$

$$= \left(\frac{1}{x}x^2P\right)^\dagger\left(\frac{1}{x}x^2P\right) > 0$$

$P^\dagger = x^{-2} P x^2$

$x^\dagger = x$

T_3 es acotado inferiormente. ~~[illegible]~~ (y no es cero) luego tiene el espectro visto

antes: $\quad k > -1 \Rightarrow \underline{k = l} \qquad Q = l+1$

$$q = \overset{Q}{k+1} + \overset{n_r}{r} = l+1+\underset{n_r}{r} \qquad \underset{n_r}{r} = 0,1,2\ldots$$
$$= \gamma Z$$

de donde $\quad E = -\frac{1}{2\gamma^2} = -\frac{1}{2}\frac{Z^2}{q^2} = -\frac{1}{2}\frac{Z^2}{(l+1+\underset{n_r}{r})^2}, \quad \underset{n_r}{r} = 0,1,2,\ldots$

finalmente $n \equiv q = l+1+\underset{n_r}{r}$, $\quad E_n = -\frac{1}{2}\frac{Z^2}{n^2}$.

(*) Esto viene de $\simeq \int_0^\infty dr\, r^2 R^2$ pero $\int_0^\infty dr\, r^2 \frac{1}{r} R^2$ porque hemos metido un x al $H \to T_3$

el $\frac{1}{r}$ sale en $\int d^n r\, R(\vec{r})$

$$
\begin{tikzcd}
|n l m'\rangle & \\
|n l m\rangle \arrow[u, "\vec{L}\ \ SO(3)"'] \arrow[r, "\vec{L},\, \vec{N}\ \ SO(4)"'] \arrow[d, "\vec{T}\ \ SO(2,1)"] & |n l' m'\rangle \\
|n' l m\rangle &
\end{tikzcd}
$$

Hemos def. un $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^+, \underset{\underset{d\mu}{\shortparallel}}{x\,dx})$

los $\varphi_{n\ell}(x)$ ℓ fijo $n = 1, 2 \ldots$ forman una base (para cada ℓ)

$$\langle \varphi_{n\ell} | \varphi_{n'\ell} \rangle_\rho = \delta_{nn'}$$

$$\sum_{n=\ell+1}^{\infty} \varphi_{n\ell}(x)\, \varphi_{n\ell}(x') = \frac{1}{x}\, \delta(x - x')$$

$$\left(\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, \varphi_{n\ell}(x) \qquad c_n = \langle \varphi_{n\ell} | \phi \rangle_\rho \right.$$

dep. de $\phi(x)$ y de ℓ

$$\int_0^\infty dx' x' \underbrace{\sum_{n=\ell+1}^{\infty} \varphi_{n\ell}(x) \varphi_{n\ell}(x')}_{\frac{1}{x'}\delta(x-x')} \phi(x') = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n\ell}(x) \underset{\overset{\shortparallel}{c_n}}{\langle \varphi_{n\ell} | \phi \rangle_\rho} = \phi(x)$$

$R_{n\ell}(r)$ con $dr\, r^2$ no es completa en $L^2(\mathbb{R}^+, r^2 dr)$ pero $\varphi_{n\ell}(x)$ con $dx\, x$ sí
ℓ fijo

Hay un isomorfismo entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{H}^{\text{Coul}}_{\ell,\text{ ligado}}$

$$R(r) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n R_{n\ell}(r) \quad \longleftrightarrow \quad \phi(x) = \sum_{n=\ell+1}^{\infty} c_n \varphi_{n\ell}(x)$$

pero no hay un γ tal que $\phi(x) = R(r = \gamma x)$

ya que γ dep. de n.

Libro de E.G. Adams

comentarios:

- para estados de colisión se toma $2\gamma^2 E = 1$, y aparece un problema de autovalores de T_1.

- Como T_3 es hermítico, las funciones propias son ortogonales:

$$\int dx\, x\, \varphi^*_{n\ell}(x)\, \varphi_{n'\ell}(x) = \delta_{nn'} \quad \cancel{\text{si } n \neq n'}$$

y forman un conjunto completo ~~disc~~ discreto. Por otro lado

$$\int dr\, r^2\, R^*_{n\ell}(r)\, R_{n'\ell}(r) = \delta_{nn'} \quad \cancel{\text{si } n \neq n'} \qquad \cancel{\text{distinto}}$$

$$R_{n\ell}(\gamma_n x) = N_{n\ell}\, \varphi_{n\ell}(x) \quad \cancel{\text{salvo normalización}}, \qquad \gamma_n = \frac{n}{Z}$$

las $R_{n\ell}(r)$ no forman un conjunto completo (faltan los estados de colisión). Nótese que el producto escalar es distinto y que la relación $r \leftrightarrow x$ depende de n.

Una consecuencia de plantear el problema con T_3 es que al perturbar el sistema (ej. efecto Stark) sólo hay que usar estados intermedios discretos y no continuos. $z \sim r \sim x \sim T_1 - T_3$

- Aplicando op. escalera $T_\pm$ a $\varphi_{n\ell}$ se obtiene $\varphi_{n\pm1,\ell}$

por ej. a partir del estado más bajo $n=\ell+1$, se pueden obtener los estados excitados (con igual ℓ) usando sólo op. diferenciales.

- El grupo $SO(2,1)$ se puede extender a $SO(4,2)$ (15 generadores) ($\supset SO(3)$ de $\vec{L}$ $\supset SO(4)$ $\vec{L}, \vec{M}$ Runge-Lenz) como subgrupos de modo que usando op. escalera se conectan todos los estados $|n\ell m\rangle$.

- El mismo método $SO(2,1)$ y la misma realización (con distinta a) ~~op. stat.~~ resuelve el oscilador armónico, y el coulombiano, oscilador relativista (incluido Dirac) y no relativista en D dimensiones (no sólo $D=3$).

$$E_n^{(1)} = \langle n | V_I | n \rangle$$

$$E_n^{(2)} = \frac{\langle n | V_I | n' \rangle \langle n' | V_I | n \rangle}{E_n - E_{n'}}$$