rotación pura: $R\begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$ $\qquad U(R_\omega) = e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}$

boost puro: $e^{-i\vec{\chi}\cdot\vec{K}} = U(B_{\vec{v}})$

los boosts de la forma $\hat{R}\, B(\hat{e}_3, v)\, R^{-1} = B(\hat{v}, v)$

con $R\hat{e}_3 = \hat{v}$ (en total 3 parámetros, $1 + 2$)

v — dos rotaciones indep., la rot. sobre $\hat{e}_3$ no hace nada

toda $\Lambda = B(\vec{v})\, R(\vec{\omega})$,

dados Λ, $\vec{v}$ se determina por $\Lambda\begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma x^0 \\ \gamma\vec{v}\, x^0 \end{pmatrix}$, $\frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}$

(es decir, por la velocidad del origen transformado)

por $\|(x^0, \vec{0})'\|^2 = x^{0\,2}$

$$B(\hat{e}_3) = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \gamma v \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$x'^0 = \gamma(x^0 + v x^3)$ (*)
$x'^1 = x^1$
$x'^2 = x^2$
$x'^3 = \gamma(v x^0 + x^3)$

$R(\vec{\omega}) = B(\vec{v})^{-1}\Lambda$ $\qquad (B_{\vec{v}}^{-1}\Lambda)\begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix} \Rightarrow B_{\vec{v}}^{-1}\Lambda$ rotación 3)

$\Lambda = B(\vec{v})R = R R^{-1} B(\vec{v}) R = R\, B(R^{-1}\vec{v})$

Un con velor. $\vec{v}$ es un boost puro sii $\Lambda\begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v}^{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{v}^{\perp} \end{pmatrix}$ $\forall\, \vec{v}^{\perp} \perp \vec{v}$

(*) $\vec{x} = \vec{x}_{\parallel} + \vec{x}_{\perp}$ según $\vec{v}$ $\qquad t' = \gamma(t + \vec{v}\cdot\vec{x}_{\parallel})$

$\vec{x}' = \vec{x}_{\perp} + \gamma(\vec{x}_{\parallel} + \vec{v}\, t)$ $\qquad \frac{d\vec{x}'}{dt'} = \vec{v}$

$\det G = \det \Lambda^T G \Lambda \Rightarrow \det\Lambda = \pm 1$

$g_{00} = g_{00} {\Lambda^0}_0^2 + g_{ij} {\Lambda^i}_0 {\Lambda^j}_0$

$+++$ $\quad -1 = -{\Lambda^0}_0^2 + \|{\Lambda^i}_0\|^2 \Rightarrow {\Lambda^0}_0 \geq 1$ (≥ 0)

Grupo de Poincaré

ISO(3,1)

El grupo de Poincaré (ó grupo inhomogéneo de Lorentz) es el grupo formado por transformaciones de Lorentz y traslaciones espaciotemporales.

$c=1$

Si $x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ son las coord. contravariantes de x ($\in$ espacio-tiempo M_4)

bajo una t. de Lorentz $x \to x' = \Lambda x$ ó

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ $\quad \Lambda \in O(1,3)$ es decir, una matriz real 4×4 que deja invariante la métrica de Lorentz $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$

ó $- + + +$

$\|x\|^2 \equiv x^\mu x^\nu g_{\mu\nu} \Rightarrow \|\Lambda x\|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in M_4$

$G = \Lambda^T G \Lambda$

$\Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha \Lambda^\nu{}_\beta x^\beta g_{\mu\nu} = x^\alpha x^\beta g_{\alpha\beta} \Rightarrow \underline{g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta}$

Sólo considero el subgrupo conexo con la identidad $L^\uparrow_+$ (no incluye paridad ni inversión temporal) $\det\Lambda = +1$, $\Lambda^0{}_0 > 0$ (≥ 1 en realidad)

$L^\uparrow_+$ contiene rotaciones y boosts ($3+3=6$ parámetros)

Si se incluyen traslaciones $x \to x' = \Lambda x + a$ ó

$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$ $\quad$ con elementos $g(\Lambda, a)$ $\qquad$ $ISO(1,3)$ $\equiv$

(es el grupo que deja invariante el intervalo $\|x-y\|^2$) $\equiv$ g. Poincaré

Aplicando dos t. de Poincaré sucesivas se deduce la ley de multiplicación

$x_2 = \Lambda_2 x + a_2, \quad x_{12} = \Lambda_1(\Lambda_2 x + a_2) + a_1 \Rightarrow$

$g_1 g_2 = g(\Lambda_{12}, a_{12}) \qquad \underline{\Lambda_{12} = \Lambda_1\Lambda_2, \quad a_{12} = a_1 + \Lambda_1 a_2}$

$g^{-1} = g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a) \qquad e = g(1, 0) \qquad (1)^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu$

$$g_{12} = (\Lambda_1 \Lambda_2 ,\ a_1 + \Lambda_1 a_2)$$

$$g_1^{-1} g_2^{-1} = (\Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} ,\ -\Lambda_1^{-1} a_1 - \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} a_2)$$

$$g_{[12]} = (\Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 ,\ -\Lambda_1^{-1} a_1 - \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} a_2 + \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} (a_1 + \Lambda_1 a_2))$$

$$= (\Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 \Lambda_2 ,\ \cancel{-\Lambda_1^{-1}(a_1 + \Lambda_2^{-1}(a_2 - a_1) + \Lambda_2^{-1} \Lambda_1 a_2)})$$

$$\Lambda_1^{-1} (\Lambda_2^{-1} - 1) a_1 + \Lambda_1^{-1} \Lambda_2^{-1} (\Lambda_1 - 1) a_2$$

$$x^\mu \to \Lambda^\mu{}_{\cdot\nu} x^\nu + a^\mu \qquad \Lambda^\mu{}_{\cdot\alpha}\Lambda^\nu{}_{\cdot\beta}\, g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu}$$

$$\Lambda^\mu{}_{\cdot\nu} = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu{}_{\cdot\nu} \qquad \delta\omega^\mu{}_{\cdot\alpha}\, g^{\alpha\nu} + \delta\omega^\nu{}_{\cdot\beta}\, g^{\mu\beta} = 0$$

$$\delta\omega^{\mu\nu} + \delta\omega^{\nu\mu} = 0$$

$$\delta x^\mu = \delta\omega^\mu{}_{\cdot\nu} x^\nu + \delta a^\mu$$

$$\delta G = -i\,\delta x^\mu \partial_\mu = -i\,\delta\omega^\mu{}_{\cdot\nu} x^\nu \partial_\mu - i\,\delta a^\mu \partial_\mu$$

$$-\delta a_\mu P^\mu + \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} \qquad J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$$

$$P^\mu = i\,\partial^\mu$$

$$J^{\mu\nu} = +i\,(x^\mu\partial^\nu - x^\nu\partial^\mu) \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^4)$$

También: las propias Λ forman una irrep. de Lorentz (para Poincaré se puede hacer con $\left\{ \begin{pmatrix} \Lambda & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda x + a \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\Lambda^\mu{}_{\cdot\nu} = (1)^\mu{}_{\cdot\nu} - \frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^\mu{}_{\cdot\nu}$$

$$\| $$

$$\delta^\mu{}_{\cdot\nu} + \delta\omega^\mu{}_{\cdot\nu}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{i}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^\mu{}_{\cdot\nu} = \delta\omega^\mu{}_{\cdot\nu} = \delta\omega_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\mu} g^\beta{}_{\cdot\nu}$$

$$= \frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta}\left(g^{\alpha\mu} g^\beta{}_{\cdot\nu} - g^{\beta\mu} g^\alpha{}_{\cdot\nu}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (J^{\alpha\beta})^\mu{}_{\cdot\nu} = i\left(g^{\alpha\mu} g^\beta{}_{\cdot\nu} - g^{\beta\mu} g^\alpha{}_{\cdot\nu}\right)$$

Esta rep. no es unitaria (por los boosts)

Para una t. de Lorentz infinitesimal $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu} + \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}$

$$g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}(\delta^{\mu}{}_{\alpha} + \delta\omega^{\mu}{}_{\alpha})(\delta^{\nu}{}_{\beta} + \delta\omega^{\nu}{}_{\beta}) = g_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\alpha\beta} + \delta\omega_{\beta\alpha}$$

donde $\delta\omega_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\alpha}\delta\omega^{\alpha}{}_{\nu}$, es decir $\underline{\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}}$ es antisimétrico

($\Rightarrow$ 6 parámetros indep.) $\qquad \delta\omega_{\mu}{}^{\nu} = -\delta\omega^{\nu}{}_{\mu}$

$\Rightarrow \delta x^{\mu} = \delta\omega^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu} + \delta a^{\mu}$ $\qquad U(\Lambda, a) = e^{a \ldots J^{\mu\nu}}$

$$\delta_{12}\omega = \delta_1\omega + \delta_2\omega + \delta_1\omega\,\delta_2\omega, \quad \delta_{12}a = \delta_1 a + \delta_2 a + \delta_1\omega\,\delta_2 a$$

$\Rightarrow$ ~~$\delta_{[12]}a^{\mu} = 0$~~, $\quad \delta_{[12]}\omega^{\mu}{}_{\nu} = \delta_1\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta_2\omega^{\alpha}{}_{\nu} - \delta_2\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta_1\omega^{\alpha}{}_{\nu}$ (*)

$$\delta_{[12]}a^{\mu} = \delta_1\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta_2 a^{\alpha} - \delta_2\omega^{\mu}{}_{\alpha}\delta_1 a^{\alpha}$$

def. $-i\delta G = +i\delta a_{\mu}P^{\mu} - \frac{i}{2}\delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} + i\delta\varphi 1$ $\qquad$ (def. de P^{μ}, $J^{\mu\nu}$

$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}$

como generadores de traslaciones y t. de Lorentz)

En realidad no hay modo de escribir un $\delta_{[12]}\varphi$ no trivial ($\delta_1 a\cdot\delta_2 a$, ó $\delta_1\omega\cdot\delta_2\omega$ sale simétrico) de modo que este grupo no tiene extensiones no triviales y las rep. serán localmente no proyec. necesariamente.

$$\delta G = -\delta a_{\mu}P^{\mu} + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$$

$$[\delta_1 G, \delta_2 G] = i\,\delta_{[12]}G \Rightarrow$$

$$[-\delta_1 a_{\mu}P^{\mu} + \frac{1}{2}\delta_1\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}, -\delta_2 a_{\alpha}P^{\alpha} + \frac{1}{2}\delta_2\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}] =$$

$$= -i\,\delta_{[12]}a_{\mu}P^{\mu} + \frac{i}{2}\delta_{[12]}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}$$

$$= \frac{i}{2}(\delta_1\omega_{\mu}{}^{\alpha}\delta_2\omega_{\alpha\nu} - \delta_2\omega_{\mu}{}^{\alpha}\delta_1\omega_{\alpha\nu})J^{\mu\nu} - i(\delta_1\omega_{\mu\alpha}\delta_2 a^{\alpha} - \delta_2\omega_{\mu\alpha}\delta_1 a^{\alpha})P^{\mu}$$

(*) $\delta_{[12]}\omega_{\mu\nu} = -\delta_{[12]}\omega_{\nu\mu}$, consecuencia de que $\Lambda_1\Lambda_2$ es otra vez de Lorentz y

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ \vec{x} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^0 \\ R\vec{x} + \vec{v}\, x^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \vec{0} \\ \vec{v} & R \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_1 & R_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_2 & R_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ v_1 + R_1 v_2 & R_1 R_2 \end{pmatrix}$$

$$U(\Lambda, 0)\, P^\mu\, U(\Lambda, 0)^{-1} = e^{-\frac{i}{2}\omega \cdot J}\, P\, e^{+\frac{i}{2}\omega J} = e^{-\frac{i}{2}[\omega J,\ ]}\, P$$

$$= \sum_n \frac{1}{n!}\left(-\frac{i}{2}\right)^n [\omega \cdot J,\ ]^n\, P$$

$$P^\mu \longrightarrow P^\mu - \delta\omega^\mu{}_\alpha P^\alpha = (\delta^\mu{}_{\cdot\alpha} - \delta\omega^\mu{}_{\cdot\alpha})\, P^\alpha = (\delta\Lambda^{-1})^\mu{}_{\cdot\alpha}\, P^\alpha$$

por inducción

$$U(\delta\Lambda)^N P^\mu U(\delta\Lambda)^{-N} = (\delta\Lambda^{-1})^N{}^\mu{}_{\cdot\alpha}\, P^\alpha \qquad (\delta\Lambda)^N = \Lambda$$

$$= (\Lambda^{-1})^\mu{}_{\cdot\alpha}\, P^\alpha$$

$$\delta_\omega P^i = -\delta\omega^i{}_{\cdot j} P^j = \underset{\overset{\shortparallel}{\epsilon_{ijk}\delta\omega_k}}{\delta\omega_{ij}}\, P^j = \vec{P} \times \delta\vec{\omega}\,\big|_i = (-\delta\vec{\omega} \times \vec{P})_i$$

De donde *

$$[P^\mu, P^\nu] = 0$$

$$[J^{\mu\nu}, P^\alpha] = i(g^{\alpha\nu} P^\mu - g^{\alpha\mu} P^\nu)$$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\alpha\beta}] = i(g^{\nu\alpha} J^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} J^{\nu\beta} - g^{\nu\beta} J^{\mu\alpha} + g^{\mu\beta} J^{\nu\alpha})$$

$P = T \otimes L$

$P/T \cong L$

Por ej. $\left[\frac{1}{2}\delta_1\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu}, -\delta_2 a_\alpha P^\alpha\right] = -i\,\delta_1\omega_{\mu\alpha}\delta_2 a^\alpha P^\mu$

$\frac{1}{2}\delta_1\omega_{\mu\nu}[J^{\mu\nu}, P^\alpha] = i\,\delta_1\omega_\mu{}^{\alpha} P^\mu = \frac{i}{2}\delta_1\omega_{\mu\nu}(g^{\alpha\nu}P^\mu - g^{\alpha\mu}P^\nu).$

$P \to$ ideal

Se ve que J y P generan sendos subgrupos, también

$\delta = -i[\delta G, \,]$

$\delta_\omega P^\mu = -i\left[\frac{1}{2}\delta\omega_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta}, P^\mu\right] = -\delta\omega^\mu{}_\alpha P^\alpha$ que indica que P^μ se transf. como un cuadrivector Lorentz, análogamente

$\delta_\omega J^{\mu\nu} = -\delta\omega^\mu{}_\alpha J^{\alpha\nu} - \delta\omega^\nu{}_\alpha J^{\mu\alpha}$ un tensor

Es decir, bajo t. finitas $U(\Lambda, a) = U(1,a)U(\Lambda,0) = e^{i a_\mu P^\mu} e^{-\frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}}$

$$U(\Lambda,0)P^\mu U(\Lambda,0)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha P^\alpha$$

$$U(\Lambda,0)J^{\mu\nu}U(\Lambda,0)^{-1} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta J^{\alpha\beta}$$

$\delta_a P^\mu = 0, \quad \delta_a J^{\mu\nu} = +i[\delta a_\alpha P^\alpha, J^{\mu\nu}] = \delta a^\nu P^\mu - \delta a^\mu P^\nu$

$$U(1,a)P^\mu U^{-1}(1,a) = P^\mu$$

$$U(1,a)J^{\mu\nu}U^{-1}(1,a) = a^\nu P^\mu - a^\mu P^\nu + J^{\mu\nu}$$

notar consistencia con $U_{12} = U_1 U_2$. (Esto y la fórmula infinitesimal establece la fórmula finita "por inducción")

* Todo esto vale para $g_{\mu\nu}$ $(= g_{\nu\mu})$ no sing. cualquiera y cualquier num. de dim $O(n,m)$

NOTACIÓN: todos los índices arriba (P K J) y ϵ_{ijk} abajo, ∂_i abajo

Para conectar con el caso de Galileo se define $x^0 = ct$, $x^i = (\vec{r})_i$ *

entonces $\delta x^\mu = \delta a^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu$ implica

$\delta x^i = \delta a^i + \delta\omega^i{}_j x^j + \delta\omega^i{}_0 x^0$

a comparar con $\delta\vec{r} = \delta\vec{a} + \delta\vec{\omega}\times\vec{r} + \delta\vec{v}\, t$

de donde $\delta a^i = (\delta\vec{a})_i$, $(\delta\vec{v})_i = c\,\delta\omega^{i0}$, $(\delta\vec{\omega})_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\delta\omega^{jk}$ (ó $\delta\omega^{ij} = \epsilon_{ijk}\delta\omega_k$)

además $\delta x^0 = \delta a^0 + \delta\omega^0{}_i x^i$

$\Rightarrow \delta a^0 = c\,\delta\tau$ y $\delta t = \delta\tau + \underbrace{\frac{1}{c^2}\delta\vec{v}\cdot\vec{r}}$ el nuevo término es puramente relativista

$\delta G = -\delta\tau H + \delta\vec{a}\cdot\vec{P} + \delta\vec{v}\cdot\vec{K} + \delta\vec{\omega}\cdot\vec{J}$

e indica que t deja de ser absoluto.

de $-i\delta_\omega G = -i\frac{1}{2}\delta\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\delta\omega^{ij}J_{ij} - i\,\delta\omega^{i0}J_{i0}$

$= -i\,\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} - i\,\delta\vec{v}\cdot\vec{K}$ y las relaciones de antes se deduce

$(\vec{J})_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J^{jk}$ ó $J^{jk} = \epsilon_{jki}J_i$

$J^{\mu\nu}$ vale ? d

$\vec{J}$ sólo [illegible] para [illegible] velocidad

ídem $(\vec{K})_i = \frac{1}{c}J^{0i}$

Nótese que la coordenada normal de $\vec{K}$ es $(\vec{\chi})_i$ y sólo coincide

con $\vec{v}$ para $\vec{v}$ infinitesimal (no así en Galileo), $\frac{\vec{v}}{c} = \hat{\chi}\tanh\left(\frac{\chi}{c}\right)$

Para traslaciones espaciales $+i\,\delta a_i p^i = -i\,\delta a^i p^i = -i\,\delta\vec{a}\cdot\vec{P}$ se deduce $\vec{\chi} \xrightarrow[c\to\infty]{} \vec{v}$

$(\vec{P})_i = p^i = -P_i$

Para temporales: $i\,\delta a_0 P^0 = i c\,\delta\tau P^0 = i\,\delta\tau H \Rightarrow H = cP^0$

$U(\Lambda, a) = e^{itH - i\vec{a}\cdot\vec{P}}\underbrace{e^{-i\vec{\chi}\cdot\vec{K}}e^{-i\vec{\omega}\cdot\vec{J}}}$

$e^{-ic\omega^{i0}K_i - i\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega^{jk}J_i}$

* Volar: $(\vec{r})_i = x^i = -x_i$ $(\vec{p})_i = p^i = -p_i$, en cambio $(\vec{\nabla})_i = \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i = -\partial^i$

x^μ, p^μ, ∂_μ son "naturales" (frente a x_μ, p_μ, ∂^μ)

$$g_{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1) \qquad -i\delta G = -i\,\delta a_\mu P^\mu - \frac{i}{2}\delta\omega J$$

$$\delta x^\mu = \delta a^\mu + \delta\omega^\mu{}_\nu x^\nu \qquad x^0 = ct = -x_0$$

$$\delta x^i = \delta a^i + \delta\omega^i{}_j x^j + \delta\omega^i{}_0 x^0$$

$$\delta\vec{r} = \delta\vec{a} + \delta\vec{\omega}\times\vec{r} + \delta\vec{v}\,t$$

$$\delta\omega^i{}_j = \delta\omega_{ij} = \epsilon_{ijk}\,\delta\omega_k \qquad \delta\omega_k = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\,\delta\omega_{ij}$$

$$\delta v_i = c\,\delta\omega_{i0} = -c\,\delta\omega^{i0} = +\delta\omega^{0i}$$

$$\delta x^0 = \delta a^0 + \delta\omega^0{}_i x^i \approx c\,\delta\tau$$

$$\overset{\shortparallel}{c\,\delta t} \qquad \delta a^0 = c\,\delta\tau\,, \qquad \cancel{\delta t = \frac{1}{c}(c\,\delta\tau)}$$

$$\delta t = \frac{1}{c}(\delta a^0 + \delta\omega^{0i} x^i) = \delta\tau + \frac{1}{c^2}\delta\vec{v}\cdot\vec{r}$$

$$-\frac{i}{2}\delta\omega^{\mu\nu}J_{\mu\nu} = -\frac{i}{2}\delta\omega^{ij}J^{ij} + i\,\delta\omega^{0i}J^{0i}$$

$$= -\frac{i}{2}\delta\omega_k\,\epsilon_{ijk}J^{ij} - \frac{i}{c}\delta v_i\,J^{i0}$$

$$= -i\,\delta\vec{\omega}\cdot\vec{J} - i\,\delta\vec{v}\cdot\vec{K}$$

$$J_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}J_{ij}\,, \qquad K_i = -\frac{1}{c}J^{0i}$$

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k$$

$$\delta a_\mu P^\mu = \delta a_0 P^0 + \delta a_i P^i = \delta\vec{a}\cdot\vec{P} - \delta\tau H$$

$$(\vec{P})_i = P^i\,, \qquad \delta a_0 = -\delta a^0 = -c\,\delta\tau \qquad P^0 = \frac{1}{c}H, \quad H = cP^0$$

$G = \Lambda^T G \Lambda \Rightarrow G \Lambda G^{-1} = \Lambda^{T-1}$

~~$T^{\mu}_{\cdot\nu}$ observable tensorial~~

$x^{\mu} \to \Lambda^{\mu}_{\cdot\nu} x^{\nu}$

$x_{\mu} \to g_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\cdot\nu} g^{\nu\beta}_{\cdot} x_{\beta}$
$= \Lambda_{\mu\cdot}^{\cdot\beta} x_{\beta}$
$\parallel$
$(\Lambda^{-1})^{\beta}_{\cdot\mu}$

~~$T'^{\mu}_{\cdot\nu} = U_{\Lambda} T^{\mu}_{\cdot\nu} U^{-1}_{\Lambda} = \Lambda^{-1\mu}_{\cdot\alpha} \Lambda^{-1\beta}_{\cdot\nu} T^{\alpha}_{\cdot\beta}$~~

$T^{\mu\nu}_{\cdot\lambda}$ observable tensorial bajo Lorentz

$(\Lambda^{-1})_{\lambda\cdot}^{\cdot\gamma}$ $\parallel$ $\nu = \mathrm{lin}\{T^{\mu\nu}_{\cdot\lambda}\}$ lleva una rep. de Lorentz

$$T'^{\mu\nu}_{\cdot\lambda} = U_{\Lambda} T^{\mu\nu}_{\cdot\lambda} U^{-1}_{\Lambda} = \Lambda^{-1\mu}_{\cdot\alpha} \Lambda^{-1\nu}_{\cdot\beta} \Lambda^{\gamma}_{\cdot\lambda} T^{\alpha\beta}_{\cdot\gamma}$$
$$= \Lambda_{\alpha\cdot}^{\cdot\mu} \Lambda_{\beta\cdot}^{\cdot\nu} \Lambda^{\gamma}_{\cdot\lambda} T^{\alpha\beta}_{\cdot\gamma}$$

$g'_{\mu\nu} = \Lambda^{\alpha}_{\cdot\mu} \Lambda^{\beta}_{\cdot\nu} g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu}$ es un tensor invariante Lorentz

$$\epsilon'_{\mu\nu\alpha\beta} = \Lambda^{\mu'}_{\cdot\mu} \Lambda^{\nu'}_{\cdot\nu} \Lambda^{\alpha'}_{\cdot\alpha} \Lambda^{\beta'}_{\cdot\beta} \epsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \overset{\text{por antisim.}}{=} c(\Lambda)\, \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$$

pero $c(\Lambda)$ no es más que la def. de $\det\Lambda$

si $\Lambda \in L^{\uparrow}_{+}$ $\det\Lambda = 1$ y ϵ es un tensor inv. $L^{\uparrow}_{+}$. (pseudo-tensor Lorentz)

$J^{\mu\nu} J_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} J^{\mu\nu} J^{\alpha\beta}$ inv. Lorentz (Casimir)

$$P^{\mu} P_{\mu} \longmapsto U P^{\mu} P_{\mu} U^{-1} = \Lambda^{-1\mu}_{\cdot\alpha} \Lambda^{\beta}_{\cdot\mu} P^{\alpha} P_{\beta} = g^{\beta}_{\cdot\alpha} P^{\alpha} P_{\beta} = P^{\alpha} P_{\alpha}$$

escalar inv.

$$W_{\mu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^{\nu} J^{\alpha\beta} \longmapsto U W_{\mu} U^{-1} = \Lambda^{-1\nu}_{\cdot\nu'} \Lambda^{-1\alpha}_{\cdot\alpha'} \Lambda^{-1\beta}_{\cdot\beta'} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} P^{\nu'} J^{\alpha'\beta'}$$
$$= \Lambda^{\mu'}_{\cdot\mu} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} P^{\nu'} J^{\alpha'\beta'} = \Lambda^{\alpha}_{\cdot\mu} W_{\alpha}$$

$$A'_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} T^{\alpha\beta} \longrightarrow \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \Lambda^{-1\alpha}_{\cdot\alpha'} \Lambda^{-1\beta}_{\cdot\beta'} T^{\alpha'\beta'}$$
$$= \frac{1}{2} \epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} \Lambda^{-1\rho}_{\cdot\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\cdot\mu} \Lambda^{-1\sigma}_{\cdot\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\cdot\nu} \Lambda^{-1\alpha}_{\cdot\alpha'} \Lambda^{-1\beta}_{\cdot\beta'} T^{\alpha'\beta'}$$
$$= \det(\Lambda) \frac{1}{2} \epsilon_{\mu'\nu'\alpha'\beta'} \Lambda^{\mu'}_{\cdot\mu} \Lambda^{\nu'}_{\cdot\nu} T^{\alpha'\beta'} = \det(\Lambda) \Lambda^{\mu'}_{\cdot\mu} \Lambda^{\nu'}_{\cdot\nu} A_{\mu'\nu'}$$

$$A^{\mu} B_{\mu} \to \Lambda^{-1\mu}_{\cdot\alpha} A^{\alpha} \Lambda^{\beta}_{\cdot\mu} B_{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha}$$

rep. irreducibles e invariantes

1) rep. suma directa de rep. $V = \bigoplus_i V_i$ V_i irred

se observa que $\exists |\psi\rangle$, $U(G)|\psi\rangle$ no llenan el espacio V

2) irreducible: cuando no se puede reducir, todo $|\psi\rangle$ $U(G)|\psi\rangle$ llena V
Las rep generales son suma de irred.

3) Ej. rotaciones $\{\vec{S}^2, S_3\}$ C.C.O.C. (si la hay espín) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}$

$V = \bigoplus_\mu \bigoplus_\alpha V_{\alpha\mu}$

base $|jm\rangle$ $\vec{S}^2 j$ invariante no cambia bajo el grupo

m cambia bajo el grupo $|\alpha\mu k\rangle$

j caracteriza la irrep. de $SU(2)$

$j \doteq$ tipo de simetría, característico **sólo del grupo**

4) ej. multipolos, traslaciones, tipo de simetría = respuesta del sistema

descomposición en tipos de simetría $\forall$ grupo

5) Casimires ∝ num. en V irred., son una forma de clasificar las irred

6) CCOC formados por a) Casimires (μ) b) elementos del álgebra que conmutan (k)

c) otros op. invariantes externos al grupo (α)

$\vec{P}^2, \vec{L}^2, L_z$ CCOC $L^2(\mathbb{R}^3)$

$|p, l, m\rangle$

~~$i(-i)\bar{\xi}_1 \Sigma_{11} \chi_0 - \bar{\xi}_1 (\Sigma_{12} + \Sigma_{11}) \chi_0$~~

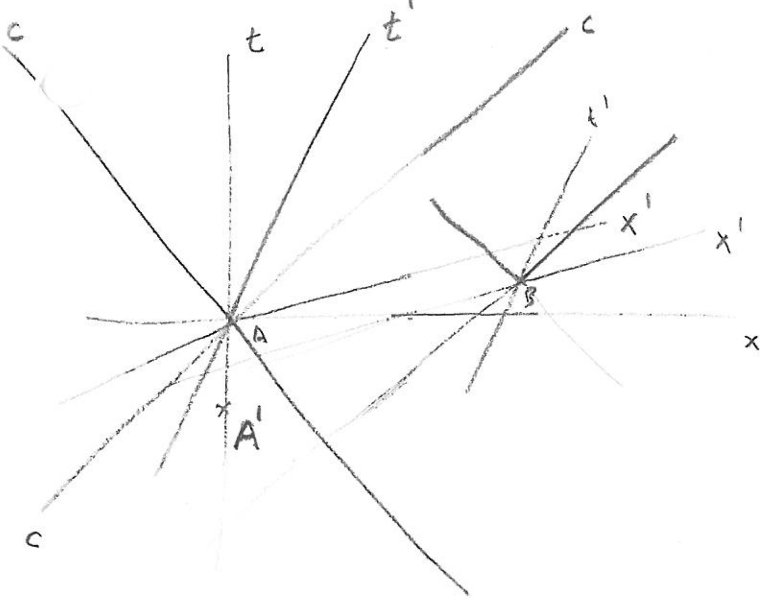
$(c=1)$ $$H \frac{d\,\cancel{H}^{p}}{d(\vec{p}^{\,2})}\Big|_{\vec{p}=0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{H}{c^2}\frac{dH}{d(\vec{p}^{\,2})}\Big|_{\vec{p}=0} = \frac{1}{2}$$

$\propto$ energía masa en el límite $(\to)$

$$\frac{1}{c^2}\left(Mc^2 + \frac{p^4}{2m} + H_{int}\right)\frac{d(\quad)}{d(\vec{p}^{\,2})}\Big|_{\vec{p}=0} = \cancel{\frac{M c^2}{c}\frac{1}{2m}} =$$

$$\frac{1}{c^2}(Mc^2 + H_{int})\frac{1}{2m} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{H_{int}}{c^2}\right)$$



$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2$$

$$\frac{1}{2}\sum_i m_i^2\phi_i^2$$

Rep. de dim. finita de Lorentz:

~~Por~~ Lorentz no compacto ⇒ dim. finita no unitarias

(por ej: $\Lambda^\mu{}_\nu$)

buscamos sol. ~~…~~ álgebra Lorentz con matrices

⇒ equivale a ~~…~~ sol de $\vec{J}_\pm$ idéntico a $SU(2)+SU(2)$

como $SU(2)$ compacto dim. finita ⇒ $J_\pm$ hermítica / unitaria (se puede elegir la base)

$\Rightarrow \left(\overset{J_+}{j_L}, \overset{J_-}{j_R}\right)$

paridad: $J \to +J$, $K \to -K$, $J_L \leftrightarrow J_R$

$$J = J_R + J_L \qquad K = \frac{J_R - J_L}{i}$$

$\Lambda^\mu{}_\nu$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

neutrinos $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ $J_L = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ $J_R = 0$

Dirac $\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(0, \frac{1}{2}\right)$

antineutrinos $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ $J_L = 0$ $J_R = \frac{\sigma}{2}$

Casimir $\vec{J}_R^{\,2}$ y $\vec{J}_L^{\,2}$

[illegible]

$P_i \equiv (\vec{P})_i$ e.l.z)

en notación tridimensional se obtiene: (todos los índices abajo, por def.)

$$[\vec{P}, \vec{P}] = [\vec{P}, H] = 0$$

$$[J_i, H] = 0 \, , \quad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk} P_k$$

$$[J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk} K_k \, , \quad [J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$$

$$[K_i, P_j] = -i\delta_{ij} \frac{H}{c^2} \, , \quad [K_i, H] = -iP_i$$

$$[K_i, K_j] = -\frac{i}{c^2} \epsilon_{ijk} J_k$$

$\vec{J}_R = \frac{1}{2}(\vec{J} \pm i\vec{K})$

$SU_L(2) \otimes SU_R(2)$

$\vec{K}$ no subálgebra

coinciden con las de Galileo excepto las dos que contienen $\frac{1}{c^2}$ en la derecha

de hecho separando $H = Mc^2 + H'$ y tomando el límite $c \to \infty$ en las c's explícitas queda exactamente Galileo como debe ser (con H' lo que en Galileo se llamaba H). ~~A partir de ahora tomo c=1.~~

Notar que $\vec{K}$ no generan un subgrupo ($\vec{J}$ sí) a diferencia del caso no relativista.

En lo que sigue uso unidades $c=1$.

Invariantes: El grupo de Poincaré tiene dos invariantes indep. (y signo P^0)

$$M^2 = P_\mu P^\mu = P^2 = P_0^2 - \vec{P}^2$$

$[M^2, P^\mu] = [M^2, J^{\mu\nu}] = 0$ es un invariante Poincaré (= c-num. real en cada subespacio irreducible*)

Primero notamos (en QFT) $|0\rangle$ = vacío ≡ estado de mínima energía.

Se postula que es único (no degenerado), de donde se deduce que debe ser invariante bajo todas las t. de simetría del hamiltoniano, en particular

* Explicar la idea con $\underbrace{\vec{S}}_{\text{una partícula con}}$: $\{\vec{S}^2, S_3\}$ c.c.o.c $|j\, m\rangle$, j invariante no cambia bajo el grupo. j = tipo de simetría (traslaciones, multipolos) j = núm. en la irrep. Espacios más generales (no irred.) son combinación lineal de irred.

$$E_{NR} = \frac{\vec{P}^2}{2M_0} + H_{int}$$

$$E = M_0 c^2 + \frac{\vec{P}^2}{2M_0} + H_{int} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$= \left(M_0 c^2 + H_{int}\right) + \frac{\vec{p}^2}{2\left(M_0 + \frac{1}{c^2} H_{int}\right)} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$= M c^2 + \frac{\vec{P}^2}{2M} + O\left(\frac{1}{c^2}\right)$$

$$= \sqrt{(Mc^2)^2 + (\vec{P}c)^2} = c\sqrt{(Mc)^2 + \vec{p}^2}$$

invariante Poincaré: $\qquad U(\Lambda, a)|0\rangle = |0\rangle \qquad M=0$

$$P^\mu|0\rangle = J^{\mu\nu}|0\rangle = 0$$ (ciertamente satisface el álgebra de Poincaré)

para todos los demás estados $P^0 > 0$, $\quad P^0|\psi\rangle = E|\psi\rangle \quad E>0$ por def. de vacío

Si $M^2 > 0$, $\; p^2 > 0 \quad P^\mu$ es tipo tiempo, se deduce $\quad (M>0)$

$$P^0 = +\sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}} \geq M > 0$$ mediante t. de Lorentz se puede llevar $\vec{P} \to 0 \qquad v = \left|\frac{\vec{p}}{p^0}\right| < 1$

$P^\mu = (M, \vec{0})$ el sistema la partícula está en reposo ó el sistema C.M.

Si $M^2 = 0 = P^2$, (*) $\quad P^\mu$ es tipo luz, $\quad P^0 = |\vec{P}| > 0 \qquad$ (en rep. $\vec{P}$, $\vec{p}$ como momento (COL))

las partículas sin masa van siempre a la velocidad de la luz (veloc. máxima)

y no se pueden llevar al reposo (sí se puede aumentar o reducir su energía y momento)

Cuando $M^2 < 0$, taquiones P^μ es tipo espacio $\quad P^0 \gtrless 0$ según el sistema de ref. (no el signo es invariante Lorentz) de modo que estas rep. no aparecen en física (cuando esto ocurre es que se está trabajando en un falso vacío)

M = masa invariante: incluye todo, ≡ energía del sistema en reposo (con sus interacciones internas)

$$P^0 = M + \frac{\vec{P}^2}{2M} + O\left(\frac{\vec{P}^4}{M^3}\right)$$

no hay contradicción con $\quad H_{NR} = \frac{\vec{P}^2}{2M} + H_{int.} \quad$ (no relativista)

ya que $\quad Mc^2 \equiv c^2 M' + H_{int} + O(\tfrac{1}{c^2})$, $\quad cP^0 = c^2 M' + \dfrac{\vec{P}^2}{2\left(M' + \frac{H_{int}}{c^2}\right)} + H_{int} + \dots$

$$H = P^0 c = c\sqrt{(Mc)^2 + \vec{P}^2} = \sqrt{(Mc^2)^2 + (\vec{P}c)^2}$$
$$= c\left(Mc + \frac{\vec{P}^2}{2Mc} + O(\tfrac{1}{c^3})\right)$$
$$= Mc^2 + \frac{\vec{P}^2}{2M} + O(\tfrac{1}{c^2})$$
$$= M'c^2 + H_{int} + \frac{\vec{P}^2}{2M'} + O(\tfrac{1}{c^2})$$

$$= \underset{\uparrow\atop O(c^2)}{M'} + \underset{\uparrow\atop O(1)}{\frac{\vec{P}^2}{2M'}} + H_{int} + O(\tfrac{1}{c^2})$$

(*) Partículas: los sistemas multipartícula libres tienen $M^2 > 0$ incluso aunque individualm. tengan $m=0$ (puede ser $M^2=0$ si hay una interacción inf. fuerte)

La forma de enfocar esto es por clarificación de estados y C.C.O.C.

$P_\mu W^\mu = 0 \qquad H W^0 = \vec{P} \cdot \vec{W}$

$\vec{p} \cdot \vec{L} = 0$

$W^0 = +\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} P^i J^{jk} = \vec{P} \cdot \vec{J} = \vec{P} \cdot \vec{S}$

$\vec{W}^i = -\frac{1}{2} \epsilon_{i0jk} H J^{jk} - \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \epsilon_{ij0k} P^j J^{0k}$

$\vec{W} = \cancel{\tfrac{1}{2}} H \vec{J} - \vec{P} \times \vec{K}$

El otro invariante es $W^2 = W^\mu W_\mu$ donde

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu J_{\alpha\beta} \qquad \epsilon_{0123} = +1 \qquad \epsilon_{0ijk} = \epsilon_{ijk} = -\epsilon^{0ijk}$$

es el vector de Pauli-Lubanski. Obviamente W^μ es un cuadri-vector Lorentz (pseudo) basta ver que es inv. bajo traslaciones (es intrínseco) (notar que $g_{\mu\nu}$, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ son sencillamente los únicos tensores invariantes Poincaré

$$\delta_a W^\mu = +i[\delta a_\nu P^\nu, W^\mu] = \cancel{i\delta a_\sigma \tfrac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}[P^\sigma, P_\nu J_{\alpha\beta}]}$$

$$= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}(\underbrace{\delta_a P_\nu}_{=0} J_{\alpha\beta} + P_\nu \delta_a J_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\nu (\delta a_\beta P_\alpha - \delta a_\alpha P_\beta) = 0$$

en definitiva $\delta_a W^2 = \delta_\omega W^2 = 0$ ($\Rightarrow [M^2, W^2] = 0$)

W^2 es un invariante que toma un valor cte en cada rep. irreducible

Como $P_\mu W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\mu P_\nu J_{\alpha\beta} = 0$ W^μ es ortogonal a P^μ y es necesariamente tipo espacio (o luz). $W^2 \leq 0$

si P^μ tiempo $P^\mu = (m, \vec{0}) \Rightarrow W^\mu = (0, \vec{w})$ espacio

si P^μ luz $= (P^0, 0, 0, P^0) \Rightarrow W^\mu = (W^0, \vec{W}_T, W^0)$ espacio o luz si $\vec{W}_T = 0$

El vector satisface $[W^\mu, W^\nu] = -i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} W_\alpha P_\beta = i\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} P_\alpha W_\beta$

[Sale de $[P_\alpha, W^\nu] = 0$, $[J_{\alpha\beta}, W^\nu] = -i(g^\nu{}_\alpha W_\beta - g^\nu{}_\beta W_\alpha)$] $[W^2, W^\mu] = 0$

En un estado con momento $|p\rangle$ definido $P_\mu|\vec{p}\rangle = p_\mu|\vec{p}\rangle$ (los P_μ conmutan, y también lo hacen con W_μ) los W_μ forman un álgebra de Lie, de hecho $W_\mu \perp P_\mu \Rightarrow$ sólo hay 3 indep. y el grupo correspondiente es el de rotaciones* (que dejan invariante P_μ). Esto se ve mejor en el C.M. (se supone $M \neq 0$)

$$P^\mu = (M, \vec{0}), \quad W^0 = 0, \quad W^i = \frac{1}{2}\epsilon^{i0jk} M J_{jk} = M\frac{1}{2}\epsilon_{ijk} J_{jk} = M S^i$$

$W^\mu = (0, M\vec{S})$

$$[W^i, W^j] = i\epsilon^{ij0k} M W_k = -i\epsilon_{ijk} M(-MS^k) = i\epsilon_{ijk} M^2 S^k$$

$$\left[\frac{W^i}{M}, \frac{W^j}{M}\right] = i\epsilon_{ijk}\frac{W^k}{M} \quad \equiv \text{rotaciones.}$$

Espectro de $W^2 = M^2 j(j+1)$

$W^2 = -M^2\vec{S}^2$ este inv. está relacionado con el espín (momento ang. intrínseco, del sistema

igual que M, $\vec{S}^2$ es un inv. Poincaré

[* Si $M > 0$ el subgrupo del t. Lorentz que deja inv. P^μ es $SU(2)$ rotaciones, si $M = 0$ es el grupo euclídeo en $\mathbb{R}^2$

$W^0 = \vec{P}\cdot\vec{J} = p^0 J_z \Rightarrow \lambda = J_z$

$\vec{W} = p^0 \vec{J} - \vec{P}\times\vec{K}$

$W^3 = W^0 = p^0 J_z - \underbrace{(\vec{P}\times\vec{K})_z}_{=0}$

$W^i = p^0 J_i - (\vec{P}\times\vec{K})_i \quad i=1,2 \quad \underset{\text{si } \vec{J}^2<\infty}{=} 0 \Rightarrow \vec{P}\times\vec{K} = p^0 \vec{J}_\perp = p^0 \vec{J}_\perp$

Caso $M=0$

Hay varias irreps. de Poincaré pero sólo consideramos $W^2=0$. El motivo es $\vec{S}^2 = -\frac{W^2}{M^2}$ si $M\to 0$ y $\vec{S}^2<\infty$
$\Rightarrow W^2 \to 0$

Por $M^2=0$ podemos elegir $P^\mu = (p^0, \vec{0}_\perp, p^0)$

Por $W^\mu P_\mu = 0 \Rightarrow W^\mu = (\lambda p^0, \vec{W}_\perp, \lambda p^0)$

Por $W^2=0 \Rightarrow \vec{W}^2 = -\vec{W}_\perp^2 = 0 \Rightarrow \vec{W}_\perp = 0 \Rightarrow$

$W^\mu = (\lambda p^0, \vec{0}_\perp, \lambda p^0) = \lambda p^\mu$

$\Rightarrow W^\mu = \lambda p^\mu$ $\quad\lambda$ inv. Poincaré.

$\lambda = \frac{W^0}{p^0} = \frac{\vec{p}\cdot\vec{J}}{|\vec{p}|} = \vec{J}\cdot\hat{p}$ = helicidad

$M^2=0$

$p^\mu = (w, 0, 0, w)$

Aquí se ve que $[W^\mu, W^\nu]$ es el grupo euclídeo $\mathbb{R}^2$ cuando $m^2=0$.

$W^\mu = (\lambda w, \vec{w}_T, \lambda w)$ $\qquad W^2 = -\vec{W}_T^2$

$[W^0, W^3] = 0 = +i\epsilon^{03\alpha\beta} p_\alpha W_\beta = 0$

$[W^0, W^1] = i\epsilon^{01\alpha\beta} p_\alpha W_\beta = i\epsilon^{0132} p_3 W_2 = +i\, p^0 W^2$

$[W^0, W^i] = i\epsilon_{ij} p^0 W^j \qquad i,j=1,2$

$[W^3, W^1] = i\epsilon^{3102} p_0 W_2 = i p^0 W^1$ ok

por $W^0 = W^3$

$[W^1, W^2] = i\epsilon^{1203} p_0 W_3 + i\epsilon^{1230} p_3 W_0$
$= +i p^0 W^0 - i p^0 W^0 = 0$

$\lambda = \dfrac{W^0}{p^0} \qquad [\lambda, W^i] = i\epsilon_{ij} W^j$
$[W^i, W^j] = 0 \qquad i,j = 1,2$

$\boxed{\text{grupo euclídeo } \mathbb{R}^2}$

$J^2 < \infty \Rightarrow \vec{W}_\perp = 0$ es un a... (y a mi afirmación ino Lorentz por $W^2 = -\vec{W}_\perp^2$

Para partículas de masa nula hay que hacer un tratamiento aparte.

(**) $\vec{S}^2$ finito, $M^2=0$, $\Rightarrow$ $W^2=0$ y $\vec{W}=\vec{P}\frac{W^0}{H}=\lambda\vec{P}$ — Group theory, Wu Ki Tung, World Scientific

$|\vec{P}|=H$

$W^0=\frac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_i J_{jk}=\vec{P}\cdot\vec{J}$

es decir $W^\mu=\lambda P^\mu$ $\lambda=\frac{W^0}{P^0}=\frac{\vec{P}\cdot\vec{S}}{H}$ = helicidad $(H=|\vec{P}|)$

$P^\mu=(P^0,\vec{0},P)$ $W^\mu=(W^0,W_\perp,W^0)$ $W^2=-W_\perp^2$ ... y $W^\mu P_\mu=0$

puesto que W^μ, P^μ son cuadrivectores, λ también es inv. Poincaré. (pseudoescalar)

(En $M\neq0$ la helicidad de un estado se puede cambiar llevándolo al reposo, pero no si $M=0$)

$\lambda=\vec{S}\cdot\hat{P}$ = helicidad = espín en la dirección del momento. $=0,\pm\frac{1}{2},\pm1,\ldots$

como es un invariante no hay motivo para que aparezca en multipletes del tipo $\lambda=-s,-s+1,\ldots,s$ y de hecho no aparece así en la naturaleza. λ es único y característico de la partícula. A lo sumo se tienen dos valores $\pm\lambda$ si paridad es realizable.

Desde el punto de vista de teoría de grupos (es decir, indep. de realizaciones concretas), el grupo tiene varios tipos de rep. irred. unitarias, de las cuales 3 tipos encuentran aplicación en Física: CCOC $M^2, W^2, \vec{P}, \frac{\vec{P}\cdot\vec{S}}{W_3}$

a) ~~M~~ $P^\mu=J^{\mu\nu}=0$ (la rep. trivial). rep. el vacío.

b) $P^2=M^2>0$, ~~s~~ $P^0>0$, espín $j=0,\frac{1}{2},1,\ldots$

base $|\underset{>0}{M}j;\vec{P},\lambda\rangle$ $P^0=+\sqrt{M^2+\vec{P}^2}$, $R_{\hat{P}}(\varphi)|Mj;\vec{P}\lambda\rangle=e^{-i\varphi\lambda}|\ \rangle$

$\lambda=-j,\ldots,j$

c) $P^2=0$, $P^0>0$, $\lambda=0,\pm\frac{1}{2},\ldots$

base $|\underset{\underset{0}{\parallel}}{M}\lambda;\vec{P}\rangle$, $P^0=|\vec{P}|$, $R_{\hat{P}}(\varphi)|\ \rangle=e^{-i\varphi\lambda}|\ \rangle$.

* No hay Lorentz (sí sabidas si $M\neq0$)
$[\vec{K},\vec{S}]\neq0$
... $\vec{J}=\vec{L}+\vec{S}$

(**) Para M^2 hay variantes pero no se usan. Solo nos quedamos con las que cumplen $W^2=0$ y esto por analogía con el caso $M\neq0$ y $\vec{S}^2=-\frac{W^2}{M^2}$, $M\to0$ y $\vec{S}^2<\infty$

$$\vec{K} = x^0 \vec{P} - \tfrac{1}{2}\{H, \vec{R}\} \qquad [R_i, P_j] = i\delta_{ij} \qquad R_i = i\frac{\partial}{\partial P_i}$$

$$= x^0 \vec{P} + \frac{i\vec{P}_i}{2H} - \vec{R}_i H \qquad [H, R_i] = -i\frac{P_i}{H}$$

$$[K_i, K_j] = \left(\left[x^0 P_i + i\frac{P_i}{H}, -R_j H \right] - X_{ij} \right) + [R_i H, R_j H]$$

$$[f(\vec{P}^2) P_i, -R_j H] = [\underset{\overset{\shortparallel}{i\frac{\partial}{\partial P_j}}}{R_j}, f P_i] H = i(f' \, 2 P_j P_i + f\delta_{ij}) H = X_{ij}$$

$$\begin{aligned}
[R_i H, R_j H] &= [R_i H, R_j] H + R_j [R_i H, H] \\
&= R_i [H, R_j] H + R_j [R_i, H] H \\
&= R_i \left(-i\frac{P_j}{H}\right) H - X_{ij} = -i(R_i P_j - R_j P_i)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\epsilon_{ijk} L_k &= i\epsilon_{ijk}\epsilon_{klm} R_l P_m = i(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) R_l P_m \\
&= i(R_i P_j - R_j P_i)
\end{aligned}$$

$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk} L_k \qquad \vec{K} \times \vec{K} = -i\vec{J}$$

Veamos realizaciones del álgebra de Poincaré:

$\delta_{\vec a}: \vec J = -\delta\vec a \times \vec P$ sugiere la existencia de un $\vec R$ = posición

tal que $[P_i, R_j] = -i\,\delta_{ij}$ $\quad (\delta_{\vec a}\vec R = -\delta\vec a)$

Si no hay espín: $\vec J = \vec R\times\vec P = \vec L$ funciona $\quad ([R_i, R_j] = 0)$

Por otro lado $\delta_a \vec K = \delta_a J^{0i} = \delta a^i P^0 - \delta a^0 P^i = \delta\vec a\, H - \delta a^0 \vec P$

indica $\vec K = -\frac{1}{2}\{H, \vec R\} + x^0 \vec P$ $\quad$ x^0 = tiempo es un c-número; notar $\vec K = \vec K^\dagger$

junto con $H = (M^2 + \vec P^2)^{1/2}$, se satisfacen todas las relaciones

por ej. usando $[H, \vec R] = -i\frac{\partial H}{\partial \vec P} = -i\frac{\vec P}{H}$ $\qquad \frac{d}{dt}\vec R = i[H, \vec R] = \frac{\vec P}{H}$ = veloc.

$[P_i, K_j] = iH\delta_{ij}$

$[H, \vec J] = [H, \vec R]\times\vec P = 0$

$[H, \vec K] = [H, -\frac{1}{2}\{H, \vec R\}] = -\frac{1}{2}\{H, [H, \vec R]\} = -\frac{1}{2}\{H, -i\frac{\vec P}{H}\} = i\vec P$

En esta representación $W^2 \equiv 0$. (Se ve mejor en espino

Más generalmente

$\vec J = \vec R\times\vec P + \vec S$ $\quad$ con $[\vec S, \vec R] = [\vec S, \vec P] = 0$, $\quad [S^i, S^j] = i\epsilon_{ijk}S^k$

es un momento angular. Ahora queremos mantener

$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k = -i\epsilon_{ijk}L_k \underline{- i\epsilon_{ijk}S_k}$ y por tanto hay

que modificar $\vec K$:

$\vec K = -\frac{1}{2}\{H, \vec R\} + x^0\vec P + f(H)\,\underbrace{\vec S\times\vec P}$ $\quad$ (es un vector bajo $\vec J$ y $[J, K]$ sale bien)

f a determinar $\qquad$ vector (polar) $\qquad$ (bien paridad $R\to -R$, $P\to -P$, $S\to S$, $K\to -K$)

excluye $f_1(H)\,\vec S\times\vec R$ $\quad$ bien inv. temporal $\vec R\to\vec R$, $\vec P\to -\vec P$, $S\to -S$, $K\to +K$, $x^0\to -x^0$

un cálculo explícito de $[K_i, K_j]$ indica que el problema tiene solución con $f(H) = \frac{1}{M+H}$ (única)

En definitiva

$$\vec{J} = \vec{R}\times\vec{P} + \vec{S}, \qquad \vec{K} = x^0\vec{P} - \tfrac{1}{2}\{H,\vec{R}\} + \frac{\vec{S}\times\vec{P}}{M+H}$$

satisfacen el álgebra de Poincaré. (De hecho $\vec{R}, \vec{S}$ siempre existen ya que estas relaciones son invertibles)

Para esta rep. se tiene

$$W^0 = \tfrac{1}{2}\epsilon^{0ijk}P_i W_{jk} = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}p^i J_{jk} = p^i J_i = \vec{P}\cdot\vec{J}$$

$$\vec{W} = \tfrac{1}{2}\epsilon^{i0jk}P_0 J_{jk} + \epsilon^{ij0k}P_j J_{0k} = H\vec{J} - \epsilon_{ij0k}P^j J^{0k} = H\vec{J} - \vec{P}\times\vec{K}$$

$$\Rightarrow \quad W^0 = \vec{P}\cdot\vec{S}$$

$$\vec{W} = H\vec{S} - \frac{\vec{P}\times(\vec{S}\times\vec{P})}{M+H} = M\vec{S} + \frac{(\vec{P}\cdot\vec{S})}{M+H}\vec{P}$$

$$P\times(S\times P) = \vec{p}^{\,2}\vec{S} - (\vec{p}\cdot\vec{S})\vec{p}, \qquad \vec{p}^{\,2}\vec{S} = (H+M)(H-M)\vec{S}$$

$$= M\vec{S} + \frac{W^0\vec{P}}{H+M}$$

$$-W^2 = -W_0^2 + \vec{W}^2 = -W_0^2 + M^2\vec{S}^2 + \frac{W_0^2\vec{P}^2}{(H+M)^2} + \frac{2MW_0^2}{(H+M)}$$

$$= M^2\vec{S}^2 + W_0^2\left(-1 + \frac{\vec{P}^2}{(H+M)^2} + \frac{2M}{H+M}\right) \qquad \vec{p}^{\,2} = (H+M)(H-M)$$

$$= M^2\vec{S}^2$$

$-W^2 = M^2\vec{S}^2$ y $\vec{S}^2$ es un invariante Poincaré.

Notar, a diferencia del caso no relativista $\vec{K}$ no conmuta con $\vec{S}$ aunque sí $[H,\vec{S}]=0$

[Notar en Dirac por ej. esto no se aplica: los $\vec{S}$, $\vec{R}$ de allí mezclan energía positiva y negativa y $[\vec{R},H] = i\vec{\alpha} \neq i\frac{\vec{p}}{p^0}$ y $[\vec{S},H]\neq 0$. $\vec{R},\vec{S}$ no actúan en el espacio de $H=\sqrt{\vec{p}^2+M^2}>0$ lo que aquí se demuestra es que hay otros $\vec{R}', \vec{S}'$ que sí cumplen las fórmulas de más arriba. En $|\vec{p}=0\rangle$ sí coinciden.